Τίτλος: Ένα νέο ερευνητικό πρόγραμμα στη Μιγαδική Ανάλυση μίας, πολλών ή και απείρων μεταβλητών και στη μη Γραμμική Συναρτησιακή Ανάλυση.

Ομιλητής: Βασίλης Νεστορίδης, ΕΚΠΑ

Περίληψη

Έστω X ένας χώρος ολομόρφων συναρτήσεων σε ένα τόπο Ω στη μία ή πολλές μιγαδικές μεταβλητές. Για τους πιο πολλούς γνωστούς χώρους X ισχύει το ακόλουθο: Αν για κάθε μικρό εξόγκωμα V του Ω υπάρχει μία συνάρτηση στο X (εξαρτώμενη από το V) που δεν επεκτείνεται ολόμορφα στο V, τότε υπάρχει και μία συνάρτηση f στο X που δεν επεκτείνεται σε κανένα V. Δηλαδή το Ω είναι X - τόπος ολομορφίας. Ακόμη, το σύνολο των συναρτήσεων f με την προηγούμενη ιδιότητα είναι G_δ - πυκνό στην τοπολογία του X. Ένα παρόμοιο φαινόμενο ισχύει για συναρτήσεις στο X ολικά μη φραγμένες στο σύνορο του Ω.

Ένα πρώτο ανοικτό θέμα είναι αν το σύνολο αυτών των συναρτήσεων f περιέχει ένα πυκνό στο X διανυσματικό υπόχωρο (εκτός του μηδενός) ή ένα απειροδιάστατο κλειστό υπόχωρο στο X(εκτός του μηδενός). Ακόμα, ένα άλλο ανοικτό θέμα είναι η μεταφορά των προηγούμενων αποτελεσμάτων σε απειροδιάστατη ολομορφία.

Οι περισσότεροι χώροι $X = X(\Omega)$ ορίζονται από μία ιδιότητα που απαιτείται όταν πλησιάζουμε ολόκληρο το σύνορο του Ω, όπως π.χ. ο χώρος $A^p(\Omega)$, ο οποίος περιέχει όλες τις ολόμορφες συναρτήσεις στο Ω που οι πρώτες $p+1$ παράγωγοι τους επεικτείνονται συνεχώς σε όλο το σύνορο του Ω. Οι χώροι αυτοί μπορούν να γενικευτούν, απαιτώντας η ιδιότητα αυτή να ισχύει όταν πλησιάζουμε ένα τμήμα μόνο του συνόρου του Ω κι αυτό στη μία ή στις πολλές μιγαδικές μεταβλητές. Τότε τίθεται το ερώτημα ποιά είναι η φυσιολογική τοπολογία του χώρου, αν έχουμε πλήρη μετρικό χώρο ώστε το θεώρημα του Baire να μπορεί να εφαρμοστεί κι αν τα προηγούμενα generic αποτελέσματα, καθώς και άλλα, μπορούν να επεκταθούν σε αυτούς τους νέους χώρους. Τέτοιοι νέοι χώροι μπορούν να οριστούν και κατ' αναλογία των χώρων A^p, H^∞_p, χώρων Bergman, Hardy, Bloch, BMOA, κλάσης Nevanlinna κι άλλων. Generic πουθενά διαφορίσιμες συναρτήσεις μπορούν να οριστούν στη γενίκευση του χώρου $A(\Omega) = A^0(\Omega)$ καθώς και στους χώρους $A^p(\Omega)$ για την $p+1$ παράγωγο. Ακόμη, αν ένας τόπος Jordan Ω περιέχει στο σύνορό του ένα μη τετριμμένο συνεκτικό τμήμα με πεπερασμένο μήκος και ϕ είναι μία συνάρτηση του Riemann από τον ανοικτό δίσκο επί του Ω, τότε η παράγωγος ϕ' ανήκει στη νέα κλάση του Hardy H^1 όταν πλησιάζουμε ένα τόξο της μοναδιαίας περιφέρειας. Ποιές οι ιδιότητες των συναρτήσεων σε αυτούς τους νέους χώρους Hardy; Πως αυτά μεταφέρονται

σε άλλους τόπους πλην του δίσκου στη μία, στις πολλές ή και άπειρες μιγαδικές μεταβλητές; Ανάλογα μπορούν να οριστούν νέοι χώροι Bergman κ.τ.λ.

Αυτά είναι ένα νέο πρόγραμμα έρευνας στη Μιγαδική Ανάλυση συνδεόμενη με μη Γραμμική Συναρτησιακή Ανάλυση και θα παρουσιαστεί σε κεντρική ομιλία σε διεθνές συνέδριο μη Γραμμικής Συναρτησιακής Ανάλυσης στη Valencia της Ισπανίας τον Οκτώβριο του 2017.