Απειροστικός Λογισμός Ι, χειμερινό εξάμηνο 2018-19.

Λύσεις δωδέκατου φυλλαδίου ασκήσεων.

1. *Εξετάστε ως προς την σύγκλιση τις σειρές*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2n+1}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n \sin\frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n \log\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Λύση: Το πρώτο πράγμα που σκεφτόμαστε όταν μας δίνουν μία σειρά είναι αν ο n-οστός όρος της τείνει στο 0. Τώρα σε όλες οι σειρές σ' αυτήν την άσκηση ο n-οστός όρος δεν τείνει στο 0. Π.χ. στην πρώτη και στην τέταρτη σειρά έχουμε:

$$\frac{n}{2n+1} \to \frac{1}{2} \qquad n \sin\frac{1}{n} = \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \to 1.$$

Ελέγξτε εσείς ότι ο n-οστός όρος της δεύτερης σειράς τείνει στο $\frac{1}{e}$, της τρίτης σειράς στο 1, της πέμπτης σειράς στο 1. (Κάποια από αυτά τα όρια θα τα δούμε στις επόμενες ασκήσεις.) Άρα όλες οι σειρές αποκλίνουν.

Όταν μία σειρά έχει μη-αρνητικούς όρους γνωρίζουμε ότι αυτή είτε συγκλίνει είτε αποκλίνει στο $+\infty$. Επομένως για τις σειρές αυτής της άσκησης μπορούμε να πούμε όχι μόνο ότι αποκλίνουν αλλά και ότι έχουν άθροισμα $+\infty$.

Προσέξτε. Αν μας έδιναν την σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{n}{2n+1}$ θα βλέπαμε πάλι ότι ο n-οστός όρος δεν τείνει στο 0. (Μάλιστα ο n-οστός όρος δεν έχει καν όριο: η υπακολουθία των άρτιων δεικτών τείνει στο $\frac{1}{2}$ και η υπακολουθία των περιττών δεικτών τείνει στο $-\frac{1}{2}$.) Αφού ο n-οστός όρος δεν τείνει στο 0 η σειρά αποκλίνει. Τώρα όμως η σειρά δεν έχει μη-αρνητικούς όρους οπότε δεν μπορούμε να συμπεράνουμε αν αποκλίνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ ή αν δεν έχει καν άθροισμα. Για κάτι τέτοιο χρειάζεται επιπλέον διερεύνηση.

2. *Χρησιμοποιώντας γεωμετρικές σειρές, εξετάστε ως προς την σύγκλιση τις σειρές*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^{n-3}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-4}, \quad \sum_{n=3}^{+\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}+3^{n+1}}{6^n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+2^{n/2}}{2^n}$$

και υπολογίστε τα αθροίσματά τους (αν υπάρχουν).

Λύση: Η τρίτη σειρά γράφεται

$$\begin{aligned}
\sum_{n=3}^{+\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1} &= \left(-\frac{2}{3}\right)^4 + \left(-\frac{2}{3}\right)^5 + \left(-\frac{2}{3}\right)^6 \cdots \\
&= \left(-\frac{2}{3}\right)^4 \left(1 + \left(-\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots\right) \\
&= \left(-\frac{2}{3}\right)^4 \sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} \\
&= \left(-\frac{2}{3}\right)^4 \frac{1}{1-(-\frac{2}{3})} = \frac{3}{5}\,\frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{135}.
\end{aligned}$$

Η τέταρτη σειρά είναι άθροισμα δύο σειρών:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}+3^{n+1}}{6^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2^{n-1}}{6^n} + \frac{3^{n+1}}{6^n}\right).$$

Και οι δύο σειρές ανάγονται σε γεωμετρικές. Εξετάζουμε καθεμία σειρά ξεχωριστά.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{6^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{6^{n-1}6} = \frac{1}{6}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{6}\,\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}.$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{n+1}}{6^n} = \frac{3^2}{6}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{n-1}}{6^{n-1}} = \frac{3}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{3}{2}\,\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3.$$

