

Απειροστικός Λογισμός Ι, χειμερινό εξάμηνο 2018-19.

Πρώτο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Για καθεμία από τις ανισότητες $|x+1| > 2$, $|x-1| \leq |x+1|$, $\frac{x}{x+2} > \frac{x+3}{3x+1}$, $\frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2} \leq 0$ γράψτε ως διάστημα ή ως ένωση διαστημάτων το σύνολο των x για τα οποία αυτή είναι αληθής.
2. Λύστε τις εξισώσεις $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cot x = -1$, $\tan x = -\sqrt{3}$.
3. Αποδείξτε ότι $\cos x = \frac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}$ και $\sin x \sin y = \frac{1}{2} \cos(x-y) - \frac{1}{2} \cos(x+y)$.
4. Βρείτε τα πεδία ορισμού και τα σύνολα τιμών των συναρτήσεων $y = \frac{2x-1}{x+4}$, $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$, $y = \log_{10} x + 4$, $y = e^{2x} + 2e^x + 3$.
5. Έστω αριθμοί a, b, c με $a \neq 0$. Βάσει του γραφήματος της $y = x^2$, περιγράψτε μέθοδο σχεδίασης του γραφήματος της $y = ax^2 + bx + c$. Σε ποιά περίπτωση είναι η συνάρτηση άνω φραγμένη και σε ποιά περίπτωση είναι κάτω φραγμένη στο $(-\infty, +\infty)$; Ποιό είναι το σύνολο τιμών της; (Υπόδειξη: Γράψτε $ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}$.) Ειδικότερα, σχεδιάστε το γράφημα της $y = -4x^2 + 4x - 7$ και από αυτό να διακρίνετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης, το σύνολο τιμών της, τα διαστήματα μονοτονίας της και τα αντίστοιχα σύνολα τιμών.
6. Έστω αριθμοί a, b, c, d με $c \neq 0$. Βάσει του γραφήματος της $y = \frac{1}{x}$, περιγράψτε μέθοδο σχεδίασης του γραφήματος της $y = \frac{ax+b}{cx+d}$. (Υπόδειξη: Γράψτε $\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{(a/c)(cx+d)+b-(ad/c)}{cx+d} = \frac{bc-ad}{c^2} \frac{1}{x+(d/c)} + \frac{a}{c}$.) Ειδικότερα, σχεδιάστε το γράφημα της $y = \frac{2x+3}{3x-1}$ και από αυτό να διακρίνετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης, το σύνολο τιμών της, τα διαστήματα μονοτονίας της και τα αντίστοιχα σύνολα τιμών.
7. Θεωρήστε την $y = \frac{1}{3x+1}$. Βρείτε το πεδίο ορισμού, το σύνολο τιμών και τα διαστήματα μονοτονίας της και σχεδιάστε το γράφημά της. Βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση, καθώς και το πεδίο ορισμού, το σύνολο τιμών και τα διαστήματα μονοτονίας της και σχεδιάστε το γράφημά της.
8. Θεωρήστε την $y = x^2 + 4x + 1$. Βρείτε το πεδίο ορισμού, το σύνολο τιμών και τα διαστήματα μονοτονίας της και σχεδιάστε το γράφημά της. Ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση; Χωρίζοντας το πεδίο ορισμού σε διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης, “μοιράστε” την σε γνησίως μονότονες συναρτήσεις, βρείτε τις αντίστροφες συναρτήσεις τους, τα πεδία ορισμού τους και τα σύνολα τιμών τους και σχεδιάστε τα γραφήματά τους.
9. Βάσει των γραφημάτων των $y = \frac{1}{x^3}$, $y = \frac{1}{x^4}$, σχεδιάστε τα γραφήματα των $y = 4 - \frac{1}{(x-2)^3}$, $y = -\frac{3}{(2x+1)^4} + 2$. Από τα γραφήματα να διακρίνετε τα πεδία ορισμού, τα σύνολα τιμών, τα διαστήματα μονοτονίας και τα αντίστοιχα σύνολα τιμών.
10. Βάσει των γραφημάτων των $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[5]{x}$, σχεδιάστε τα γραφήματα των $y = \sqrt{x-1}$, $y = \sqrt[5]{3-x} - 1$. Ποιά είναι τα πεδία ορισμού και τα σύνολα τιμών τους;
11. Σχεδιάστε στο ίδιο σχήμα τα γραφήματα των $y = x^{2/3}$, $y = x^{-2/3}$, $y = x^{3/2}$, $y = x^{-3/2}$, $y = x^{\sqrt{2}}$, $y = x^{-\sqrt{2}}$.
12. Δείτε την άσκηση 1.4.4 και σχεδιάστε το γράφημα της $y = \sqrt{3} \cos x + \sin x$.
13. Βρείτε τα πεδία ορισμού και τα σύνολα τιμών των $y = \sqrt{\sin x}$, $y = \frac{1}{1+\sin x}$.
14. Συμβουλευόμενοι τις ασκήσεις 3.9.6 και 3.9.7, σχεδιάστε τα γραφήματα των $y = \sqrt{x} \sin x$, $y = x \sin \frac{1}{x}$.