Θεωρία Πιθανοτήτων, εαρινό εξάμηνο 2017-18.

Λύσεις του ένατου φυλλαδίου ασκήσεων.

1. *Έστω ότι η συνάρτηση πυκνότητας μιας διδιάστατης συνεχούς τυχαίας μεταβλητής (X, Y) έχει τύπο* $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k, & \text{αν } (x,y) \in [a,b]\times[c,d] \\ 0, & \text{αν } (x,y) \notin [a,b]\times[c,d] \end{cases}$ *όπου $k > 0$ είναι μια σταθερά.*
(i) Να βρεθεί η τιμή της k.
(ii) Αν $A \subseteq \mathbb{R}^2$, ποιά είναι η πιθανότητα $P((X,Y)\in A)$;
(iii) Ποιοί είναι οι τύποι των f_X, f_Y;
(iv) Είναι οι X, Y ανεξάρτητες; Βρείτε τις $\mathbb{E}(X+Y)$, $\mathrm{Var}(X+Y)$, $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

(i) Αναγκαία συνθήκη για να είναι η $f_{X,Y}$ συνάρτηση πυκνότητας συνεχούς τ.μ. είναι η

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y)\,dxdy = 1.$$

Χωρίζουμε το ολοκλήρωμα:

$$\iint_{R} f_{X,Y}(x,y)\,dxdy + \iint_{\mathbb{R}^2\setminus R} f_{X,Y}(x,y)\,dxdy = 1,$$

όπου $R = [a,b]\times[c,d]$. Επειδή η $f_{X,Y}$ είναι ταυτοτικά 0 στο $\mathbb{R}^2\setminus R$, το δεύτερο ολοκλήρωμα είναι ίσο με 0. Και επειδή η $f_{X,Y}$ είναι σταθερή k στο R, έχουμε ότι

$$k\iint_{R} dxdy = 1.$$

Όμως, το $\iint_R dxdy$ είναι ίσο με το εμβαδόν του R, οπότε $\iint_R dxdy = (b-a)(d-c)$. Άρα

$$k = \frac{1}{(b-a)(d-c)}.$$

(ii) Γράφουμε το A ως ξένη ένωση $A = (A\cap R)\cup(A\setminus R)$. Στο $A\cap R$ η $f_{X,Y}$ είναι σταθερή k και στο $A\setminus R$ είναι σταθερή 0. Άρα

$$\begin{aligned} P((X,Y)\in A) &= P((X,Y)\in A\cap R) + P((X,Y)\in A\setminus R) \\ &= \iint_{A\cap R} f_{X,Y}(x,y)\,dxdy + \iint_{A\setminus R} f_{X,Y}(x,y)\,dxdy \\ &= k\iint_{A\cap R} dxdy = \text{εμβ}(A\cap R)/\text{εμβ}(R). \end{aligned}$$

(iii) Γενικά,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy.$$

Αν $x\in\mathbb{R}\setminus[a,b]$, τότε $f_{X,Y}(x,y) = 0$ για κάθε y και άρα

$$f_X(x) = 0.$$

Αν $x\in[a,b]$, τότε $f_{X,Y}(x,y) = 0$ όταν $y\in\mathbb{R}\setminus[c,d]$ και $f_{X,Y}(x,y) = k$ όταν $y\in[c,d]$ και άρα

$$f_X(x) = k\int_c^d dy = k(d-c) = 1/(b-a).$$

Επομένως,

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/(b-a), & \text{αν } x\in[a,b] \\ 0, & \text{αν } x\notin[a,b] \end{cases}$$

Ομοίως,

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1/(d-c), & \text{αν } y \in [c,d] \\ 0, & \text{αν } y \notin [c,d] \end{cases}$$

(iv) Βλέπουμε αμέσως ότι $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ για κάθε x, y και άρα οι X, Y είναι ανεξάρτητες.
Έχουμε

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}.$$

Ομοίως

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{c+d}{2}$$

και άρα

$$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = \frac{a+b+c+d}{2}.$$

Επίσης,

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}.$$

Άρα

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \Big(\frac{a+b}{2}\Big)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Ομοίως,

$$\mathrm{Var}(Y) = \frac{(d-c)^2}{12}.$$

Επειδή οι X, Y είναι ανεξάρτητες, έχουμε $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$. Άρα

$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) = \frac{(b-a)^2 + (d-c)^2}{12}.$$

