

Ομιλίες για τα
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ 2007

1. Imre Ruzsa

Topology and the integers

A familiar theorem of Steinhaus says that the difference set of a set of positive measure (on the line) is a neighbourhood of 0. We try to find the analog of this result for the integers.

First, what takes the place of measure? Some form of density can. We overview several concepts of density; none of them is “the best”.

What takes the place of a neighbourhood (or of an interval)? The most usual topology on the integers is the discrete one, which tells us nothing. There are better ones, which yield a compactification; I will mention some, and argue that (for several applications) the Bohr topology is the most natural one.

So we have a natural candidate for a discrete Steinhaus theorem:

“The difference set of a set having positive density is a neighbourhood of 0 in the Bohr topology.”

This is still not the happy ending. For the simplest choice, the asymptotic density, this is known to fail. We will tell some weaker statements that are true. For another choice, the Banach density, this is unknown.

A couple more differences between the integers and reals. In the reals, we know that sets that are not measurable exist, but we never meet them; for the integers, a simple set like those whose first digit is 1 does not have a density. In the reals, a measurable set is somewhere very dense (this is the reason for Steinhaus’ theorem), and a set of integers does not have this property.

The conclusion is that, despite their seeming simplicity, the integers are more complicated than the reals.

2. Μιχάλης Ανούσης

Αναπαραστάσεις ομάδων και μη αυτοσυζυγείς άλγεβρες τελεστών

Στην ομιλία αυτή θα παρουσιάσουμε ορισμένες μη αυτοσυζυγείς άλγεβρες τελεστών οι οποίες προκύπτουν από την θεωρία αναπαραστάσεων ομάδων. Θα συζητηθούν θέματα σχετικά με τον σύνδεσμο των αναλλοίωτων υποχώρων των αλγεβρών αυτών, την ανακλαστικότητα τους, το ριζικό τους, την C^* -θήκη τους. Επίσης θα συζητηθεί το πρόβλημα ταξινόμησης τους.

3. Δημήτριος Απατσιίδης

Η δομή των υποχώρων του χώρου V_2^0 με μη διαχωρίσιμο δυϊκό

4. Αλέξανδρος Αρβανιτάκης

Talagrand’s $K_\sigma\delta$ problem

5. Δημήτρης Γατζούρας

Μελέτη Τυχαίων Περιπάτων σε Ομάδες μέσω του (μη μεταθετικού) Μετασχηματισμού Fourier

Πολλά από τα αποτελέσματα για τυχαίους περιπάτους στον \mathbb{R}^n ή τον \mathbb{Z}^n (αλλά και γενικότερα της κλασικής θεωρίας πιθανοτήτων) αποδεικνύονται με χρήση αρμονικής ανάλυσης, δηλαδή με χρήση του μετασχηματισμού Fourier (π.χ. το κεντρικό οριακό θεώρημα). Μη μεταθετική αρμονική ανάλυση έχει χρησιμοποιηθεί και για μελέτη τυχαίων περιπάτων σε μη μεταθετικές ομάδες, αλλά σαφώς σε πολύ πιο περιορισμένη κλίμακα. Θα δώσουμε έναν τύπο «φασματικής ακτίνας», που συνδέει τις συνελιξίες $\mu^n := \mu * \dots * \mu$ ενός μέτρου με τον μετασχηματισμό Fourier του μέτρου, που ξέρουμε ότι ισχύει για κάποιες ομάδες (αβελιανές, συμπαγείς, και ημιευθέα γινόμενα συμπαγών επί αβελιανών), και θα περιγράψουμε πως από αυτόν τον τύπο μπορεί να πάρει κανείς κάποια αποτελέσματα για τυχαίους περιπάτους στις ομάδες αυτές. Παραμένει ανοικτό αν αυτός ο «τύπος φασματικής ακτίνας» και τα αποτελέσματα για τυχαίους περιπάτους που θα αναφέρουμε ισχύουν και σε γενικότερες ή άλλες ομάδες.

6. Απόστολος Γιαννόπουλος

Εμφυτεύσεις υποχώρων του L_p στον ℓ_r^n

Θα προσπαθήσουμε να περιγράψουμε τη χρήση της πιθανοθεωρητικής μεθόδου στη γεωμετρική συναρτησιακή ανάλυση μέσα από κάποια κλασικά προβλήματα εμφυτεύσεων:

(α) Έστω X ένας k -διάστατος υπόχωρος του L_p , $p \geq 1$ και έστω $\varepsilon > 0$. Ποιός είναι ο μικρότερος n για τον οποίο υπάρχουν k -διάστατος υπόχωρος Y του ℓ_p^n και ισομορφισμός $T : X \rightarrow Y$ ώστε $\|T\| \cdot \|T^{-1}\| \leq 1 + \varepsilon$;

(β) Έστω $X = \ell_p^k$, $1 < p < 2$ και έστω $\varepsilon > 0$. Ποιός είναι ο μικρότερος n για τον οποίο υπάρχουν k -διάστατος υπόχωρος Y του ℓ_1^n και ισομορφισμός $T : \ell_p^k \rightarrow Y$ ώστε $\|T\| \cdot \|T^{-1}\| \leq 1 + \varepsilon$;