Αφού συγκλίνουν οι δύο σειρές συγκλίνει και η αρχική και

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}+3^{n+1}}{6^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{6^n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{n+1}}{6^n} = \frac{1}{4} + 3 = \frac{13}{4}.$$

Ξαναγυρνάμε στην τρίτη σειρά για να κάνουμε ένα άλλο κόλπο. Ο δείκτης n τρέχει από το 3 και πέρα. Αν κάνουμε μία πολύ απλή αλλαγή μεταβλητής μπορούμε να πετύχουμε να τρέχει ο δείκτης από το 1 και πέρα: παρατηρούμε ότι το $n-2$ τρέχει από το 1 και πέρα. Γράφουμε $k=n-2$ ή ισοδύναμα $n=k+2$ και τότε η σειρά γράφεται

$$\sum_{n=3}^{+\infty}(-\tfrac{2}{3})^{n+1}=\sum_{k=1}^{+\infty}(-\tfrac{2}{3})^{k+3}=(-\tfrac{2}{3})^4\sum_{k=1}^{+\infty}(-\tfrac{2}{3})^{k-1}=(-\tfrac{2}{3})^4\,\tfrac{1}{1-(-\frac{2}{3})}=\tfrac{16}{135}.$$

Δείτε εσείς τις υπόλοιπες σειρές: η πρώτη έχει άθροισμα $+\infty$, η δεύτερη δεν έχει άθροισμα και η πέμπτη έχει άθροισμα $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$.

3. *Βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συγκλίνουν οι σειρές:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{x}{(1+x)^{n-1}},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{x^{2n}}{(1+x^2)^{n-1}},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}.$$

Λύση: (i) Η πρώτες δύο σειρές είναι ουσιαστικά γεωμετρικές. Για την πρώτη έχουμε

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{x}{(1+x)^{n-1}}=x\sum_{n=1}^{+\infty}(\tfrac{1}{1+x})^{n-1}=x\,\tfrac{1}{1-\frac{1}{x+1}}=x+1.$$

Η σειρά συγκλίνει αν και μόνο αν $-1<\frac{1}{x+1}<1$ δηλαδή αν και μόνο αν $x<-2$ ή $x>0$.
(ii) Για την δεύτερη σειρά έχουμε

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{x^{2n}}{(1+x^2)^{n-1}}=x^2\sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{x^{2n-2}}{(1+x^2)^{n-1}}=x^2\sum_{n=1}^{+\infty}(\tfrac{x^2}{1+x^2})^{n-1}=x^2\tfrac{1}{1-\frac{x^2}{1+x^2}}=x^2(1+x^2).$$

Η σειρά συγκλίνει αν και μόνο αν $-1<\frac{x^2}{1+x^2}<1$ το οποίο ισχύει για κάθε x.
(iii) Η τρίτη σειρά δεν φαίνεται να σχετίζεται με γεωμετρική σειρά. Έτσι πάει το μυαλό μας στο κριτήριο με το αν ο n-οστός όρος τείνει στο 0. Μέσα στον n-οστό όρο εμφανίζεται η γεωμετρική ακολουθία x^{2n} και έχουμε τις εξής περιπτώσεις.
Αν $0\leq x^2<1$ τότε $x^{2n}\to 0$ οπότε $\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}\to 1$ και η σειρά αποκλίνει. (Μάλιστα, επειδή οι όροι είναι μη-αρνητικοί, το άθροισμα της σειράς είναι $+\infty$.)
Αν $x^2>1$ τότε $x^{2n}\to+\infty$ οπότε $\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}\to -1$ και η σειρά αποκλίνει. (Τώρα, επειδή οι όροι είναι μη-θετικοί, το άθροισμα της σειράς είναι $-\infty$.)
Αν $x^2=1$ τότε $\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}=0$ για κάθε n και η σειρά έχει άθροισμα 0.
Άρα η σειρά συγκλίνει μόνο όταν $x=\pm 1$.

