Θεωρία Πιθανοτήτων, εαρινό εξάμηνο 2017-18.

Λύσεις του όγδοου φυλλαδίου ασκήσεων.

1. *Έστω F_X, F_Y οι συναρτήσεις κατανομής των τ.μ. X, Y και $F_{X,Y}$ η από κοινού συνάρτηση κατανομής τους. Αποδείξτε ότι*
(i) $\lim_{y\to+\infty} F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)$, $\lim_{y\to-\infty} F_{X,Y}(x,y) = 0$.
(ii) $\lim_{x\to+\infty} F_{X,Y}(x,y) = F_Y(y)$, $\lim_{x\to-\infty} F_{X,Y}(x,y) = 0$.
(iii) $\lim_{x'\to x+} F_{X,Y}(x',y) = F_{X,Y}(x,y)$.
(iv) $\lim_{y'\to y+} F_{X,Y}(x,y') = F_{X,Y}(x,y)$.
(v) $\lim_{x'\to x-} F_{X,Y}(x',y) = F_{X,Y}(x,y) - P(X = x, Y \le y)$.
(vi) $\lim_{y'\to y-} F_{X,Y}(x,y') = F_{X,Y}(x,y) - P(X \le x, Y = y)$.

   (i) Έστω (y_n) οποιαδήποτε αύξουσα ακολουθία στο $\mathbb{R}$ με $y_n \to +\infty$. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα $A_n = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \le x, Y(\omega) \le y_n\}$ και $A = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \le x\}$. Τότε $A_n \subseteq A_{n+1}$ για κάθε n και $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = A$. Άρα

$$F_{X,Y}(x,y_n) = P(X \le x, Y \le y_n) = P(A_n) \to P(A) = P(X \le x) = F_X(x).$$

   Άρα $\lim_{y\to+\infty} F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)$.
   Έστω (y_n) οποιαδήποτε φθίνουσα ακολουθία στο $\mathbb{R}$ με $y_n \to -\infty$. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα A_n όπως πριν και τότε $A_{n+1} \subseteq A_n$ για κάθε n και $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = \emptyset$. Άρα

$$F_{X,Y}(x,y_n) = P(X \le x, Y \le y_n) = P(A_n) \to P(\emptyset) = 0.$$

   Άρα $\lim_{y\to-\infty} F_{X,Y}(x,y) = 0$.
   (ii) Ομοίως.
   (iii) Έστω (x_n) οποιαδήποτε φθίνουσα ακολουθία στο $\mathbb{R}$ με $x_n \to x$. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα $A_n = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \le x_n, Y(\omega) \le y\}$ και $A = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \le x, Y(\omega) \le y\}$. Τότε $A_{n+1} \subseteq A_n$ για κάθε n και $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = A$. Άρα

$$\begin{aligned} F_{X,Y}(x_n,y) &= P(X \le x_n, Y \le y) = P(A_n) \to P(A) = P(X \le x, Y \le y) \\ &= F_{X,Y}(x,y). \end{aligned}$$

   Άρα $\lim_{x'\to x+} F_{X,Y}(x',y) = F_{X,Y}(x,y)$.
   (iv) Ομοίως.
   (v) Έστω (x_n) οποιαδήποτε αύξουσα ακολουθία στο $\mathbb{R}$ με $x_n \to x$. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα $A_n = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \le x_n, Y(\omega) \le y\}$ και $A = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \le x, Y(\omega) \le y\}$, $B = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) < x, Y(\omega) \le y\}$, $C = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) = x, Y(\omega) \le y\}$. Τότε $A_n \subseteq A_{n+1}$ για κάθε n και $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = B$. Επίσης, $A = B \cup C$ και $B \cap C = \emptyset$. Άρα

$$\begin{aligned} F_{X,Y}(x_n,y) &= P(X \le x_n, Y \le y) = P(A_n) \to P(B) = P(A) - P(C) \\ &= P(X \le x, Y \le y) - P(X = x, Y \le y) \\ &= F_{X,Y}(x,y) - P(X = x, Y \le y). \end{aligned}$$

   Άρα $\lim_{x'\to x-} F_{X,Y}(x',y) = F_{X,Y}(x,y) - P(X = x, Y \le y)$.
   (vi) Ομοίως.