(γ) Είναι σωστό ότι για κάθε $1 < p < 2$ και για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $C(p, \delta) > 0$ ώστε: αν $n \geq (1 + \delta)k$ τότε υπάρχουν k -διάστατος υπόχωρος Y του ℓ_1^n και ισομορφισμός $T : \ell_p^k \rightarrow Y$ ώστε $\|T\| \cdot \|T^{-1}\| \leq C(p, \delta)$;

Τα περισσότερα από αυτά τα προβλήματα παραμένουν ανοικτά, όμως οι γνωστές εκτιμήσεις είναι «εντυπωσιακά ισχυρές» και «σχεδόν βέλτιστες».

7. Βασίλης Γρηγοριάδης

Η σχέση της effective Συνολοθεωρίας με την Ανάλυση

8. Νίκος Δαφνής

Αντιστρεψιμότητα τυχαίων πινάκων

Έστω $A = (\xi_{ij})$ ένας τυχαίος $n \times n$ πίνακας, όπου ξ_{ij} ανεξάρτητες υποκανονικές τ.μ. με μέση τιμή 0 και διασπορά 1 (τυπικό παράδειγμα είναι οι τυχαίοι ± 1 πίνακες). Θα περιγράψουμε ένα πρόσφατο αποτέλεσμα των M. Rudelson και R. Vershynin που δίνει ακριβή εκτίμηση της πιθανότητας να είναι μη αντιστρέψιμος ο A και, επιπλέον, της πιθανότητας η νόρμα του A^{-1} να είναι μεγάλη: για κάθε $\varepsilon \geq 0$ ισχύει

$$\mathbb{P} \left(\|A^{-1}\| \geq \frac{\sqrt{n}}{\varepsilon} \right) \leq C\varepsilon + \exp(-cn).$$

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε σε σχετικά ανοικτά προβλήματα.

9. Βασίλης Κανελλόπουλος

Θεωρία Ramsey για δένδρα και εφαρμογές στην Τοπολογία και στην Συναρτησιακή Ανάλυση

Θα παρουσιάσουμε καταταρχάς κάποια συνδυαστικά αποτελέσματα που αφορούν χρωματισμούς αλυσίδων και αντιαλυσίδων του δυαδικού δένδρου και στην συνέχεια θα δώσουμε εφαρμογές αυτών. Η πρώτη αφορά μια ταξινόμηση των διαχωρίσιμων συμπαγών υποσυνόλων της πρώτης κλάσης του Baire όπου αποδεικνύεται ότι υπάρχουν ακριβώς 7 πρωτότυπα. Η δεύτερη αφορά τη γεωμετρία των διαχωρίσιμων χώρων Banach με μη διαχωρίσιμο συζυγή, όπου αποδεικνύεται η ύπαρξη μιας ‘μεγάλης’ unconditional βασικής οικογένειας στον δεύτερο συζυγή. Αυτό όπως θα δούμε λύνει καταφατικά το πρόβλημα του ‘διαχωρίσιμου πηλίκου’ για συζυγείς χώρους Banach. Σχετιζόμενα προβλήματα θα συζητηθούν περαιτέρω.

Τα παραπάνω είναι αποτελέσματα κοινής συνεργασίας με τον Σ. Α. Αργυρό και τον Π. Δοδό.

10. Μανόλης Κατσοπρινάκης

Πρόσφατες εξελίξεις σε ανοικτά προβλήματα της Γεωμετρίας των Πολυωνύμων

11. Μιχάλης Κολουντζάκης

Κάλυψη του επιπέδου με περιστροφές περιοδικών συνόλων

Έστω E το υποσύνολο του επιπέδου που ορίζεται ως όλα τα σημεία των οποίων η απόσταση από το σύνολο $\mathbb{Z}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Z}\}$ είναι το πολύ ϵ . Θα εξετάσουμε το πρόβλημα του πότε μπορούν κάποιες περιστροφές του συνόλου E γύρω από το 0 να καλύψουν όλο το επίπεδο, εκτός φυσικά από ένα φραγμένο κομμάτι. Για παράδειγμα, είναι πολύ εύκολο να δείξει κανείς ότι αν πάρουμε την ένωση όλων των περιστροφών του E γύρω από το 0 τότε καλύπτεται όλο το επίπεδο εκτός από μια γειτονιά του 0. Δεν είναι τόσο απλό να δει κανείς ότι αρκεί να περιστρέψουμε το E για όλες τις γωνίες στο διάστημα $(0, \delta)$, για οποιοδήποτε θετικό δ . Θα αναφέρουμε διάφορα ανοιχτά προβλήματα σχετικά με αυτό το θέμα. ([Άρθρο εδώ.](#))

12. Ιωάννα Κυρέζη

Μονοτονία αθροισμάτων Darboux

13. Γιώργος Κωστάκης

How complicated can be the dynamics of a linear operator?

