Θεωρία Πιθανοτήτων, εαρινό εξάμηνο 2017-18.

Λύσεις ασκήσεων πρώτης προόδου, 28.03.2018.

1. *(i) Αν $P(A) = 1/3$, $P(B) = 1/4$, βρείτε την ελάχιστη δυνατή και την μέγιστη δυνατή τιμή της $P(A \cup B)$. Σε ποιές περιπτώσεις "πιάνονται" αυτές οι τιμές;*
(ii) Αν $P(A) > 0$, $P(B) > 0$ και $P(A|B) = P(A)$, αποδείξτε ότι $P(B|A) = P(B)$.

   (i) Επειδή $A \subseteq A \cup B$ και $B \subseteq A \cup B$, συνεπάγεται $P(A) \leq P(A \cup B)$ και $P(B) \leq P(A \cup B)$. Άρα $P(A \cup B) \geq 1/3$. Η ελάχιστη τιμή $1/3$ "πιάνεται" όταν για παράδειγμα $A = A \cup B$, που ισοδυναμεί με $B \subseteq A$. Από την άλλη μεριά, $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$ και άρα $P(A \cup B) \leq 7/12$. Η μέγιστη τιμή $7/12$ "πιάνεται" όταν τα A, B είναι ξένα, δηλαδή όταν $A \cap B = \emptyset$.
(ii) Από $P(A|B) = P(A)$ συνεπάγεται $\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$ συνεπάγεται $\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B)$ συνεπάγεται $P(B|A) = P(B)$.

2. *Αν $P(X = -1) = 1/4$, $P(X = 0) = 1/2$ και $P(X = 1) = 1/4$, σχεδιάστε την συνάρτηση κατανομής F_X και βρείτε την $\mathbb{E}(X)$ και την $\mathrm{Var}(X)$.*

   Είναι $P(X \in \{-1, 0, 1\}) = P(X = -1) + P(X = 0) + P(X = 1) = 1/4 + 1/2 + 1/4 = 1$. Άρα η X είναι διακριτή τ.μ. με μόνες πιθανές τιμές τις $-1, 0, 1$. Η F_X είναι σταθερή 0 στο διάστημα $(-\infty, -1)$, σταθερή $1/4$ στο διάστημα $[-1, 0)$, σταθερή $3/4$ στο διάστημα $[0, 1)$ και σταθερή 1 στο διάστημα $[1, +\infty)$. Επίσης,

$$\mathbb{E}(X) = (-1)P(X = -1) + 0\,P(X = 0) + 1\,P(X = 1) = 0,$$

$$\mathbb{E}(X^2) = (-1)^2 P(X = -1) + 0^2\,P(X = 0) + 1^2\,P(X = 1) = 1/2,$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 1/2.$$

3. *Δύο άνθρωποι επιλέγουν, ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλον, έναν αριθμό τυχαία και ομοιόμορφα στο διάστημα $[0, 1]$. Ποιά είναι η πιθανότητα ένας από τους δύο αριθμούς να είναι μεγαλύτερος από το τριπλάσιο του άλλου;*

   Έστω x, y οι δύο αριθμοί. Ζητάμε την πιθανότητα του ενδεχομένου: $y > 3x$ ή $x > 3y$.
Το ζευγάρι (x, y) διατρέχει το τετράγωνο $[0, 1] \times [0, 1] = \{(x, y) \,|\, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ στο xy-επίπεδο. Τα ζευγάρια (x, y) που ικανοποιούν την $y > 3x$ διατρέχουν το μέρος του τετραγώνου που βρίσκεται πάνω από την ευθεία με εξίσωση $y = 3x$ και τα ζευγάρια (x, y) που ικανοποιούν την $x > 3y$ διατρέχουν το μέρος του τετραγώνου που βρίσκεται κάτω από την ευθεία με εξίσωση $y = x/3$. Αυτά τα μέρη του τετραγώνου είναι δύο ξένα τρίγωνα με συνολικό εμβαδόν $1/3$. Το τετράγωνο έχει εμβαδόν 1 και επομένως η πιθανότητα που ζητάμε είναι $1/3$.