2. *Θεωρήστε την συνάρτηση* $F(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x + y \ge 0 \\ 0, & \text{αν } x + y < 0 \end{cases}$ *Είναι η F συνάρτηση κατανομής μιας διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής;*

   Αν η F είναι συνάρτηση κατανομής μιας διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής, τότε για κάθε ορθογώνιο $[a,b] \times [c,d]$ ισχύει

$$0 \le F(b,d) - F(a,d) - F(b,c) + F(a,c) \le 1.$$

   Αυτό δεν ισχύει για το $[-1,1] \times [-1,1]$.

3. *Ρίχνουμε δύο φορές ένα ζάρι και θεωρούμε το ζεύγος (i, j) των πιθανών ενδείξεων. Έστω $X = i + j$ και $Y = i - j$.*
(i) Είναι η (X, Y) διακριτή; Βρείτε την απο κοινού συνάρτηση πιθανότητας $f_{X,Y}$ των X, Y.
(ii) Βρείτε την συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $\mathbb{E}(X|Y)$ και υπολογίστε την $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y))$.
(iii) Βρείτε την συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $\mathbb{E}(Y|X)$ και υπολογίστε την $\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X))$.
(iv) Υπολογίστε τις $\mathbb{E}(X + Y)$, $\mathrm{Var}(X + Y)$, $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

(i) Το σύνολο των πιθανών τιμών της X είναι το $A_0 = \{2, 3, \ldots, 11, 12\}$ και το σύνολο των πιθανών τιμών της Y είναι το $B_0 = \{-5, -4, \ldots, 4, 5\}$. Άρα η (X, Y) είναι διακριτή και το σύνολο των πιθανών τιμών της είναι το $A_0 \times B_0$. Στην πραγματικότητα, το σύνολο των πιθανών τιμών της (X, Y) είναι μικρότερο από το $A_0 \times B_0$. Για παράδειγμα, το μοναδικό πιθανό ζευγάρι της μορφής $(2, y)$ είναι το $(2, 0)$. Τελικά το σύνολο πιθανών τιμών περιορίζεται στο

$$\begin{aligned} C_0 = \{&(2,0),(3,-1),(3,1),(4,-2),(4,0),(4,2),(5,-3),(5,-1),(5,1),(5,3),\\ &(6,-4),(6,-2),(6,0),(6,2),(6,4),(7,-5),(7,-3),(7,-1),(7,1),(7,3),\\ &(7,5),(8,-4),(8,-2),(8,0),(8,2),(8,4),(9,-3),(9,-1),(9,1),(9,3),\\ &(10,-2),(10,0),(10,2),(11,-1),(11,1),(12,0)\}. \end{aligned}$$

Κάθε άλλο ζευγάρι $(x, y) \in A_0 \times B_0$ πιάνεται με πιθανότητα ίση με 0.
Αν $(x, y) \in C_0$, τότε το ενδεχόμενο $X = x, Y = y$ είναι το ίδιο με το ενδεχόμενο $i = \frac{x+y}{2}, j = \frac{x-y}{2}$. Άρα

$$f_{X,Y}(x,y) = P(X = x, Y = y) = P\Big(i = \frac{x+y}{2}, j = \frac{x-y}{2}\Big) = \frac{1}{36}.$$