2. *Έστω ότι η συνάρτηση πυκνότητας μιας διδιάστατης συνεχούς τυχαίας μεταβλητής (X,Y) έχει τύπο $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k, & \text{αν } 0 \le y \le 1-x \le 1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$ όπου $k > 0$ είναι μια σταθερά.*
(i) Να βρεθεί η τιμή της k.
(ii) Αν $A \subseteq \mathbb{R}^2$, ποιά είναι η πιθανότητα $P((X,Y) \in A)$;
(iii) Ποιοί είναι οι τύποι των f_X, f_Y;
(iv) Είναι οι X, Y ανεξάρτητες; Βρείτε τις $\mathbb{E}(X+Y)$, $\mathrm{Var}(X+Y)$, $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

(i) Οι ανισότητες $0 \le y \le 1-x \le 1$ γράφονται ισοδύναμα: $0 \le x \le 1$ και $0 \le y \le 1-x$. Επομένως, το σύνολο στο οποίο η $f_{X,Y}$ είναι σταθερή k είναι το τριγωνικό χωρίο

$$R = \{(x,y) \,|\, 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1-x\}.$$

Στο $\mathbb{R}^2 \setminus R$ η $f_{X,Y}$ είναι ταυτοτικά ίση με 0.
Αναγκαία συνθήκη για να είναι η $f_{X,Y}$ συνάρτηση πυκνότητας συνεχούς τ.μ. είναι η

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y)\,dxdy = 1.$$

Χωρίζουμε το ολοκλήρωμα:

$$\iint_R f_{X,Y}(x,y)\,dxdy + \iint_{\mathbb{R}^2\setminus R} f_{X,Y}(x,y)\,dxdy = 1.$$

Επειδή η $f_{X,Y}$ είναι ταυτοτικά 0 στο $\mathbb{R}^2 \setminus R$, το δεύτερο ολοκλήρωμα είναι ίσο με 0. Και επειδή η $f_{X,Y}$ είναι σταθερή k στο R, έχουμε ότι

$$k \iint_R dxdy = 1.$$

Όμως, το $\iint_R dxdy$ είναι ίσο με το εμβαδόν του R, οπότε $\iint_R dxdy = \frac{1}{2}$. Άρα

$$k = 2.$$

(ii) Γράφουμε το A ως ξένη ένωση $A = (A \cap R) \cup (A \setminus R)$. Στο $A \cap R$ η $f_{X,Y}$ είναι σταθερή 2 και στο $A \setminus R$ είναι σταθερή 0. Άρα

$$\begin{aligned} P((X,Y) \in A) &= P((X,Y) \in A \cap R) + P((X,Y) \in A \setminus R) \\ &= \iint_{A \cap R} f_{X,Y}(x,y)\,dxdy + \iint_{A \setminus R} f_{X,Y}(x,y)\,dxdy \\ &= 2 \iint_{A \cap R} dxdy = \text{εμβ}(A \cap R)/\text{εμβ}(R). \end{aligned}$$

(iii) Γενικά,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy.$$

Αν $x \in \mathbb{R} \setminus [0,1]$, τότε $f_{X,Y}(x,y) = 0$ για κάθε y και άρα

$$f_X(x) = 0.$$

Αν $x \in [0,1]$, τότε $f_{X,Y}(x,y) = 0$ όταν $y \in \mathbb{R} \setminus [0, 1-x]$ και $f_{X,Y}(x,y) = 2$ όταν $y \in [0, 1-x]$ και άρα

$$f_X(x) = 2 \int_0^{1-x} dy = 2(1-x).$$

Επομένως,

$$f_X(x) = \begin{cases} 2(1-x), & \text{αν } x \in [0,1] \\ 0, & \text{αν } x \notin [0,1] \end{cases}$$

Ομοίως,

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2(1-y), & \text{αν } y \in [0,1] \\ 0, & \text{αν } y \notin [0,1] \end{cases}$$

(iv) Υπάρχουν x, y ώστε $f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y)$. Για παράδειγμα: $x = y = \frac{3}{4}$. Άρα οι X, Y δεν είναι ανεξάρτητες.
Έχουμε

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = 2 \int_0^1 x(1-x)\,dx = \frac{1}{3}.$$

Ομοίως

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{3}$$

και άρα

$$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = \frac{2}{3}.$$

Επίσης,

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,dx = 2 \int_0^1 x^2(1-x)\,dx = \frac{1}{6}.$$

