

Απειροστικός Λογισμός I, χειμερινό εξάμηνο 2018-19.

Ενδέκατο φυλλάδιο ασκήσεων.

- (i) Βρείτε μία παράγουσα της $2x + \frac{1}{x}$ στο $(0, +\infty)$. Ποιές είναι όλες οι παράγουσες της $2x + \frac{1}{x}$ στο $(0, +\infty)$;

(ii) Βρείτε μία παράγουσα της $2x + \frac{1}{x}$ στο $(0, +\infty)$ ώστε η τιμή της στο $x = 1$ να είναι -3 . Πόσες τέτοιες παράγουσες υπάρχουν;
2. Αποδείξτε ότι η $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{αν } x < 0 \\ 1, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$ δεν έχει παράγουσα στο $(-\infty, +\infty)$.
3. (i) Βρείτε ένα αόριστο ολοκλήρωμα της $1 - \sin x$ στο $(-\infty, +\infty)$. Ποιά είναι όλα τα αόριστα ολοκληρώματα της $1 - \sin x$ στο $(-\infty, +\infty)$; Με άλλα λόγια, ποιά είναι το $\int (1 - \sin x) dx$;

(ii) Βρείτε ένα αόριστο ολοκλήρωμα της $1 - \sin x$ στο $(-\infty, +\infty)$ ώστε η τιμή του στο $x = \pi$ να είναι -1 . Πόσα τέτοια αόριστα ολοκληρώματα υπάρχουν;
4. Έστω $\int f(x) dx = \int g(x) dx + x^2 + 3 + \sin x$. Με τί είναι ίση η παράσταση $\int f(x) dx - \int g(x) dx$;
5. Βρείτε συνεχή συνάρτηση f στο $(-\infty, +\infty)$ και αριθμό a ώστε να ισχύει $\int_a^x f(t) dt = 3x^2 - 12$ για κάθε x . Πόσες λύσεις υπάρχουν;
6. Υπάρχει συνεχής συνάρτηση f στο $(-\infty, +\infty)$ ώστε να ισχύει $\int_0^x f(t) dt = \cos x$ για κάθε x ; Ίδια ερώτηση για την $\int_0^x f(t) dt = \cos x - 1$.
7. Έστω f ορισμένη στο διάστημα I και ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I . Επίσης, έστω g, h ορισμένες στο σύνολο A με τιμές στο I και η συνάρτηση F με τύπο

$$F(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t) dt \quad \text{για } x \in A.$$

- (i) Αν οι g, h είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 \in A$ και η f συνεχής στα $g(x_0)$ και $h(x_0)$, αποδείξτε ότι η F είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $F'(x_0) = g'(x_0)f(g(x_0)) - h'(x_0)f(h(x_0))$.

(ii) Βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων

$$\int_1^{x^2-x} \frac{t^2-2t}{e^t+2t^2} dt, \quad \int_x^{x^2} \frac{e^t}{t} dt$$

και τις παραγώγους τους.

8. Αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt = 0$.
9. Βρείτε $a > 0$ και b ώστε $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^x - b - cx - dx^2} \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}} dt = 1$.
10. Αποδείξτε τις παρακάτω ιδιότητες με κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής.

 - (i) $\int_{a+c}^{b+c} f(x-c) dx = \int_a^b f(x) dx$.
 - (ii) $\int_{\lambda a}^{\lambda b} f\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$ για κάθε $\lambda > 0$.

Μελετήστε το γεωμετρικό περιεχόμενο αυτών των ιδιοτήτων, θεωρώντας επιπλέον ότι ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.
- (i) Αν η $f : [-b, -a] \cup [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι άρτια αποδείξτε ότι $\int_{-b}^{-a} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$.
 - (ii) Αν η $f : [-b, -a] \cup [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι περιττή αποδείξτε ότι $\int_{-b}^{-a} f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$.
 - (iii) Αν η $f : [-b, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι άρτια αποδείξτε ότι $\int_{-b}^b f(x) dx = 2 \int_0^b f(x) dx$.
 - (iv) Αν η $f : [-b, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι περιττή αποδείξτε ότι $\int_{-b}^b f(x) dx = 0$.

