**Θεωρία Πιθανοτήτων, εαρινό εξάμηνο 2017-18.**

**Λύσεις του έβδομου φυλλαδίου ασκήσεων.**

1. *Αν η συνεχής τ.μ. $X$ έχει συνάρτηση κατανομής $F_X$ και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X$, να βρείτε τις αντίστοιχες συναρτήσεις $F_Y$ και $f_Y$ της συνεχούς τ.μ. $Y = aX + b$ και να αποδείξετε ότι $\mathbb{E}(Y) = a\mathbb{E}(X) + b$ και $\mathrm{Var}(Y) = a^2 \mathrm{Var}(X)$.*

   Γνωρίζουμε ότι
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt \qquad \text{για κάθε } x.$$
   Άρα, όταν $a > 0$ έχουμε
$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P\Big(X \le \frac{y-b}{a}\Big) = F_X\Big(\frac{y-b}{a}\Big) = \int_{-\infty}^{\frac{y-b}{a}} f_X(t)\,dt. \tag{1}$$
   Κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $s = at + b$ και τότε:
$$F_Y(y) = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{y} f_X\Big(\frac{s-b}{a}\Big)\,ds. \tag{2}$$
   Τώρα ορίζουμε την συνάρτηση $f_Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο
$$f_Y(y) = \frac{1}{a}\, f_X\Big(\frac{y-b}{a}\Big). \tag{3}$$
   Βλέπουμε ότι η $f_Y$ έχει μη-αρνητικές τιμές, διότι η $f_X$ έχει μη-αρνητικές τιμές. Επίσης, η ιδιότητα $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$ συνεπάγεται
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)\,dy = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} f_X\Big(\frac{y-b}{a}\Big)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$$
   με την αλλαγή μεταβλητής $y = ax + b$.
   Άρα η $f_Y$ είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και έχουμε από τις (2) και (3) ότι
$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(s)\,ds \qquad \text{για κάθε } y.$$
   Άρα η $Y$ είναι συνεχής τ.μ. με συνάρτηση κατανομής την $F_Y$ η οποία σχετίζεται με την $F_X$ μέσω της (1): $F_Y(y) = F_X(\frac{y-b}{a})$ για κάθε $y$. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_Y$ της $Y$ σχετίζεται με την $f_X$ μέσω της (3): $f_Y(y) = \frac{1}{a}\, f_X(\frac{y-b}{a})$.
   Τώρα, πάλι με αλλαγή μεταβλητής, έχουμε
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\,dy = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} y f_X\Big(\frac{y-b}{a}\Big)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} (ax+b) f_X(x)\,dx \\ &= a\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx + b\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = a\mathbb{E}(X) + b.\end{aligned}$$
   Επίσης,
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_Y(y)\,dy = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_X\Big(\frac{y-b}{a}\Big)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} (ax+b)^2 f_X(x)\,dx \\ &= a^2\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,dx + 2ab\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx + b^2\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx \\ &= a^2\mathbb{E}(X^2) + 2ab\mathbb{E}(X) + b^2,\end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Y) &= \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = a^2\mathbb{E}(X^2) + 2ab\mathbb{E}(X) + b^2 - (a\mathbb{E}(X)+b)^2 \\ &= a^2\mathbb{E}(X^2) - a^2\mathbb{E}(X)^2 = a^2\,\mathrm{Var}(X).\end{aligned}$$

Στην προηγούμενη διαδικασία υποθέσαμε ότι $a > 0$. Στην περίπτωση $a < 0$ πρέπει να επαναλάβουμε, προσέχοντας τις αλλαγές που θα γίνουν στις ανισότητες στην (1) καθώς και στις αλλαγές μεταβλητής στα διάφορα ολοκληρώματα. Κάντε το εσείς.

2. *Αν η τ.μ. $X$ ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[a,b]$, αποδείξτε ότι η τ.μ. $Y = \frac{X-a}{b-a}$ ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0,1]$.*

   Το ότι η $X$ ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[a,b]$ σημαίνει ότι έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X$ με τύπο

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{αν } a < x < b \\ 0, & \text{αν } x < a \text{ ή } b < x. \end{cases}$$

   Από την $Y = \frac{1}{b-a}X - \frac{a}{b-a}$ βλέπουμε ότι μπορούμε να εφαρμόσουμε το αποτέλεσμα της προηγούμενης άσκησης με το $\frac{1}{b-a}$ στην θέση του $a$ και το $-\frac{a}{b-a}$ στην θέση του $b$. Τότε η σχέση (3) θα γίνει στην περίπτωσή μας:

$$f_Y(y) = (b-a)f_X((b-a)y+a).$$

   Χρησιμοποιώντας τον τύπο της $f_X$, παίρνουμε

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1, & \text{αν } 0 < y < 1 \\ 0, & \text{αν } y < 0 \text{ ή } 1 < y. \end{cases}$$

   Άρα η τ.μ. $Y$ ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0,1]$.

