Προαπαιτούμενες γνώσεις.

Α. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ και οι αλγεβρικές ιδιότητες των τεσσάρων πράξεων στο $\mathbb{R}$. Το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Προσέξτε: μερικά βιβλία (τα βιβλία του λυκείου, για παράδειγμα) θεωρούν φυσικό αριθμό και το 0, οπότε με $\mathbb{N}$ συμβολίζουν το σύνολο των $0, 1, 2, \ldots$ και με $\mathbb{N}^*$ το σύνολο των $1, 2, \ldots$. Το σύνολο των ακεραίων $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$ και το σύνολο των ρητών $\mathbb{Q}$.

Β. Βασικές αλγεβρικές ιδιότητες των ανισοτήτων. Για παράδειγμα:
(i) Αν $x \leq y$ και $y \leq z$, τότε $x \leq z$.
(ii) Αν $x \leq y$, τότε $x + z \leq y + z$ και $x - z \leq y - z$.
(iii) Αν $x \leq y$ και $z \leq w$, τότε $x + z \leq y + w$.
(iv) Αν $x \leq y$ και $z > 0$, τότε $xz \leq yz$ και $x/z \leq y/z$.
(v) Αν $x \leq y$ και $z < 0$, τότε $xz \geq yz$ και $x/z \geq y/z$.
(vi) Αν $0 < x \leq y$ και $0 < z \leq w$, τότε $0 < xz \leq yw$.

Γ. Βασικές ιδιότητες των απόλυτων τιμών. Για παράδειγμα:
(i) $|xy| = |x||y|$.
(ii) Η τριγωνική ανισότητα: $||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$.
(iii) Αν $y \neq 0$, τότε $|x/y| = |x|/|y|$.
(iv) $|x| \leq a$ αν και μόνο αν $-a \leq x \leq a$.
(v) $|x| < a$ αν και μόνο αν $-a < x < a$.

Δ. Η γεωμετρική αναπαράσταση των αριθμών ως σημείων της πραγματικής ευθείας. Η απόλυτη τιμή $|x - y|$ είναι ίση με την απόσταση ανάμεσα στα σημεία x, y. Τα διαστήματα (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$, $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, b]$ και $(-\infty, +\infty)$. Τα σύμβολα $+\infty, -\infty$ δεν είναι τίποτε άλλο παρά *σκέτα σύμβολα*. Τα $\pm\infty$ δεν είναι αριθμοί. Μπορούμε να *σκεφτόμαστε* το $+\infty$ ως ένα "σημείο" το οποίο είναι δεξιά κάθε σημείου της πραγματικής ευθείας ή ως μία "ποσότητα" μεγαλύτερη από κάθε αριθμό και το $-\infty$ ως ένα "σημείο" το οποίο είναι αριστερά κάθε σημείου της πραγματικής ευθείας ή ως μία "ποσότητα" μικρότερη από κάθε αριθμό. Για παράδειγμα, γράφουμε:

$$-\infty < x, \qquad x < +\infty, \qquad -\infty < +\infty$$

για κάθε αριθμό x.

Ε. Δυνάμεις με ακέραιους εκθέτες. Αν $n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$, τότε

$$a^n = \underbrace{a \cdots a}_{n}.$$

Αν $a \neq 0$ και $n = 0$ ή $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$, τότε

$$a^0 = 1, \qquad a^n = \frac{1}{a^{-n}} = 1/(\underbrace{a \cdots a}_{-n}).$$

Ισχύει $(-a)^n = a^n$ αν το $n \in \mathbb{Z}$ είναι άρτιο και $(-a)^n = -a^n$ αν το $n \in \mathbb{Z}$ είναι περιττό. Επίσης, αν το $n \in \mathbb{Z}$ είναι άρτιο, τότε $a^n > 0$ για κάθε $a \neq 0$. Τέλος, αν το $n \in \mathbb{Z}$ είναι περιττό, τότε $a^n > 0$ για κάθε $a > 0$ καθώς και $a^n < 0$ για κάθε $a < 0$.
Αν $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 2$, τότε $x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$.
Οι βασικές ιδιότητες των δυνάμεων με ακέραιους εκθέτες:
(i) $a^x b^x = (ab)^x$, $a^x a^y = a^{x+y}$, $(a^x)^y = (a^y)^x = a^{xy}$.
(ii) Έστω $0 < a < b$. Τότε ισχύει $a^x < b^x$ αν $x > 0$ και ισχύει $a^x > b^x$ αν $x < 0$.

(iii) Έστω $x < y$. Τότε ισχύει $a^x < a^y$ αν $a > 1$ και ισχύει $a^x > a^y$ αν $0 < a < 1$.