4. *(i) Κάθε σειρά της μορφής $\sum_{n=1}^{+\infty}(b_n-b_{n+1})$ χαρακτηρίζεται* **τηλεσκοπική σειρά**.
Βρείτε συνοπτικό τύπο για τα μερικά αθροίσματα s_n της σειράς αυτής και, βάσει αυτού, αποδείξτε ότι αυτή έχει άθροισμα αν και μόνο αν υπάρχει το $\lim_{n\to+\infty}b_n$ και ότι το άθροισμα είναι αριθμός αν και μόνο αν το $\lim_{n\to+\infty}b_n$ είναι αριθμός. Τι σχέση υπάρχει ανάμεσα στο άθροισμα της σειράς και στο $\lim_{n\to+\infty}b_n$;
(ii) Δείτε αν οι

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{1}{n(n+1)},\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{1}{(2n-1)(2n+1)},\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{1}{n(n+1)(n+2)},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\log\tfrac{n}{n+1},\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}.$$

συγκλίνουν και υπολογίστε τα αθροίσματά τους (αν υπάρχουν).
Λύση: (i) Ο n-οστός όρος της σειράς είναι $x_n=b_n-b_{n+1}$. Άρα το n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς είναι

$$s_n=(b_1-b_2)+(b_2-b_3)+(b_3-b_4)+\cdots+(b_{n-1}-b_n)+(b_n-b_{n+1})=b_1-b_{n+1}.$$

Η τελική απλοποίηση γίνεται λόγω διαγραφών ίδιων όρων με αντίθετα πρόσημα.
Άρα το s_n έχει όριο αν και μόνο αν το b_{n+1} έχει όριο ή ισοδύναμα αν και μόνο αν το b_n

έχει όριο. Δηλαδή η σειρά έχει άθροισμα αν και μόνο αν υπάρχει το $\lim_{n\to+\infty} b_n$ και τότε το άθροισμα της σειράς είναι

$$s = \lim_{n\to+\infty} s_n = b_1 - \lim_{n\to+\infty} b_{n+1} = b_1 - \lim_{n\to+\infty} b_n.$$

Με άλλα λόγια

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(b_n - b_{n+1}) = b_1 - \lim_{n\to+\infty} b_n.$$

Αυτή είναι η σχέση ανάμεσα στο άθροισμα της σειράς και στο $\lim_{n\to+\infty} b_n$. Επομένως το άθροισμα είναι αριθμός αν και μόνο αν το $\lim_{n\to+\infty} b_n$ είναι αριθμός.

(ii) Για την πρώτη σειρά έχουμε

$$\tfrac{1}{n(n+1)} = \tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n+1}$$

οπότε η σειρά είναι τηλεσκοπική με $b_n = \frac{1}{n}$. Επειδή $\frac{1}{n} \to 0$, η σειρά συγκλίνει και

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{1}{n(n+1)} = 1 - \lim_{n\to+\infty} \tfrac{1}{n} = 1.$$

Για την δεύτερη σειρά έχουμε

$$\tfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \tfrac{1}{2(2n-1)} - \tfrac{1}{2(2n+1)}$$

οπότε η σειρά είναι τηλεσκοπική με $b_n = \frac{1}{2(2n-1)}$. Επειδή $\frac{1}{2(2n-1)} \to 0$, η σειρά συγκλίνει και

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \tfrac{1}{2} - \lim_{n\to+\infty} \tfrac{1}{2(2n-1)} = \tfrac{1}{2}.$$

Για τις υπόλοιπες σειρές παρατηρήστε ότι

$$\tfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \tfrac{1}{2n(n+1)} - \tfrac{1}{2(n+1)(n+2)}, \qquad \log \tfrac{n}{n+1} = \log n - \log(n+1),$$

$$\tfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} = \tfrac{1}{\sqrt{n}} - \tfrac{1}{\sqrt{n+1}}$$

και να συμπεράνετε ότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \tfrac{1}{4}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \log \tfrac{n}{n+1} = -\infty, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} = 1.$$

5. *Συγκρίνοντας με απλούστερες σειρές, εξετάστε ως προς την σύγκλιση τις σειρές*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{n\sqrt{n}+2n+1}{2n^2+1}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{2n^2+3n+1}{n^4-n^2+4}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(\sqrt{1+n^2} - n), \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{1}{n^{1+(1/n)}}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}\, \log(1 + \tfrac{1}{n^2}),$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(e^{1/n} - 1), \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{1}{n} \sin \tfrac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}(1 - \cos \tfrac{1}{n}).$$