4. *Ένα δοχείο περιέχει n βώλους αριθμημένους από το 1 έως το n. Επιλέγουμε τυχαία έναν βώλο και, κατόπιν, χωρίς να επανατοποθετήσουμε τον βώλο στο δοχείο, επιλέγουμε πάλι τυχαία έναν βώλο. Αν X είναι ο μεγαλύτερος από τους αριθμούς των δύο βόλων που επιλέξαμε, βρείτε την συνάρτηση κατανομής F_X της τ.μ. X.*

   Έστω X_1 ο αριθμός του πρώτου βώλου και X_2 ο αριθμός του δεύτερου βώλου. Τότε $X = \max\{X_1, X_2\}$. Οι τ.μ. X_1, X_2, X παίρνουν τιμές $1, \ldots, n$. Αν $k = 1, \ldots, n$, τότε το ενδεχόμενο $X \leq k$ με ισοδυναμεί με το: $X_1 \leq k$ και $X_2 \leq k$. Άρα

$$\begin{aligned} F_X(k) &= P(X \leq k) = P(X_1 \leq k \text{ και } X_2 \leq k) = P(X_2 \leq k \,|\, X_1 \leq k) P(X_1 \leq k) \\ &= \frac{k-1}{n-1}\,\frac{k}{n} = \frac{(k-1)k}{(n-1)n}. \end{aligned}$$

Η πιθανότητα $P(X_1 \leq k)$ είναι k/n διότι $X_1 \leq k$ σημαίνει ότι επιλέγεται ένας από τους αριθμούς $1, \ldots, k$ ενώ όλοι οι αριθμοί είναι οι $1, \ldots, n$. Με δεδομένο ότι έχει επιλεγεί ένας από τους αριθμούς $1, \ldots, k$ την πρώτη φορά, έχουν απομείνει στο δοχείο $n-1$ αριθμοί από τους οποίους $k-1$ είναι $\leq k$. Άρα η πιθανότητα $P(X_2 \leq k \mid X_1 \leq k)$ είναι $(k-1)/(n-1)$.

5. *Το δοχείο A περιέχει οκτώ άσπρες και δύο μαύρες μπάλες, ενώ το δοχείο B περιέχει τέσσερις άσπρες και έξι μαύρες μπάλες. Κάποιος επιλέγει το δοχείο A με πιθανότητα $0,4$ και το δοχείο B με πιθανότητα $0,6$. Βγάζουμε από το επιλεγμένο δοχείο (χωρίς να γνωρίζουμε αν είναι το A ή το B) στην τύχη μία άσπρη μπάλα. Βρείτε την πιθανότητα το δοχείο να είναι το A.*

   Αν το επιλεγμένο δοχείο είναι το A, τότε η πιθανότητα να προκύψει άσπρη μπάλα είναι $8/10$. Αν το επιλεγμένο δοχείο είναι το B, τότε η πιθανότητα να προκύψει άσπρη μπάλα είναι $4/10$. Δηλαδή $P(\alpha|A) = 8/10$ και $P(\alpha|B) = 4/10$. Άρα

$$P(A|\alpha) = \frac{P(\alpha|A)P(A)}{P(\alpha|A)P(A) + P(\alpha|B)P(B)} = \frac{\frac{8}{10}\frac{4}{10}}{\frac{8}{10}\frac{4}{10} + \frac{4}{10}\frac{6}{10}} = \frac{32}{56} = \frac{4}{7}.$$

6. *Μία εταιρεία αστικών συγκοινωνιών με στόλο εκατό λεωφορείων αποσύρει καθημερινά λόγω βλάβης κατά μέσο όρο ένα λεωφορείο. Αν κάθε λεωφορείο που παρουσιάζει βλάβη απαιτεί εργασία μίας ημέρας ενός μηχανικού για την επισκευή του, να βρείτε, προσεγγίζοντας με κατάλληλη κατανομή Poisson, πόσους μηχανικούς πρέπει να προσλάβει η εταιρεία ώστε με πιθανότητα τουλάχιστον $0,95$ να υπάρχουν διαθέσιμοι μηχανικοί για τα λεωφορεία που παρουσιάζουν βλάβη. (Προσεγγίστε το e με $2,72$.)*