ΣΤ. Οι ρίζες των αριθμών. Γνωρίζουμε (χωρίς απόδειξη) ότι, αν $a \geq 0$ και $n \in \mathbb{N}$, τότε υπάρχει μοναδικό $x \geq 0$ ώστε $x^n = a$. Η μοναδική *μη-αρνητική* λύση της εξίσωσης $x^n = a$ ονομάζεται n-οστή ρίζα του a και συμβολίζεται

$$\sqrt[n]{a}.$$

Αν το $n \in \mathbb{N}$ είναι άρτιο, τότε η εξίσωση $x^n = a$ έχει (i) ακριβώς δύο λύσεις, μία θετική και την αντίθετη αρνητική, αν $a > 0$, (ii) ακριβώς μία λύση, το 0, αν $a = 0$ και (iii) καμία λύση αν $a < 0$.

Αν το $n \in \mathbb{N}$ είναι περιττό, τότε η εξίσωση $x^n = a$ έχει (i) ακριβώς μία λύση, θετική, αν $a > 0$, (ii) ακριβώς μία λύση, το 0, αν $a = 0$ και (iii) ακριβώς μία λύση, αρνητική, αν $a < 0$.

Άρα $\sqrt[n]{0} = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, $\sqrt[n]{a} > 0$ για κάθε $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Τέλος, αν $a < 0$ τότε δεν ορίζεται το $\sqrt[n]{a}$ για κανένα $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Ζ. Δυνάμεις με ρητούς εκθέτες. Αν $a > 0$ και $r \in \mathbb{Q}$, γράφουμε $r = \frac{m}{n}$, όπου $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, και ορίζουμε

$$a^r = (\sqrt[n]{a})^m.$$

Επίσης, αν $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$, ορίζουμε

$$0^r = 0.$$

Αν $a \geq 0$ και $n \in \mathbb{N}$, τότε $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$. Αν $a > 0$ και $r \in \mathbb{Q}$, τότε $a^r > 0$.

Αν $a < 0$, τότε δεν ορίζεται το a^r παρά μόνο όταν $r \in \mathbb{Z}$.

Βλέπουμε ότι, *αν το r είναι ρητός*, τότε το σύμβολο a^r ορίζεται (i) αν $a > 0$, (ii) αν $a = 0$, $r > 0$ και (iii) αν $a < 0$, $r \in \mathbb{Z}$. Το σύμβολο a^r δεν ορίζεται (i) αν $a = 0$, $r \leq 0$ και (ii) αν $a < 0$, $r \notin \mathbb{Z}$.

Οι βασικές ιδιότητες των δυνάμεων με ακέραιους εκθέτες (που είδαμε προηγουμένως) ισχύουν και για δυνάμεις με ρητούς εκθέτες.

Η. Οι δυνάμεις με άρρητους εκθέτες. Γνωρίζουμε (χωρίς αιτιολόγηση) ότι, αν $a > 0$ και το x είναι άρρητος, τότε ορίζεται η δύναμη

$$a^x.$$

Επίσης, αν $a = 0$ και το x είναι άρρητος > 0, ορίζουμε

$$0^x = 0.$$

Βλέπουμε ότι, *αν το x είναι άρρητος*, τότε το σύμβολο a^x ορίζεται (i) αν $a > 0$ και (ii) αν $a = 0$, $x > 0$. Το σύμβολο a^x δεν ορίζεται (i) αν $a < 0$ και (ii) αν $a = 0$, $x < 0$.

Συνολικό συμπέρασμα για το πότε ορίζονται οι δυνάμεις:

Το a^x ορίζεται (i) αν $a > 0$, (ii) αν $a = 0$, $x > 0$ και (iii) αν $a < 0$, $x \in \mathbb{Z}$.

Το a^x δεν ορίζεται (i) αν $a = 0$, $x \leq 0$ και (ii) αν $a < 0$, $x \notin \mathbb{Z}$.

Οι βασικές ιδιότητες των δυνάμεων ισχύουν για οποιουσδήποτε πραγματικούς εκθέτες.

Θ. Οι λογάριθμοι. Γνωρίζουμε (χωρίς απόδειξη) ότι, αν $a > 0$, $a \neq 1$ και $y > 0$, τότε υπάρχει μοναδικό x ώστε $a^x = y$. Η μοναδική λύση της εξίσωσης $a^x = y$ ονομάζεται λογάριθμος του y με βάση a και συμβολίζεται

$$\log_a y.$$

Με άλλα λόγια, ισχύει η ισοδυναμία:

$$x = \log_a y \quad \Leftrightarrow \quad a^x = y.$$

Οι βασικές ιδιότητες των λογαρίθμων (με βάσεις $a, b > 0$, $a, b \neq 1$):

(i) $\log_a(yz) = \log_a y + \log_a z$ για κάθε $y, z > 0$.