(ii) Για τις περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας έχουμε

$$f_X(x) = \sum_y f_{X,Y}(x,y), \qquad f_Y(y) = \sum_x f_{X,Y}(x,y).$$

Άρα

$$\begin{aligned} f_X(2) &= f_{X,Y}(2,0) = 1/36.\\ f_X(3) &= f_{X,Y}(3,-1) + f_{X,Y}(3,1) = 2/36.\\ f_X(4) &= f_{X,Y}(4,-2) + f_{X,Y}(4,0) + f_{X,Y}(4,2) = 3/36.\\ f_X(5) &= f_{X,Y}(5,-3) + f_{X,Y}(5,-1) + f_{X,Y}(5,1) + f_{X,Y}(5,3) = 4/36.\\ f_X(6) &= f_{X,Y}(6,-4) + f_{X,Y}(6,-2) + f_{X,Y}(6,0) + f_{X,Y}(6,2) + f_{X,Y}(6,4) = 5/36.\\ f_X(7) &= f_{X,Y}(7,-5) + f_{X,Y}(7,-3) + f_{X,Y}(7,-1) + f_{X,Y}(7,1) + f_{X,Y}(7,3)\\ &\quad + f_{X,Y}(7,5) = 6/36.\\ f_X(8) &= f_{X,Y}(8,-4) + f_{X,Y}(8,-2) + f_{X,Y}(8,0) + f_{X,Y}(8,2) + f_{X,Y}(8,4) = 5/36.\\ f_X(9) &= f_{X,Y}(9,-3) + f_{X,Y}(9,-1) + f_{X,Y}(9,1) + f_{X,Y}(9,3) = 4/36.\\ f_X(10) &= f_{X,Y}(10,-2) + f_{X,Y}(10,0) + f_{X,Y}(10,2) = 3/36.\\ f_X(11) &= f_{X,Y}(11,-1) + f_{X,Y}(11,1) = 2/36.\\ f_X(12) &= f_{X,Y}(12,0) = 1/36. \end{aligned}$$

Ομοίως,

$$
\begin{aligned}
f_Y(-5) &= f_{X,Y}(7,-5) = 1/36.\\
f_Y(-4) &= f_{X,Y}(6,-4) + f_{X,Y}(8,-4) = 2/36.\\
f_Y(-3) &= f_{X,Y}(5,-3) + f_{X,Y}(7,-3) + f_{X,Y}(9,-3) = 3/36.\\
f_Y(-2) &= f_{X,Y}(4,-2) + f_{X,Y}(6,-2) + f_{X,Y}(8,-2) + f_{X,Y}(10,-2) = 4/36.\\
f_Y(-1) &= f_{X,Y}(3,-1) + f_{X,Y}(5,-1) + f_{X,Y}(7,-1) + f_{X,Y}(9,-1) + f_{X,Y}(11,-1)\\
&= 5/36.\\
f_Y(0) &= f_{X,Y}(2,0) + f_{X,Y}(4,0) + f_{X,Y}(6,0) + f_{X,Y}(8,0) + f_{X,Y}(10,0)\\
&\quad + f_{X,Y}(12,0) = 6/36.\\
f_Y(1) &= f_{X,Y}(3,1) + f_{X,Y}(5,1) + f_{X,Y}(7,1) + f_{X,Y}(9,1) + f_{X,Y}(11,1) = 5/36.\\
f_Y(2) &= f_{X,Y}(4,2) + f_{X,Y}(6,2) + f_{X,Y}(8,2) + f_{X,Y}(10,2) = 4/36.\\
f_Y(3) &= f_{X,Y}(5,3) + f_{X,Y}(7,3) + f_{X,Y}(9,3) = 3/36.\\
f_Y(4) &= f_{X,Y}(6,4) + f_{X,Y}(8,4) = 2/36.\\
f_Y(5) &= f_{X,Y}(7,5) = 1/36.
\end{aligned}
$$

Η τ.μ. $\mathbb{E}(X|Y)$ έχει τιμές

$$\mathbb{E}(X|Y=y) = \sum_x x f_{X|Y}(x|y) = \sum_x x f_{X,Y}(x,y) \Big/ f_Y(y)$$