Άρα
$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{1}{6} - \Big(\frac{1}{3}\Big)^2 = \frac{1}{18}.$$
Ομοίως,
$$\mathrm{Var}(Y) = \frac{1}{18}.$$
Ακόμη
$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y) &= \iint_{\mathbb{R}^2} xy f_{X,Y}(x,y)\,dxdy = 2\iint_R xy\,dxdy\\ &= 2\int_0^1 x\Big(\int_0^{1-x} y\,dy\Big)\,dx = \int_0^1 x(1-x)^2\,dx = \frac{1}{12}.\end{aligned}$$
Άρα
$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \frac{2}{12} = \frac{5}{18}.$$

3. *Έστω ότι η συνάρτηση πυκνότητας μιας διδιάστατης συνεχούς τυχαίας μεταβλητής (X,Y) έχει τύπο $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases}\lambda x e^{-x(\lambda+y)}, & \text{αν } x,y>0\\ 0, & \text{αλλιώς}\end{cases}$ όπου $\lambda > 0$ είναι μια σταθερά.*
(i) Ποιοί είναι οι τύποι των f_X, f_Y;
(ii) Είναι οι X,Y ανεξάρτητες; Τί μπορείτε να πείτε για τις $\mathbb{E}(X+Y)$, $\mathrm{Var}(X+Y)$, $\mathrm{Cov}(X,Y)$;

Πριν απαντήσουμε στα ερωτήματα, ας ελέγξουμε ότι η $f_{X,Y}$ ικανοποιεί την αναγκαία συνθήκη
$$\iint_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y)\,dxdy = 1.$$
Η $f_{X,Y}$ είναι ταυτοτικά 0 έξω από το τεταρτημόριο $R = (0,+\infty)\times(0,+\infty)$. Άρα
$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y)\,dxdy &= \lambda\iint_R xe^{-x(\lambda+y)}\,dxdy = \lambda\int_0^{+\infty} xe^{-\lambda x}\Big(\int_0^{+\infty} e^{-xy}\,dy\Big)\,dx\\ &= \lambda\int_0^{+\infty} xe^{-\lambda x}\,\frac{1}{x}\,dx = \lambda\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\,dx = 1.\end{aligned}$$

(i) Έχουμε
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy.$$
Αν $x \le 0$, τότε $f_{X,Y}(x,y) = 0$ για κάθε y και άρα
$$f_X(x) = 0.$$
Αν $x > 0$, τότε $f_{X,Y}(x,y) = 0$ για $y \le 0$ και $f_{X,Y}(x,y) = \lambda x e^{-x(\lambda+y)}$ για $y > 0$. Επομένως,
$$f_X(x) = \lambda x e^{-\lambda x}\int_0^{+\infty} e^{-xy}\,dy = \lambda e^{-\lambda x}.$$
Άρα
$$f_X(x) = \begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & \text{αν } x > 0\\ 0, & \text{αν } x \le 0\end{cases}$$
Ομοίως,
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx.$$

Αν $y \leq 0$, τότε $f_{X,Y}(x,y) = 0$ για κάθε x και άρα

$$f_Y(y) = 0.$$

Αν $y > 0$, τότε $f_{X,Y}(x,y) = 0$ για $x \leq 0$ και $f_{X,Y}(x,y) = \lambda x e^{-x(\lambda+y)}$ για $x > 0$. Επομένως,

$$f_Y(y) = \lambda \int_0^{+\infty} x e^{-x(\lambda+y)}\, dx = \frac{\lambda}{(\lambda+y)^2}.$$

Άρα

$$f_Y(y) = \begin{cases} \lambda/(\lambda+y)^2, & \text{αν } y > 0 \\ 0, & \text{αν } y \leq 0 \end{cases}$$

(ii) Εύκολα φαίνεται ότι δεν ισχύει η $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$ και άρα οι X, Y δεν είναι ανεξάρτητες.
Τώρα

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx = \lambda \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x}\, dx = \frac{1}{\lambda}$$

και

$$\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\, dx = \lambda \int_0^{+\infty} \frac{y}{(\lambda+y)^2}\, dy = +\infty.$$

Από τη στιγμή που η $\mathbb{E}(Y)$ δεν είναι αριθμός, λέμε ότι δεν ορίζονται οι ποσότητες $\mathbb{E}(X+Y)$, $\mathrm{Var}(X+Y)$, $\mathrm{Cov}(X,Y)$ που εμπεριέχουν την Y.