(ii) $\log_a(y/z) = \log_a y - \log_a z$ για κάθε $y, z > 0$.
(iii) $\log_a(y^z) = z \log_a y$ για κάθε $y > 0$ και κάθε z.
(iv) $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$.
(v) Έστω $0 < y < z$. Τότε $\log_a y < \log_a z$ αν $a > 1$ καθώς και $\log_a y > \log_a z$ αν $0 < a < 1$.
(vi) $\log_b y = \frac{1}{\log_a b} \log_a y$ για κάθε $y > 0$.

Ι. Τριγωνομετρικοί αριθμοί. Θεωρούνται γνωστοί οι γεωμετρικοί ορισμοί των τριγωνομετρικών αριθμών βάσει του τριγωνομετρικού κύκλου. Προσέξτε: θα χρησιμοποιούμε τα σύμβολα

$$\sin x, \quad \cos x, \quad \tan x, \quad \cot x$$

αντί των αντίστοιχων ημ x, συν x, εφ x, σφ x που χρησιμοποιούνται στα βιβλία του λυκείου. Οι αριθμοί $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ και $\cot x$ ονομάζονται, αντιστοίχως, ημίτονο, συνημίτονο, εφαπτόμενη και συνεφαπτόμενη του x. Και οι τέσσερις αυτοί αριθμοί ονομάζονται τριγωνομετρικοί αριθμοί του x.
Το $\tan x$ δεν ορίζεται αν $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Το $\cot x$ δεν ορίζεται αν $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
Για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ ισχύει $\cos x > 0$ αν $-\frac{\pi}{2} + k2\pi < x < \frac{\pi}{2} + k2\pi$ και ισχύει $\cos x < 0$ αν $\frac{\pi}{2} + k2\pi < x < \frac{3\pi}{2} + k2\pi$. Επίσης, ισχύει $\sin x > 0$ αν $k2\pi < x < \pi + k2\pi$ και ισχύει $\sin x < 0$ αν $\pi + k2\pi < x < 2\pi + k2\pi$.
Μερικές βασικές ιδιότητες των τριγωνομετρικών αριθμών:
(i) $|\cos x| \leq 1$, $|\sin x| \leq 1$.
(ii) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.
(iii) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$.
(iv) $\cos(-x) = \cos x$, $\sin(-x) = -\sin x$, $\tan(-x) = -\tan x$, $\cot(-x) = -\cot x$.
(v) $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$, $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$, $\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \cot x$, $\cot(\frac{\pi}{2} - x) = \tan x$.
(vi) $\cos(x + \pi) = -\cos x$, $\sin(x + \pi) = -\sin x$, $\tan(x + \pi) = \tan x$, $\cot(x + \pi) = \cot x$.
(vii) $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$, $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$.
(viii) $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x-y}{2} \sin \frac{x+y}{2}$, $\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$.
(ix) Έστω $k \in \mathbb{Z}$. Τότε ισχύει $\cos x > \cos x'$ αν $k2\pi \leq x < x' \leq \pi + k2\pi$ και ισχύει $\cos x < \cos x'$ αν $\pi + k2\pi \leq x < x' \leq 2\pi + k2\pi$.
(x) Έστω $k \in \mathbb{Z}$. Τότε ισχύει $\sin x < \sin x'$ αν $-\frac{\pi}{2} + k2\pi \leq x < x' \leq \frac{\pi}{2} + k2\pi$ και ισχύει $\sin x > \sin x'$ αν $\frac{\pi}{2} + k2\pi \leq x < x' \leq \frac{3\pi}{2} + k2\pi$.

Κ. Η γενική έννοια του συνόλου και η έννοια του ανήκειν: γράφουμε $x \in A$ και λέμε ότι "το x ανήκει στο σύνολο A" αν το x είναι στοιχείο του συνόλου A. Η άρνηση του $x \in A$ γράφεται $x \notin A$. Το $\emptyset$ ονομάζεται κενό σύνολο και δεν περιέχει κανένα στοιχείο. Το σύνολο A είναι υποσύνολο του συνόλου B αν για κάθε $x \in A$ ισχύει $x \in B$: γράφουμε $A \subseteq B$. Το $\emptyset$ είναι υποσύνολο κάθε συνόλου. Απλές πράξεις ανάμεσα σε δύο σύνολα A, B: η ένωση $A \cup B = \{x \,|\, x \in A \text{ είτε } x \in B\}$, η τομή $A \cap B = \{x \,|\, x \in A \text{ και } x \in B\}$ και η διαφορά $A \setminus B = \{x \,|\, x \in A \text{ και } x \notin B\}$.