με αντίστοιχη πιθανότητα $f_Y(y)$. Κάνοντας πράξεις:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X|Y=-5) &= \big(7f_{X,Y}(7,-5)\big)36 = 7.\\
\mathbb{E}(X|Y=-4) &= \big(6f_{X,Y}(6,-4) + 8f_{X,Y}(8,-4)\big)36/2 = 7.\\
\mathbb{E}(X|Y=-3) &= \big(5f_{X,Y}(5,-3) + 7f_{X,Y}(7,-3) + 9f_{X,Y}(9,-3)\big)36/3 = 7.\\
\mathbb{E}(X|Y=-2) &= \big(4f_{X,Y}(4,-2) + 6f_{X,Y}(6,-2) + 8f_{X,Y}(8,-2)\\
&\quad + 10f_{X,Y}(10,-2)\big)36/4 = 7.\\
\mathbb{E}(X|Y=-1) &= \big(3f_{X,Y}(3,-1) + 5f_{X,Y}(5,-1) + 7f_{X,Y}(7,-1) + 9f_{X,Y}(9,-1)\\
&\quad + 11f_{X,Y}(11,-1)\big)36/5 = 7.\\
\mathbb{E}(X|Y=0) &= \big(2f_{X,Y}(2,0) + 4f_{X,Y}(4,0) + 6f_{X,Y}(6,0) + 8f_{X,Y}(8,0)\\
&\quad + 10f_{X,Y}(10,0) + 12f_{X,Y}(12,0)\big)36/6 = 7.\\
\mathbb{E}(X|Y=1) &= \big(3f_{X,Y}(3,1) + 5f_{X,Y}(5,1) + 7f_{X,Y}(7,1) + 9f_{X,Y}(9,1)\\
&\quad + 11f_{X,Y}(11,1)\big)36/5 = 7.\\
\mathbb{E}(X|Y=2) &= \big(4f_{X,Y}(4,2) + 6f_{X,Y}(6,2) + 8f_{X,Y}(8,2) + 10f_{X,Y}(10,2)\big)36/4 = 7.\\
\mathbb{E}(X|Y=3) &= \big(5f_{X,Y}(5,3) + 7f_{X,Y}(7,3) + 9f_{X,Y}(9,3)\big)36/3 = 7.\\
\mathbb{E}(X|Y=4) &= \big(6f_{X,Y}(6,4) + 8f_{X,Y}(8,4)\big)36/2 = 7.\\
\mathbb{E}(X|Y=5) &= \big(7f_{X,Y}(7,5)\big)36 = 7.
\end{aligned}
$$

Άρα η τ.μ. $\mathbb{E}(X|Y)$ έχει μόνο μία πιθανή τιμή, την 7. Επομένως, $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)) = 7$.
Η $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y))$ μπορεί να υπολογιστεί και αλλιώς:

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)) = \mathbb{E}(X) = \sum_x x f_X(x) = 2f_X(2) + 3f_X(3) + \cdots + 11f_X(11) + 12f_X(12) = 7.$$

(iii) Ομοίως.
(iv) Έχουμε:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_x x f_X(x) = 2f_X(2) + 3f_X(3) + \cdots + 11f_X(11) + 12f_X(12) = 7.$$

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_y x f_Y(y) = (-5)f_Y(-5) + (-4)f_Y(-4) + \cdots + 4f_Y(4) + 5f_Y(5) = 0.$$

Άρα

$$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = 7 + 0 = 7.$$

Επίσης,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \sum_x (x - \mathbb{E}(X))^2 f_X(x) \\
&= (2-7)^2 f_X(2) + (3-7)^2 f_X(3) + \cdots + (11-7)^2 f_X(11) + (12-7)^2 f_X(12) \\
&= 35/6. \\
\mathrm{Var}(Y) &= \sum_y (y - \mathbb{E}(Y))^2 f_Y(y) \\
&= (-5)^2 f_Y(-5) + (-4)^2 f_Y(-4) + \cdots + 4^2 f_Y(4) + 5^2 f_Y(5) \\
&= 35/6.
\end{aligned}$$

Τέλος,

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))\big) = \sum_{x,y} (x - \mathbb{E}(X))(y - \mathbb{E}(Y)) f_{X,Y}(x,y).$$

Κάνοντας πράξεις, βρίσκουμε $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$. Άρα

$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y) = 35/3.$$

4. *Όπως στο προηγούμενο πρόβλημα, αλλά με $X = i$ και $Y = \max\{i,j\}$.*

   Η λύση είναι παρόμοια με του προηγούμενου προβλήματος.

