Απειροστικός Λογισμός Ι, χειμερινό εξάμηνο 2018-19.

Τρίτο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς των ορίων, δηλαδή παίρνοντας $M > 0$ και υπολογίζοντας το κατάλληλο $n_0 \in \mathbb{N}$ συναρτήσει του M, όπως στα παραδείγματα, αποδείξτε ότι

$$(5/3)^n \to +\infty, \quad n^2 + (-1)^n n \to +\infty, \quad \tfrac{n^3+1}{n+1} \to +\infty, \quad n(2+\cos n) \to +\infty.$$

2. Διερευνήστε την ύπαρξη και την τιμή του ορίου $\lim_{n\to+\infty} \frac{(1+x)^n}{(1-x)^n}$ ανάλογα με την τιμή της παραμέτρου x.

3. Χρησιμοποιώντας ιδιότητες των ορίων, αποδείξτε ότι

$$\left(\tfrac{1}{n} + (-1)^n n\right)^4 \to +\infty, \quad \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{(-1)^n}{2}\right)^n \to 0, \quad \tfrac{2}{3} + \tfrac{2^2}{3^2} + \cdots + \tfrac{2^n}{3^n} \to 2.$$

4. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχουν τα όρια των ακολουθιών με τους εξής n-οστούς όρους:

$$\tfrac{1+(-1)^n(n+2)}{3n}, \quad 3^{(-1)^n}, \quad 3^{(-1)^n n}, \quad \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{2(-1)^n}{3}\right)^n.$$

5. (i) Βρείτε (x_n), (y_n) οι οποίες δεν έχουν όριο ώστε η $(x_n + y_n)$ να έχει όριο.
   (ii) Βρείτε (x_n), (y_n) οι οποίες δεν έχουν όριο ώστε η $(x_n y_n)$ να έχει όριο.