Λύση: Όλες οι σειρές έχουν μη-αρνητικούς όρους. Όπως έχουμε πει πολλές φορές, το πρώτο πράγμα που σκεφτόμαστε είναι να ελέγξουμε αν ο n-οστός όρος τείνει στο 0. Στην διαδικασία αυτού του ελέγχου (από τον οποίο θα προκύψει ότι όλοι οι n-οστοί όροι τείνουν στο 0) θα προκύψει και η σύγκριση η οποία πρέπει να γίνει με κατάλληλες απλούστερες σειρές.

(i) Για την πρώτη σειρά ο n-οστός όρος γράφεται (με παραγοντοποίηση των κύριων όρων από αριθμητή και παρονομαστή)

$$\tfrac{n\sqrt{n}+2n+1}{2n^2+1} = \tfrac{n\sqrt{n}}{n^2} \tfrac{1+\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n\sqrt{n}}}{2+\frac{1}{n^2}} = \tfrac{1}{\sqrt{n}} \tfrac{1+\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n\sqrt{n}}}{2+\frac{1}{n^2}}$$

και άρα

$$\frac{\frac{n\sqrt{n}+2n+1}{2n^2+1}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \to \frac{1}{2}.$$

Επειδή $0 < \frac{1}{2} < +\infty$, η αρχική σειρά συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ συγκλίνει. Γνωρίζουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1/2}} = +\infty$$

οπότε και η αρχική σειρά αποκλίνει στο $+\infty$.

Για τις υπόλοιπες σειρές θα δούμε πολύ συνοπτικά πώς χειριζόμαστε τον n-οστό όρο και θα βγάλουμε το αντίστοιχο συμπέρασμα. *Γίνετε εσείς πιο αναλυτικοί.*

(ii) Για την δεύτερη σειρά έχουμε

$$\frac{2n^2+3n+1}{n^4-n^2+4} = \frac{n^2}{n^4} \frac{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n^2}+\frac{4}{n^4}} = \frac{1}{n^2} \frac{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n^2}+\frac{4}{n^4}} \qquad \text{και} \qquad \frac{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n^2}+\frac{4}{n^4}} \to 2.$$

Επειδή $0 < 2 < +\infty$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$, η δεύτερη σειρά συγκλίνει.

(iii) Για την τρίτη σειρά έχουμε

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \qquad \text{και} \qquad \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \to 1.$$

Επειδή $0 < 1 < +\infty$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$, η τρίτη σειρά αποκλίνει στο $+\infty$.

(iv) Για την τέταρτη σειρά έχουμε

$$\sqrt{1+n^2} - n = \frac{(1+n^2)-n^2}{\sqrt{1+n^2}+n} = \frac{1}{\sqrt{1+n^2}+n} = \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+1}+1} \qquad \text{και} \qquad \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+1}+1} \to \frac{1}{2}.$$

Επειδή $0 < \frac{1}{2} < +\infty$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$, η τέταρτη σειρά αποκλίνει στο $+\infty$.

(v) Για την πέμπτη σειρά έχουμε

$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} = \frac{(n+1)-n}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \frac{1}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \frac{1}{n\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} \qquad \text{και} \qquad \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} \to \frac{1}{2}.$$

Επειδή $0 < \frac{1}{2} < +\infty$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < +\infty$, η πέμπτη σειρά συγκλίνει.

(vi) Για την έκτη σειρά έχουμε

$$\frac{1}{n^{1+(1/n)}} = \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \qquad \text{και} \qquad \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1.$$

Επειδή $0 < 1 < +\infty$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$, η έκτη σειρά αποκλίνει στο $+\infty$.