Λ. Η γενική έννοια της συνάρτησης

$$f : A \to B$$

με πεδίο ορισμού το σύνολο A και σύνολο τιμών υποσύνολο του συνόλου B. Λέμε "η συνάρτηση f με τύπο $y = f(x)$", όπου η ανεξάρτητη μεταβλητή x παίρνει τιμές από το A και η εξαρτημένη μεταβλητή y παίρνει τιμές από το B. Σε κάθε τιμή της x από το A αντιστοιχεί (μέσω της f) ακριβώς μία (δηλαδή μία και μόνο μία) τιμή της y από το B: εκείνη η οποία προσδιορίζεται από τον τύπο $y = f(x)$. Πολλές φορές, χάριν συντομίας, αντί "η συνάρτηση f με τύπο $y = f(x)$" λέμε "η συνάρτηση $y = f(x)$". Το σύνολο των τιμών της f είναι το

$$\{f(x) \,|\, x \in A\} = \{y \in B \,|\, \text{υπάρχει } x \in A \text{ ώστε } y = f(x)\}.$$

Στο σύνολο τιμών της f ανήκουν ακριβώς εκείνες οι τιμές της y από το B για τις οποίες η εξίσωση $f(x) = y$ με άγνωστο x έχει μία τουλάχιστον λύση στο πεδίο ορισμού A.

Γενικότερα, αν $A' \subseteq A$, τότε

$$f(A') = \{f(x) \,|\, x \in A'\} = \{y \in B \,|\, \text{υπάρχει } x \in A' \text{ ώστε } y = f(x)\}.$$

Για παράδειγμα: το σύνολο τιμών της f είναι το $f(A)$.

Συνάρτηση ένα-προς-ένα και συνάρτηση επί. Αν η $f : A \to B$ είναι ένα-προς-ένα και επί, τότε ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : B \to A$ και

$$x = f^{-1}(y) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = y.$$

Μ. Πραγματικές συναρτήσεις μίας πραγματικής μεταβλητής: δηλαδή $f : A \to \mathbb{R}$, όπου $A \subseteq \mathbb{R}$. Γραφική παράσταση (ή γράφημα) συνάρτησης. Το πεδίο ορισμού της $y = f(x)$ είναι η κατακόρυφη προβολή του γραφήματός της πάνω στον x-άξονα και το σύνολο τιμών της είναι η οριζόντια προβολή του γραφήματος πάνω στον y-άξονα.

Συνάρτηση αύξουσα (φθίνουσα, μονότονη) σε διάστημα του πεδίου ορισμού της. Συνάρτηση γνησίως αύξουσα (γνησίως φθίνουσα, γνησίως μονότονη) σε διάστημα του πεδίου ορισμού της. Αν μία συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα (γνησίως φθίνουσα), τότε η αντίστροφή της συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα (γνησίως φθίνουσα).

Συνάρτηση άνω φραγμένη (κάτω φραγμένη, φραγμένη) σε υποσύνολο του πεδίου ορισμού της.

Άρτια συνάρτηση, περιττή συνάρτηση.

(i) Το γράφημα της $y = -f(x)$ είναι το συμμετρικό ως προς τον x-άξονα του γραφήματος της $y = f(x)$. (ii) Το γράφημα της $y = f(-x)$ είναι το συμμετρικό ως προς τον y-άξονα του γραφήματος της $y = f(x)$. (iii) Το γράφημα της $y = f(x) + \kappa$ είναι η κατακόρυφη μεταφορά κατά κ (προς τα πάνω, αν $\kappa > 0$, και προς τα κάτω, αν $\kappa < 0$) του γραφήματος της $y = f(x)$. (iv) Το γράφημα της $y = f(x - \kappa)$ είναι η οριζόντια μεταφορά κατά κ (προς τα δεξιά, αν $\kappa > 0$, και προς τα αριστερά, αν $\kappa < 0$) του γραφήματος της $y = f(x)$.

Τα γραφήματα μίας συνάρτησης και της αντίστροφής της είναι συμμετρικά ως προς την κύρια διαγώνιο (την ευθεία με εξίσωση $y = x$).

Περιοδικές συναρτήσεις.

Πολυωνυμικές συναρτήσεις. Μονοτονία και γραφήματα των $y = ax+b$ και των $y = ax^2+bx+c$. Μονοτονία και γραφήματα των $y = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$).

Ρητές συναρτήσεις. Μονοτονία και γραφήματα των $y = 1/x^n$ ($n \in \mathbb{N}$).

Μονοτονία και γραφήματα των συναρτήσεων: $y = \sqrt[n]{x}$ ($n \in \mathbb{N}$), $y = x^a$ ($a \in \mathbb{R}$), $y = a^x$ ($a > 0$), $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$), $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$.

Ν. **Δεν χρειάζεται να γνωρίζετε τίποτα για όρια συναρτήσεων, συνέχεια συναρτήσεων, παραγώγους και ολοκληρώματα**.