

Απειροστικός Λογισμός I, χειμερινό εξάμηνο 2018-19.

Έβδομο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Έχουν οι παρακάτω συναρτήσεις μέγιστη ή ελάχιστη τιμή στο διάστημα $(0, 1)$; Στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$; Στο διάστημα $[0, 1]$;

$$y = x^2, \quad y = x^2 - x, \quad y = x - x^2, \quad y = \sin(2\pi x).$$

Για ποιά από τα τρία διαστήματα η απάντηση είναι άμεση για όλες τις συναρτήσεις;

2. Βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{7}{x-1} + \frac{3}{x-2} + \frac{4}{x-3}$$

σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$ και $(3, +\infty)$. Για κάθε c βρείτε πόσες λύσεις έχει η εξίσωση $f(x) = c$.

3. Έστω $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω ότι ισχύει $x^2 + f(x)^2 = 1$ για κάθε $x \in [-1, 1]$.
(i) Αν η f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$, αποδείξτε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο δυνατότητες για την f : δηλαδή, είτε $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ για κάθε $x \in [-1, 1]$ είτε $f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ για κάθε $x \in [-1, 1]$.
(ii) Αν δεν υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$, πόσες δυνατότητες υπάρχουν για την f ;
4. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $\cot x = 2x^2 - 3x$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο διάστημα $(k\pi, (k+1)\pi)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.
5. Έστω συνεχείς $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $f(a) < g(a)$ και $f(b) > g(b)$ αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $f(\xi) = g(\xi)$.

6. Ποιά είναι τα σύνολα τιμών των παρακάτω συναρτήσεων;

$$y = -3x^5 + 4x^4 - x^3 + x^2 + x + 6, \quad y = x^6 - 8x^3 + 2, \quad y = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1.$$

7. Αποδείξτε ότι η εξίσωση

$$3x^8 - x^7 - 24x^6 - 4x^5 - 1820x^4 - 13x^3 - x^2 - 8x = 7$$

έχει τουλάχιστον μία λύση.

8. Βρείτε τα σύνολα τιμών των παρακάτω συναρτήσεων στα αντίστοιχα διαστήματα.

(i) $y = x + \frac{1}{x}$ στο $(-\infty, 0)$.

(ii) $y = e^{2x} + 3x$ στο $(-\infty, +\infty)$.

(iii) $y = \frac{1-e^x}{1+e^x}$ στο $(-\infty, +\infty)$.

Ποιές από τις τρεις συναρτήσεις είναι αντιστρέψιμες;

9. Αποδείξτε ότι η $y = x^3 - 3x$ είναι αντιστρέψιμη στο $[1, +\infty)$. Τί μπορείτε να πείτε για την αντίστροφη συνάρτηση σε σχέση με τα: πεδίο ορισμού, σύνολο τιμών, μονοτονία και συνέχεια;

Να επαναλάβετε για καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -1]$ και $[-1, 1]$.