3. *Το ποσό $X$ της μικρότερης προσφοράς σε μειοδοτικό διαγωνισμό για την κατασκευή ενός δρόμου με κόστος κατασκευής $k$ ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο $[3k/4, 7k/4]$.*
   *(i) Ποιά είναι η πιθανότητα να κερδίσει τον διαγωνισμό εργοληπτική εταιρεία που υποβάλλει προσφορά κατασκευής με ποσό $a \in [3k/4, 7k/4]$;*
   *(ii) Αν η ζημιά της εργοληπτικής εταιρείας όταν χάνει τον διαγωνισμό είναι $b$ να υπολογισθεί το ποσό $a \in [3k/4, 7k/4]$ της προσφοράς κατασκευής που πρέπει να υποβάλει ώστε να μεγιστοποιήσει το αναμενόμενο κέρδος της.*

   (i) Η εργοληπτική εταιρεία θα κερδίσει τον διαγωνισμό όταν η προσφορά $a$ που κάνει είναι μικρότερη από την τιμή της $X$ (δηλαδή της μικρότερης προσφοράς που κάνουν οι ανταγωνιστές). Η πιθανότητα αυτή είναι:

$$P(X > a) = P\Big(X \in \Big(a, \frac{7k}{4}\Big]\Big) = \frac{\frac{7k}{4} - a}{\frac{7k}{4} - \frac{3k}{4}} = \frac{7}{4} - \frac{a}{k}.$$

   (ii) Η εταιρεία κερδίζει τον διαγωνισμό με πιθανότητα $\frac{7}{4} - \frac{a}{k}$ και τότε το κέρδος της είναι $Y = a - k$. Η εταιρεία χάνει τον διαγωνισμό με πιθανότητα $1 - (\frac{7}{4} - \frac{a}{k}) = \frac{a}{k} - \frac{3}{4}$ και τότε το κέρδος της είναι $Y = -b$. Η τ.μ. $Y$ είναι διακριτή με πιθανές τιμές $a - k$ και $-b$ και αντίστοιχες πιθανότητες

$$f_Y(a-k) = \frac{7}{4} - \frac{a}{k}, \qquad f_Y(-b) = \frac{a}{k} - \frac{3}{4}.$$

   Άρα το αναμενόμενο κέρδος είναι

$$\mathbb{E}(Y) = (a-k)\Big(\frac{7}{4} - \frac{a}{k}\Big) + (-b)\Big(\frac{a}{k} - \frac{3}{4}\Big) = -\frac{1}{k}\,a^2 + \frac{11k - 4b}{4k}\,a + \frac{3b - 7k}{4}.$$

Η παράγωγος του $\mathbb{E}(Y)$ ως προς $a$ είναι

$$-\frac{2}{k}\,a + \frac{11k-4b}{4k}$$

και μηδενίζεται όταν

$$a = \frac{11k-4b}{8}.$$

Βλέπουμε εύκολα ότι η παράγωγος είναι $> 0$ όταν $a < \frac{11k-4b}{8}$ και είναι $< 0$ όταν $a > \frac{11k-4b}{8}$. Άρα το $\mathbb{E}(Y)$ αυξάνει γνήσια αριστερά του $\frac{11k-4b}{8}$ και φθίνει γνήσια δεξιά του $\frac{11k-4b}{8}$. Τώρα έχουμε τρεις περιπτώσεις, ανάλογα με την θέση του $\frac{11k-4b}{8}$ σε σχέση με το διάστημα $[\frac{3k}{4}, \frac{7k}{4}]$.
Περίπτωση 1: $\frac{3k}{4} \leq \frac{11k-4b}{8} \leq \frac{7k}{4}$ ή, ισοδύναμα, $-3k \leq 4b \leq 5k$ ή, ισοδύναμα, $b \leq \frac{5k}{4}$ (διότι $b > 0$). Τότε το $\mathbb{E}(Y)$ μεγιστοποιείται όταν $a = \frac{11k-4b}{8}$.
Περίπτωση 2: $\frac{11k-4b}{8} \leq \frac{3k}{4}$ ή, ισοδύναμα, $b \geq \frac{5k}{4}$. Τότε το $\mathbb{E}(Y)$ μεγιστοποιείται όταν $a = \frac{3k}{4}$.
Περίπτωση 3: $\frac{7k}{4} \leq \frac{11k-4b}{8}$ ή, ισοδύναμα, $b \leq -\frac{3k}{4}$. Αυτό δεν υφίσταται.