(vii) Στον n-οστό όρο της έβδομης σειράς έχουμε ότι $\log(1+\frac{1}{n^2}) \to \log 1 = 0$ επειδή $\frac{1}{n^2} \to 0$. Τώρα όμως θα χρειαστούμε κάποιου είδους σύγκριση του $\log(1+\frac{1}{n^2})$ με μία δύναμη του n ώστε να αναγάγουμε την σειρά μας σε σειρά της μορφής $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$. Εδώ θα μας βοηθήσει ένα σχετικό όριο της λογαριθμικής συνάρτησης:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1.$$

Το όριο αυτό αποδεικνύεται είτε με τον πρώτο κανόνα του l' Hopitâl (αφού είναι απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$) είτε παρατηρώντας ότι είναι η παράγωγος της $\log(1+x)$ στο 0.

Επομένως

$$\sqrt{n}\,\log(1+\frac{1}{n^2}) = \sqrt{n}\,\frac{1}{n^2} \frac{\log(1+\frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n\sqrt{n}} \frac{\log(1+\frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^2}} \qquad \text{και} \qquad \frac{\log(1+\frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^2}} \to 1.$$

Επειδή $0 < 1 < +\infty$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} < +\infty$, η έβδομη σειρά συγκλίνει.

(viii) Στον n-οστό όρο της όγδοης σειράς έχουμε ότι $e^{1/n}-1\to 0$ επειδή $\frac{1}{n}\to 0$. Όπως στην προηγούμενη σειρά, θα χρειαστούμε κάποιου είδους σύγκριση του $e^{1/n}-1$ με μία δύναμη του n. Τώρα έχουμε το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

Το όριο αυτό αποδεικνύεται είτε με τον πρώτο κανόνα του l' Hopitâl (αφού είναι απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$) είτε παρατηρώντας ότι είναι η παράγωγος της e^x στο 0.
Άρα

$$e^{\frac{1}{n}}-1=\frac{1}{n}\,\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\qquad\text{και}\qquad\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\to 1.$$

Επειδή $0<1<+\infty$ και $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}=+\infty$, η όγδοη σειρά αποκλίνει στο $+\infty$.
(ix) Στον n-οστό όρο της ένατης σειράς έχουμε ότι $\sin\frac{1}{n}\to 0$ επειδή $\frac{1}{n}\to 0$. Όπως στις προηγούμενες δύο σειρές, θα συγκρίνουμε το $\sin\frac{1}{n}$ με μία δύναμη του n. Τώρα έχουμε το γνωστό όριο:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Άρα

$$\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}=\frac{1}{n^2}\,\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\qquad\text{και}\qquad\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\to 1.$$

Επειδή $0<1<+\infty$ και $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}<+\infty$, η ένατη σειρά συγκλίνει.
(x) Στον n-οστό όρο της δέκατης σειράς έχουμε ότι $1-\cos\frac{1}{n}\to 0$ επειδή $\frac{1}{n}\to 0$. Και πάλι θα συγκρίνουμε το $1-\cos\frac{1}{n}$ με μία δύναμη του n. Τώρα έχουμε το γνωστό όριο:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

Άρα

$$1-\cos\frac{1}{n}=\frac{1}{n^2}\,\frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}\qquad\text{και}\qquad\frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}\to\frac{1}{2}.$$

Επειδή $0<\frac{1}{2}<+\infty$ και $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}<+\infty$, η δέκατη σειρά συγκλίνει.

6. *Βρείτε τις τιμές του a για τις οποίες η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}n^a\big(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\big)$ συγκλίνει.*

   Λύση: Θα συγκρίνουμε την σειρά με σειρά της μορφής $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$. Γι αυτό γράφουμε

$$n^a\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\Big)=n^a\,\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}=\frac{n^a}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=\frac{n^a}{n\sqrt{n}}\,\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}\Big(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\Big)}$$
$$=\frac{1}{n^{3/2-a}}\,\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}\Big(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\Big)}\qquad\text{και}\qquad\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}\Big(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\Big)}\to\frac{1}{2}.$$

   Επειδή $0<\frac{1}{2}<+\infty$, η σειρά συγκλίνει αν και μόνο αν $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{3/2-a}}<+\infty$ αν και μόνο αν $\frac{3}{2}-a>1$ αν και μόνο αν $a<\frac{1}{2}$.