   Αν X είναι ο αριθμός των λεωφορείων που παρουσιάζουν βλάβη σε μία ημέρα, τότε, επειδή η πιθανότητα να πάθει βλάβη ένα λεωφορείο είναι $1/100$, η τ.μ. X ακολουθεί την δυωνυμική κατανομή με παραμέτρους $n = 100$ και $p = 1/100$. Το p είναι πολύ μικρό σε σχέση με το n και άρα προσεγγίζουμε με την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda = np = 1$. Δηλαδή,

$$P(X = k) = e^{-1}\frac{1^k}{k!} \qquad \text{για } k = 0, 1, 2, \ldots .$$

   Αν προσληφθούν m μηχανικοί, τότε αυτοί θα είναι διαθέσιμοι για το πολύ m χαλασμένα λεωφορεία καθημερινά. Επομένως, πρέπει με πιθανότητα τουλάχιστον $0,95$ ο αριθμός των χαλασμένων λεωφορείων να είναι το πολύ m. Δηλαδή

$$P(X \leq m) \geq 0,95.$$

   Ισοδύναμα,

$$e^{-1}\Big(\frac{1^0}{0!} + \frac{1^1}{1!} + \cdots + \frac{1^m}{m!}\Big) \geq 0,95.$$

   Ισοδύναμα,

$$\frac{1^0}{0!} + \frac{1^1}{1!} + \cdots + \frac{1^m}{m!} \geq 0,95\,e = 2,584.$$

   Το αριστερό μέρος: όταν $m = 0$ έχει τιμή 1, όταν $m = 1$ έχει τιμή 2, όταν $m = 2$ έχει τιμή $2,5$ και όταν $m = 3$ έχει τιμή $> 2,66$. Άρα πρέπει να προσληφθούν τουλάχιστον τρεις μηχανικοί.

7. *Έστω ακολουθία ανεξάρτητων δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p και αποτυχίας $1-p$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε X_n να είναι το πλήθος των αποτυχιών μέχρι την n επιτυχία. Γνωρίζουμε ότι η τ.μ. X_1 ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή με παράμετρο p. Ποιά κατανομή ακολουθεί η τ.μ. $X_{n+1} - X_n$;*

   Το ενδεχόμενο $X_1 = k$ σημαίνει ότι έχουμε k αποτυχίες στη σειρά και, αμέσως μετά, μία επιτυχία. Άρα

$$P(X_1 = k) = (1-p)^k p$$

για $k = 0, 1, 2, \ldots$.
Το ενδεχόμενο $X_n = m$ σημαίνει ότι έχουμε m αποτυχίες και $n-1$ επιτυχίες (σε οποιαδήποτε διάταξη) στις πρώτες $m+n-1$ δοκιμές και, αμέσως μετά, την n επιτυχία. Άρα

$$P(X_n = m) = \binom{m+n-1}{m}(1-p)^m p^{n-1} p = \binom{m+n-1}{m}(1-p)^m p^n$$

για $m = 0, 1, 2, \ldots$.
Ονομάζουμε $Y = X_{n+1} - X_n$. Τότε το ενδεχόμενο $Y = k$ σημαίνει ότι μετά την n επιτυχία έχουμε k αποτυχίες στη σειρά και, αμέσως μετά, την $n+1$ επιτυχία. Άρα το ενδεχόμενο $Y = k$ και $X_n = m$ σημαίνει ότι έχουμε m αποτυχίες και $n-1$ επιτυχίες (σε οποιαδήποτε διάταξη) στις πρώτες $m+n-1$ δοκιμές και, αμέσως μετά, την n επιτυχία και, αμέσως μετά, k αποτυχίες στη σειρά και, αμέσως μετά, την $n+1$ επιτυχία. Άρα

$$\begin{aligned} P(Y = k \text{ και } X_n = m) &= \binom{m+n-1}{m}(1-p)^m p^{n-1} p (1-p)^k p \\ &= \binom{m+n-1}{m}(1-p)^{m+k} p^{n+1} \\ &= (1-p)^k p \, P(X_n = m). \end{aligned}$$

για $k, m = 0, 1, 2, \ldots$.
Άρα

$$P(Y = k) = \sum_{m=0}^{+\infty} P(Y = k \text{ και } X_n = m) = (1-p)^k p \sum_{m=0}^{+\infty} P(X_n = m) = (1-p)^k p$$

διότι $\sum_{m=0}^{+\infty} P(X_n = m) = 1$.
Άρα η Y ακολουθεί την ίδια κατανομή με την X_1, δηλαδή την γεωμετρική με παράμετρο p.