4. *Ο χρόνος ζωής $X$ ενός προϊόντος ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέση τιμή $\mu > 0$. Ποιός πρέπει να είναι ο χρόνος εγγύησης $a > 0$ που πρέπει να προσφέρει ο κατασκευαστής ώστε με πιθανότητα $0,95$ το προϊόν να διατηρείται πέρα από τον χρόνο εγγύησης;*

   Πρέπει:
   $$P(X \geq a) \geq 0,95.$$
   Ισοδύναμα,
   $$\int_a^{+\infty} f_X(x)\,dx \geq 0,95.$$
   Επειδή $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, όπου $\mu = \mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$, η συνθήκη γράφεται
   $$0,95 \leq \lambda \int_a^{+\infty} e^{-\lambda x}\,dx = e^{-\lambda a} = e^{-a/\mu}.$$
   Ισοδύναμα: $a \leq \mu \log \frac{100}{95} \approx 0,0526\,\mu$.

5. *Ο χρόνος λειτουργίας κινητήρα αεροπλάνου ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέση τιμή $\mu > 0$. Για πτήση αεροπλάνου πρέπει να λειτουργούν τουλάχιστον δύο από τους τέσσερις κινητήρες του. Ποιά είναι η πιθανότητα να φτάσει στον προορισμό του το αεροπλάνο μετά από πτήση χρονικής διάρκειας $a$;*

   Αν $X$ είναι ο χρόνος λειτουργίας ενός κινητήρα, τότε $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ και $\mu = \mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$. Τότε
   $$P(X \geq x) = \lambda \int_x^{+\infty} e^{-\lambda t}\,dt = e^{-\lambda x} = e^{-x/\mu}.$$
   Για να μην φτάσει στον προορισμό του το αεροπλάνο, πρέπει ο χρόνος λειτουργίας τριών ή και των τεσσάρων κινητήρων του να είναι $< a$. Η πιθανότητα αυτού του ενδεχομένου είναι
   $$\binom{4}{4}P(X < a)^4 + \binom{4}{3}P(X < a)^3 P(X \geq a) = (1 - e^{-a/\mu})^4 + 4(1 - e^{-a/\mu})^3 e^{-a/\mu}.$$
   Άρα η πιθανότητα να φτάσει στον προορισμό του το αεροπλάνο είναι
   $$1 - (1 - e^{-a/\mu})^4 - 4(1 - e^{-a/\mu})^3 e^{-a/\mu} = 6e^{-2a/\mu} - 8e^{-3a/\mu} + 3e^{-4a/\mu}.$$

6. *Έστω ότι η ποσότητα $X$ ενός προϊόντος που πωλείται σε μία ημέρα ακολουθεί την κατανομή Γ με μέση τιμή 4000 μονάδες και τυπική απόκλιση 2000 μονάδες. Αν η διαθεσιμότητα του προϊόντος σε μία ημέρα είναι 6000 μονάδες, βρείτε την πιθανότητα ο πωλητής να μην ανταποκριθεί στην ζήτηση.*

   Έχουμε $f_X(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x}$ και

   $$\frac{a}{\lambda} = \mathbb{E}(X) = 4000, \qquad \frac{a}{\lambda^2} = \mathrm{Var}(X) = 2000^2.$$

   Άρα $a = 4$ και $\lambda = 1/1000$.
   Η πιθανότητα που θέλουμε είναι

   $$\begin{aligned} P(X > 6000) &= \int_{6000}^{+\infty} f_X(x)\, dx = \frac{\lambda^4}{\Gamma(4)} \int_{6000}^{+\infty} x^3 e^{-\lambda x}\, dx = \frac{1}{3!} \int_{6000\lambda}^{+\infty} x^3 e^{-x}\, dx \\ &= \frac{1}{6} \int_{6}^{+\infty} x^3 e^{-x}\, dx = 61 e^{-6} \approx 0,01515. \end{aligned}$$