7. *Εξετάστε με το ολοκληρωτικό κριτήριο τις σειρές*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+1},\qquad\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n^2+1},\qquad\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^n}{1+e^{2n}},$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty}ne^{-n},\qquad\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\log n},\qquad\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\log^2 n}.$$

   Για όσες σειρές συγκλίνουν βρείτε εκτιμήσεις για το άθροισμά τους.

   Λύση: (i) Για την πρώτη σειρά έχουμε ότι $\frac{1}{n^2+1}\downarrow 0$. Δηλαδή το $\frac{1}{n^2+1}$ φθίνει και τείνει στο 0. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ η οποία είναι φθίνουσα και ≥ 0 στο $[1,+\infty)$ και ισχύει $f(n)=\frac{1}{n^2+1}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Τώρα

$$\int_1^x\frac{1}{t^2+1}\,dt=\arctan x-\arctan 1=\arctan x-\frac{\pi}{4}$$

και

$$\lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{1}{t^2+1}\,dt = \lim_{x\to+\infty}\big(\arctan x - \tfrac{\pi}{4}\big) = \tfrac{\pi}{2} - \tfrac{\pi}{4} = \tfrac{\pi}{4} < +\infty.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει και

$$\lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{1}{t^2+1}\,dt \le \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+1} \le \frac{1}{1^2+1} + \lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{1}{t^2+1}\,dt$$

δηλαδή

$$\tfrac{\pi}{4} \le \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+1} \le \tfrac{1}{2} + \tfrac{\pi}{4}.$$

(ii) Για την δεύτερη σειρά έχουμε ότι $\frac{n}{n^2+1}\downarrow 0$. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ η οποία είναι φθίνουσα και ≥ 0 στο $[1,+\infty)$ και ισχύει $f(n)=\frac{n}{n^2+1}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Τώρα

$$\int_1^x \frac{t}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{2}\int_2^{x^2+1}\frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\log\frac{x^2+1}{2}$$

και

$$\lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{t}{t^2+1}\,dt = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\log\frac{x^2+1}{2} = +\infty.$$

Άρα η σειρά αποκλίνει στο $+\infty$.

(iii) Για την τρίτη σειρά έχουμε ότι $\frac{e^n}{1+e^{2n}}\downarrow 0$. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=\frac{e^x}{1+e^{2x}}$ η οποία είναι φθίνουσα και ≥ 0 στο $[1,+\infty)$ και ισχύει $f(n)=\frac{e^n}{1+e^{2n}}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Τώρα

$$\int_1^x \frac{e^t}{1+e^{2t}}\,dt = \int_e^{e^x}\frac{1}{1+u^2}\,du = \arctan(e^x) - \arctan e$$

και

$$\lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{e^t}{1+e^{2t}}\,dt = \lim_{x\to+\infty}(\arctan(e^x) - \arctan e) = \tfrac{\pi}{2} - \arctan e < +\infty.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει και

$$\tfrac{\pi}{2} - \arctan e \le \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^n}{1+e^{2n}} \le \frac{e}{1+e^2} + \tfrac{\pi}{2} - \arctan e.$$

(iv) Για την τέταρτη σειρά έχουμε ότι $ne^{-n}\downarrow 0$. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=xe^{-x}$ η οποία είναι φθίνουσα και ≥ 0 στο $[1,+\infty)$ και ισχύει $f(n)=ne^{-n}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Τώρα

$$\begin{aligned}\int_1^x te^{-t}\,dt &= -\int_1^x t(e^{-t})'\,dt = -xe^{-x}+e^{-1}+\int_1^x e^{-t}\,dt = -xe^{-x}+e^{-1}-e^{-x}+e^{-1}\\ &= -(x+1)e^{-x}+2e^{-1}\end{aligned}$$

και

$$\lim_{x\to+\infty}\int_1^x te^{-t}\,dt = \lim_{x\to+\infty}(-(x+1)e^{-x}+2e^{-1}) = 2e^{-1} < +\infty.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει και

$$2e^{-1} \le \sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-n} \le e^{-1}+2e^{-1} = 3e^{-1}.$$