Ποιά είναι το γεωμετρικό περιεχόμενο αυτών των ιδιοτήτων;

12. Αν η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι περιοδική με περίοδο $T > 0$ αποδείξτε ότι:

(i) $\int_{a+T}^{b+T} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$

(ii) $\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_b^{b+T} f(x) dx.$

Ποιό είναι το γεωμετρικό περιεχόμενο αυτών των ιδιοτήτων;

13. Με αλλαγές μεταβλητής βρείτε τα:

$$\begin{aligned} & \int x^3 \cos(x^4) dx, \quad \int \cos^2 x \sin x dx, \quad \int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx, \quad \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx, \\ & \int \sqrt{2x+1} dx, \quad \int x\sqrt{x+1} dx, \quad \int x^2\sqrt{2x+1} dx, \quad \int \frac{x}{\sqrt{1-x}} dx, \\ & \int \frac{x+1}{(x^2+2x+5)^2} dx, \quad \int \frac{\sin x + \cos x}{(\sin x - \cos x)^3} dx, \quad \int \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx, \quad \int x\sqrt[3]{x-1} dx, \\ & \int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^6}} dx, \quad \int \sqrt{4-\sin x} \cos x dx, \quad \int \frac{\sin x}{(2+\cos x)^3} dx, \quad \int \frac{\cos^3 x}{\sin x} dx, \\ & \int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx, \quad \int x^2 e^{x^3} dx, \quad \int e^{3\sin x} \cos x dx, \quad \int \tan x dx, \\ & \int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx, \quad \int \sqrt{1+3\cos^2 x} \sin(2x) dx, \quad \int \frac{1}{1+e^x} dx, \quad \int \sin^3 x dx, \\ & \int \sin^4 x dx, \quad \int \frac{1}{x(x^4+1)} dx, \quad \int \frac{\log x}{x\sqrt{1+\log x}} dx, \quad \int \frac{\arctan \sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}} dx, \\ & \int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx, \quad \int \frac{1}{4+x^2} dx, \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x-x^2}} dx, \quad \int \frac{1}{x^2-x+2} dx, \\ & \int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx, \quad \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad \int \frac{1}{1+\cos x} dx, \quad \int \frac{1}{2+\cos^2 x} dx. \end{aligned}$$

14. Με ολοκληρώσεις κατά μέρη και αλλαγές μεταβλητής βρείτε τα:

$$\begin{aligned} & \int e^{-2x} \sin(3x) dx, \quad \int x^3 e^{2x} dx, \quad \int x^3 e^{-x^2} dx, \quad \int e^{\sqrt{x}} dx, \\ & \int x^2 \sin x dx, \quad \int x \log x dx, \quad \int x^2 \log^4 x dx, \quad \int \arcsin x dx, \\ & \int \arctan x dx, \quad \int x^2 \arcsin x dx, \quad \int x \arctan^2 x dx, \quad \int \arctan \sqrt{x} dx, \\ & \int \cos^2 x dx, \quad \int \sin^4 x dx, \quad \int \frac{x}{\cos^2 x} dx, \quad \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx, \\ & \int \frac{\arctan(e^x)}{e^x} dx, \quad \int \frac{x e^{\arctan x}}{(x^2+1)^{3/2}} dx, \quad \int \log(x + \sqrt{1+x^2}) dx. \end{aligned}$$

15. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων:

$$\begin{aligned} & \int \frac{5x+3}{x^2+2x-3} dx, \quad \int \frac{x+2}{x^2-4x+4} dx, \quad \int \frac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x} dx, \quad \int \frac{x^2+2x+3}{x^3+x^2-x-1} dx, \\ & \int \frac{3x^2+2x-2}{x^3-1} dx, \quad \int \frac{x^2+1}{(2x-1)^3} dx, \quad \int \frac{1}{x^4-1} dx, \quad \int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4} dx, \\ & \int \frac{1}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)} dx, \quad \int \frac{8x^3+7}{x^4+2x^3-2x-1} dx, \quad \int \frac{1}{x^4-2x^2+1} dx, \\ & \int \frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2} dx, \quad \int \frac{1}{x^4+1} dx, \quad \int \frac{1}{x^5+1} dx, \quad \int \frac{1}{x^6+1} dx. \end{aligned}$$

16. Βρείτε τα ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων των $\sin x$ και $\cos x$:

$$\int \frac{1}{(1+\cos x)^2} dx, \quad \int \frac{1}{1+2\sin x} dx, \quad \int \frac{1}{5+3\cos x} dx, \quad \int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x} dx, \quad \int \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x} dx.$$

17. Βρείτε τα ολοκληρώματα:

$$\begin{aligned} & \int \sqrt{x^2-1} dx, \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx, \quad \int \sqrt{1-x^2} dx, \quad \int \sqrt{x^2+1} dx, \\ & \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx, \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2-x-2}} dx, \quad \int \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}} dx. \end{aligned}$$