7. *Μία μηχανή κατασκευάζει βίδες των οποίων το μήκος $X$ ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 40mm και τυπική απόκλιση 1mm. Μία βίδα θεωρείται ελαττωματική αν το μήκος της (σε mm) είναι εκτός του διαστήματος $[39, 41]$. Ποιό είναι το ποσοστό των ελαττωματικών βιδών που παράγει η μηχανή;*

   Κανονικοποιούμε την $X$: η τ.μ.

   $$Z = \frac{X - 40}{1} = X - 40$$

   ακολουθεί την κανονική κατανομή $\mathrm{N}(0, 1)$. Το να είναι το $X$ εκτός του διαστήματος $[39, 41]$ ισοδυναμεί με το να είναι το $Z$ εκτός του διαστήματος $[-1, 1]$. Η αντίστοιχη πιθανότητα είναι

   $$P(|Z| \geq 1) = 2P(Z \geq 1) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{1}^{+\infty} e^{-x^2/2}\, dx \approx 0,3174.$$

   Άρα το ποσοστό των ελαττωματικών βιδών είναι $\approx 31,74\%$.

8. *Έστω ότι η αντοχή $X$ ενός υφάσματος ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 50 και τυπική απόκλιση 2. Ένα τόπι υφάσματος αποφέρει κέρδος 15 ευρώ αν $X > 47$ και κέρδος 6 ευρώ αν $X \leq 47$. Να υπολογισθεί το αναμενόμενο κέρδος ανά τόπι υφάσματος.*

   Κανονικοποιούμε την $X$: η τ.μ.

   $$Z = \frac{X - 50}{2}$$

   ακολουθεί την κανονική κατανομή $\mathrm{N}(0, 1)$. Τότε

   $$P(X > 47) = P(Z > -1,5) = P(Z < 1,5) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{1,5} e^{-x^2/2}\, dx$$

   και

   $$P(X \leq 47) = 1 - P(X > 47) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{1,5} e^{-x^2/2}\, dx.$$

   Άρα έχουμε κέρδος $Y = 15$ με πιθανότητα $P(X > 47)$ και κέρδος $Y = 6$ με πιθανότητα $P(X \leq 47)$. Άρα το $Y$ είναι διακριτή τ.μ. με πιθανές τιμές 15 και 6, οπότε το αναμενόμενο κέρδος είναι

   $$\mathbb{E}(Y) = 15\, P(X > 47) + 6\, P(X \leq 47) = 6 + \frac{9}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{1,5} e^{-x^2/2}\, dx \approx 14,3988.$$

9. *(i) Αν η σ.τ.μ. $X$ ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda > 0$, αποδείξτε ότι $P(X \geq x + y \,|\, X \geq x) = P(X \geq y)$ για κάθε $x, y \geq 0$.*
*(ii) Αν η δ.τ.μ. ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή με πιθανότητα επιτυχίας $p$, αποδείξτε ότι $P(X \geq k + m \,|\, X \geq k) = P(X \geq m)$ για κάθε $k, m = 0, 1, 2, 3 \ldots$.*

(i) Είναι $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ και άρα

$$P(X \geq x) = \int_x^{+\infty} f_X(t)\,dt = \lambda \int_x^{+\infty} e^{-\lambda t}\,dt = e^{-\lambda x}.$$

Το ενδεχόμενο $X \geq x + y$ και $X \geq x$ είναι το ίδιο με το ενδεχόμενο $X \geq x + y$. Άρα

$$\begin{aligned} P(X \geq x + y \,|\, X \geq x) &= \frac{P(X \geq x + y \text{ και } X \geq x)}{P(X \geq x)} = \frac{P(X \geq x + y)}{P(X \geq x)} = \frac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda x}} \\ &= e^{-\lambda y} = P(X \geq y). \end{aligned}$$

(ii) Τώρα $f_X(k) = (1-p)^k p$, οπότε

$$P(X \geq k) = \sum_{n=k}^{+\infty} (1-p)^n p = (1-p)^k p \sum_{n=0}^{+\infty} (1-p)^n = \frac{(1-p)^k p}{1 - (1-p)} = (1-p)^k.$$

Πάλι το ενδεχόμενο $X \geq k + m$ και $X \geq k$ είναι το ίδιο με το ενδεχόμενο $X \geq k + m$. Άρα

$$\begin{aligned} P(X \geq k + m \,|\, X \geq k) &= \frac{P(X \geq k + m \text{ και } X \geq k)}{P(X \geq k)} = \frac{P(X \geq k + m)}{P(X \geq k)} \\ &= \frac{(1-p)^{k+m}}{(1-p)^k} = (1-p)^m = P(X \geq m). \end{aligned}$$