5. *Η συνάρτηση πιθανότητας της δ.τ.μ. (X,Y) είναι η $f_{X,Y}(x,y) = \frac{x+y-2}{c}$ για $x,y = 1,2,3$, όπου $c > 0$ είναι μια σταθερά.*
   (i) Υπολογίσετε την c.
   (ii) Βρείτε τις περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας $f_X(x)$ και $f_Y(y)$.
   (iii) Βρείτε την δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας $f_{X|Y}(x|y)$. Βρείτε την συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $\mathbb{E}(X|Y)$ και υπολογίστε την $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y))$.
   (iv) Υπολογίστε τις $\mathbb{E}(X+Y)$, $\mathrm{Var}(X+Y)$, $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

   (i) Υπολογίζουμε

   $$\sum_{x,y} f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{c} \sum_{x,y} (x+y-2) = \frac{18}{c}.$$

   Επειδή πρέπει να ισχύει $\sum_{x,y} f_{X,Y}(x,y) = 1$, συνεπάγεται $c = 18$.
   (ii) Ισχύει

   $$\begin{aligned}
   f_X(x) &= \sum_y f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{18} \sum_y (x+y-2) = \frac{x}{6} \qquad \text{για } x = 1,2,3. \\
   f_Y(y) &= \sum_x f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{18} \sum_x (x+y-2) = \frac{y}{6} \qquad \text{για } y = 1,2,3.
   \end{aligned}$$

   Επίσης,

   $$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{x+y-2}{3y} \qquad \text{για } x,y = 1,2,3.$$

   Οι τιμές της $\mathbb{E}(X|Y)$ είναι

   $$\mathbb{E}(X|Y=y) = \sum_x x f_{X|Y}(x|y) = \sum_x \frac{x(x+y-2)}{3y} = \frac{6y+2}{3y} \qquad \text{για } y = 1,2,3$$

με αντίστοιχες πιθανότητες $f_Y(y) = \frac{y}{6}$. Άρα

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)) = \sum_y \mathbb{E}(X|Y=y) f_Y(y) = \sum_y \frac{6y+2}{3y}\frac{y}{6} = \frac{1}{18}\sum_y (6y+2) = 7/3.$$

Ο υπολογισμός της $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y))$ γίνεται και ως εξής:

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)) = \mathbb{E}(X) = \sum_x x f_X(x) = \sum_x \frac{x^2}{6} = 7/3.$$

(iv) Είδαμε ότι $\mathbb{E}(X) = 7/3$ και ομοίως $\mathbb{E}(Y) = 7/3$. Άρα

$$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X) = 14/3.$$

Επίσης,

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_x x^2 f_X(x) = \frac{1}{6}\sum_x x^3 = 6$$

οπότε

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 5/9.$$

Ομοίως, $\mathrm{Var}(Y) = 5/9$. Επίσης,

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{x,y} xy f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{18}\sum_{x,y} xy(x+y-2) = 16/3.$$

Άρα

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = -1/9$$

και

$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y) = 8/9.$$

6. *Έστω ότι η δ.τ.μ. Y ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λ και ότι η δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας της δ.τ.μ. X όταν γνωρίζουμε ότι $Y = y$ είναι δυωνυμική με παραμέτρους y, p. Βρείτε την κατανομή της X.*

   Κατ' αρχάς,

$$f_{X,Y}(x,y) = f_{X|Y}(x|y) f_Y(y) = \binom{y}{x} p^x (1-p)^{y-x} e^{-\lambda}\frac{\lambda^y}{y!} = e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^x}{x!}\,\frac{(\lambda(1-p))^{y-x}}{(y-x)!}$$

   για $y = 0, 1, 2, \ldots$ και $x = 0, 1, \ldots, y$. Άρα

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \sum_{y=x}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) = e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^x}{x!}\sum_{y=x}^{+\infty}\frac{(\lambda(1-p))^{y-x}}{(y-x)!} \\ &= e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^x}{x!}\sum_{y=0}^{+\infty}\frac{(\lambda(1-p))^y}{y!} = e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^x}{x!}\,e^{\lambda(1-p)} = e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^x}{x!} \end{aligned}$$

   για $x = 0, 1, 2, \ldots$. Δηλαδή, η X ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λp.