14. Μιχάλης Μαριάς

Αρμονική ανάλυση και γεωμετρία

Θα παρουσιάσουμε ορισμένα κλασικά αποτελέσματα (Μετασχηματισμοί Riesz, Θεώρημα πολλαπλασιαστών Hörmander-Miklin) της Αρμονικής ανάλυσης στον \mathbb{R}^n , σε διάφορα γεωμετρικά πλαίσια, όπως Ρημάνιες πολλαπλότητες με θετική ή αρνητική καμπυλότητα ή διακριτά γραφήματα, και θα συζητήσουμε ορισμένα ανοιχτά προβλήματα.

15. Θέμης Μήτσης

Σφαιρικοί μέσοι και αυθαίρετα μέτρα

16. Αθανασία Μπαχάρογλου

Universal Taylor series on doubly connected domains

We strengthen a result of Melas concerning universal Taylor series on an unbounded doubly connected domain in \mathbb{C} which is the complement of a compact connected set. The universal approximation is also valid on the boundary, it holds for the derivatives of every order and the universal function vanishes at ∞ . Furthermore, we prove that the universal approximation can be valid both sides on the boundary under conditions. In our results we obtain topological and algebraic genericity.

17. Δημήτρης Μπετσάκος

Τρία προβλήματα για την υπερβολική μετρική σε τόπους τού μιγαδικού επιπέδου

Πρώτα θα κάνουμε μιά μικρή εισαγωγή για το ρόλο της υπερβολικής μετρικής στη μιγαδική ανάλυση. Στη συνέχεια θα διαφημίσουμε δύο παλιά προβλήματα: το πρόβλημα της αμφιμονότιμης σταθεράς τού Bloch και το πρόβλημα τής βέλτιστης σταθεράς στην ανισότητα των Gehring-Hayman. Τέλος θα ασχοληθούμε με ένα πρόσφατο πρόβλημα που τέθηκε από τους Gardiner και Lakic. Στο πρόβλημα αυτό ζητείται η βέλτιστη σταθερά σε μιά ανισότητα που συνδέει την υπερβολική μετρική ενός τόπου D με την υπερβολική μετρική ενός άλλου τόπου που έχει συμπλήρωμα τρία σημεία στο σύνορο τού D .

18. Μιχάλης Παπαδημητράκης

Σύνολα υποστάθμης πολυωνύμων

19. Κώστας Πούλιος

Ιδιότητα σταθερού σημείου στο χώρο δένδρου του James

Έστω X ένας πλήρης χώρος με νόρμα. Λέμε ότι ο Q έχει την ιδιότητα σταθερού σημείου αν για κάθε $K \subset Q$ κυρτό και w -συμπαγές και για κάθε $T : K \rightarrow K$ ώστε $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\| \quad \forall x, y \in K$, η T έχει (τουλάχιστον ένα) σταθερό σημείο. Το γενικό πρόβλημα είναι ο 'χαρακτηρισμός' των χώρων Q που έχουν την συγκεκριμένη ιδιότητα. Στην ομιλία αυτή, αφού αναφέρουμε επιγραμματικά ορισμένα βασικά αποτελέσματα, θα περιγράψουμε την απόδειξη ότι ο χώρος δέντρου του James έχει την ιδιότητα σταθερού σημείου.

20. Θεοχάρης Ραϊκόφτσαλης

Χώροι Banach με μοναδική μη τετριμμένη διάσπαση

21. Νίκος Στυλιανόπουλος

Orthogonal Polynomials in the Complex Plane

22. Νικόλαος Τσιρίβας

Ένα παραδειγμα των Καθολικών σειρών Taylor με βαρη

Στα γνωστά προσεγγιστικά θεωρήματα τυπου Runge ή Mergelyan δεν επιτυγχανεται ελεγχος του βαθμου του πολυωνυμου που υλοποιει την προσεγγιση. Εμεις κατασκευαζουμε μια ακολουθια πολυωνυμων P_n ωστε σε δυο συγκεκριμενους δισκους D_1, D_2 να ικανοποιουν οτι 1) Η ακολουθια $(\deg P_n)P_n$ να συγκλινει ομοιομορφα στο 0 στον δισκο D_1 και 2) Η ακολουθια P_n να συγκλινει

ομοιομορφα στο 1 στον δισκο D_2 . Ακομα $\deg P_n = 2^n$. Χρησιμοποιουμε το προηγουμενο προσεγγιστικο αποτελεσμα για να δωσουμε μη τετριμμενο παραδειγμα υπαρξης καθολικων σειρων Taylor με βαρη σε σχεση με προσφατη εργασια του Δ. Χατζηλουκα επεκτεταμενης αφηρημενης θεωριας καθολικων σειρων.

23. Στάθης Φίλιππας

Ανισότητες Hardy-Sobolev, ανισότητες Harnack και εκτιμήσεις πυρήνων θερμότητας

24. Ανέστης Φωτιάδης

Harmonic Maps Between Negatively Curved Manifolds

Firstly, I am going to define what a harmonic map between manifolds is and give some examples. Next I will state some known results providing the existence of a harmonic map, and give the general idea of their proof. Finally, some open problems will be given.