Απειροστικός Λογισμός Ι, χειμερινό εξάμηνο 2018-19.

Έκτο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Παρατηρήστε ότι ο πρώτος κανόνας αλλαγής μεταβλητής εφαρμόζεται μόνο στα εφτά πρώτα όρια ενώ ο δεύτερος κανόνας εφαρμόζεται μόνο στα τέσσερα τελευταία:

$$\lim_{x\to 0-}\Big(\big(\tfrac{1}{x^3}-x^2\big)^2+\big(\tfrac{1}{x^3}-x^2\big)\Big)^{1/3}=+\infty,\qquad \lim_{x\to\pm\infty}\log\tfrac{e^x}{e^{3x}+e^x+1}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to 0}\log\tfrac{3-2\log x}{2+(\log x)^2}=-\infty,\qquad \lim_{x\to-\pi}\tfrac{\sin x}{x+\pi}=-1,\qquad \lim_{x\to\pm\infty}x\sin\tfrac{1}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to+\infty}e^{1/x^2}=1,\qquad \lim_{x\to+\infty}\sin\tfrac{1}{\sqrt{x}}=0,\qquad \lim_{x\to+\infty}\sin\tfrac{\sin x}{x}=0,\qquad \lim_{x\to 0}e^{x\sin\frac{1}{x}}=1.$$

2. Παρατηρήστε ότι τα παρακάτω όρια δεν έχουν νόημα:

$$\lim_{x\to 0-}x^{\sqrt{3}},\qquad \lim_{x\to 1}\sqrt[4]{(x^2-2x+1)(1-2x^2)},\qquad \lim_{x\to 1+}\big(\tfrac{1-x}{1+x}\big)^{1/2}.$$

3. Έστω $f(\sqrt{x})=1-2(f(x))^2$ για κάθε $x>1$. Αποδείξτε ότι αν το $\lim_{x\to 1+}f(x)$ είναι αριθμός τότε οι μόνες πιθανές τιμές του είναι $1/2$ και -1. Αποδείξτε ότι δεν μπορεί να είναι $\lim_{x\to 1+}f(x)=+\infty$.

4. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x\to 1\pm}\tfrac{x^3-x^2-x+1}{x^5-3x^4+6x^3-10x^2+9x-3}=\pm\infty,\qquad \lim_{x\to 0\pm}x\big[\tfrac{1}{x}\big]=1,$$

$$\lim_{x\to 0}\tfrac{\tan(3x)}{\tan(5x)}=\tfrac{3}{5},\qquad \lim_{x\to 0}\tfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}=\tfrac{1}{2},\qquad \lim_{x\to 0}\tfrac{\cos(3x)-\cos(4x)}{x^2}=\tfrac{7}{2}.$$

5. (i) Έστω $\lim_{x\to\xi}f(x)=+\infty$ και ότι η g είναι κάτω φραγμένη κοντά στο ξ. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to\xi}(f(x)+g(x))=+\infty$.
(ii) Έστω $\lim_{x\to\xi}f(x)=+\infty$ ή $-\infty$ και ότι η g έχει θετικό κάτω φράγμα κοντά στο ξ. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to\xi}(f(x)g(x))=+\infty$ ή $-\infty$, αντιστοίχως.

6. (i) Αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{1}{4}<\frac{3x^7-1}{3x^4+2x-1}<\frac{3}{4}$ κοντά στο 1.
(ii) Αποδείξτε ότι ισχύει $1-10^{-5}<\frac{x^4+26x^3+5x^2+x-4}{x^4-2x^2+x-1}<1+10^{-5}$ κοντά στο $-\infty$.

7. Αποδείξτε με χρήση κατάλληλων ακολουθιών ότι δεν υπάρχουν τα $\lim_{x\to 0\pm}\sin\frac{1}{x}$.

8. Αποδείξτε τα παρακάτω όρια ακολουθιών:

$$n\sin\tfrac{\pi}{n}\to\pi,\qquad n^2\big(1-\cos\tfrac{\pi}{n}\big)\to\tfrac{\pi^2}{2},\qquad n\tan\tfrac{\pi}{2n}\to\tfrac{\pi}{2}.$$

9. Αποδείξτε ότι η $y=\sqrt{x+1}$ είναι συνεχής στο 1 με τον ορισμό της συνέχειας (με ϵ και δ).

10. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $y=\begin{cases}(\sin x)/x & \text{αν } x\neq 0\\ 1 & \text{αν } x=0\end{cases}$ είναι συνεχής στο 0.

11. Σχεδιάστε το γράφημα της $y=x-[x]$ και αποδείξτε ότι είναι συνεχής στο $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. Στα σημεία του $\mathbb{Z}$ η συνάρτηση είναι δεξιά συνεχής αλλά όχι αριστερά συνεχής.

12. Αποδείξτε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς στα αντίστοιχα σύνολα:
    $y = \sin(x^2 + x - 1)$ στο $\mathbb{R}$.
    $y = \log(\sin x)$ στην ένωση των $(2k\pi, \pi + 2k\pi)$ για $k \in \mathbb{Z}$.
    $y = \frac{1}{\sqrt{1-e^x}}$ στο $(-\infty, 0)$.
    $y = \sin(\log x)$ στο $(0, +\infty)$.
    $y = \sqrt{1 - \cos x}$ στο $\mathbb{R}$.
    $y = (x^2 - 5x + 6)^{\sqrt{2}}$ στο $(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$.
    $y = \log(\log x)$ στο $(1, +\infty)$.
    $y = \log(1 - \cos x)$ στο $\mathbb{R} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
    $y = \frac{\sqrt{100-x^2}\,\log x}{\sin^2 x - 2\sin x + 1}$ στο $(0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}) \cup (\frac{5\pi}{2}, 10]$.

13. Χρησιμοποιήστε την ταυτότητα $a^b = e^{b \log a}$ για $a > 0$ για να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς στα αντίστοιχα σύνολα:
    $y = x^x$ στο $(0, +\infty)$.
    $y = (x^2 - 1)^{\frac{x-2}{x+2}}$ στο $(-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (1, +\infty)$.
    $y = (1 - x^2)^{\log x}$ στο $(0, 1)$.

14. Έστω ότι η f είναι αύξουσα στο διάστημα $(0, 2)$ και ότι ισχύει $f(\frac{1}{n}) = 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x \to 0+} f(x) = 1$.