(v) Για την πέμπτη σειρά έχουμε ότι $\frac{1}{n\log n}\downarrow 0$. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x\log x}$ η οποία είναι φθίνουσα και ≥ 0 στο $[2,+\infty)$ και ισχύει $f(n)=\frac{1}{n\log n}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}, n\ge 2$. Τώρα

$$\int_2^x \frac{1}{t\log t}\,dt = \int_{\log 2}^{\log x}\frac{1}{u}\,du = \log\frac{\log x}{\log 2}$$

και

$$\lim_{x\to+\infty}\int_2^x \frac{1}{t\log t}\,dt = \lim_{x\to+\infty}\log\frac{\log x}{\log 2} = +\infty.$$

Άρα η σειρά αποκλίνει στο $+\infty$.

(vi) Για την έκτη σειρά έχουμε ότι $\frac{1}{n\log^2 n}\downarrow 0$. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x\log^2 x}$

η οποία είναι φθίνουσα και ≥ 0 στο $[2, +\infty)$ και ισχύει $f(n) = \frac{1}{n \log^2 n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Τώρα

$$\int_2^x \frac{1}{t \log^2 t}\, dt = \int_{\log 2}^{\log x} \frac{1}{u^2}\, du = \frac{1}{\log 2} - \frac{1}{\log x}$$

και

$$\lim_{x\to+\infty} \int_2^x \frac{1}{t \log^2 t}\, dt = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{\log 2} - \frac{1}{\log x}\right) = \frac{1}{\log 2} < +\infty.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει και

$$\frac{1}{\log 2} \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \log^2 n} \leq \frac{1}{2\log^2 2} + \frac{1}{\log 2}.$$

8. *Εφαρμόστε το κριτήριο λόγου σε όποιες από τις παρακάτω σειρές είναι αυτό δυνατό.*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+2}{(\sqrt{2})^n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(-3)^n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n^n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n n!}{n^n},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-e)^n n!}{n^n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\cdot5\cdot8\cdots(3n-1)}{1\cdot5\cdot9\cdots(4n-3)}.$$

Λύση: (i) Για την πρώτη σειρά, με $x_n = (-1)^n \frac{n+2}{(\sqrt{2})^n}$ έχουμε $x_{n+1} = (-1)^{n+1} \frac{n+3}{(\sqrt{2})^{n+1}}$ οπότε

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \frac{(n+3)(\sqrt{2})^n}{(n+2)(\sqrt{2})^{n+1}} = \frac{n+3}{n+2}\frac{1}{\sqrt{2}} \to \frac{1}{\sqrt{2}} < 1.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει απολύτως και άρα συγκλίνει.
(ii) Για την δεύτερη σειρά, με $x_n = \frac{n!}{(-3)^n}$ έχουμε $x_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(-3)^{n+1}}$ οπότε

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \frac{(n+1)!3^n}{n!3^{n+1}} = \frac{n+1}{3} \to +\infty > 1.$$

Άρα η σειρά αποκλίνει.
(iii) Για την τρίτη σειρά, με $x_n = \frac{2^n}{n^n}$ έχουμε $x_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}$ οπότε

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2^{n+1} n^n}{2^n (n+1)^{n+1}} = \frac{2}{(n+1)(1+\frac{1}{n})^n} \to 0 < 1.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει.
Γενικά το κριτήριο λόγου εργάζεται με την απόλυτη τιμή του λόγου $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ και το συμπέρασμα είναι είτε ότι "η σειρά συγκλίνει απολύτως και άρα συγκλίνει" είτε ότι "η σειρά αποκλίνει", όπως στις δύο πρώτες σειρές. Η τρίτη σειρά έχει μη-αρνητικούς όρους οπότε δεν έγραψα την απόλυτη τιμή του λόγου. Δεν θα ήταν λάθος να την γράψω, αλλά θα ήταν πλεονασμός. Επίσης, ανέφερα απλώς ότι η σειρά συγκλίνει, αφού, και πάλι επειδή η σειρά έχει μη-αρνητικούς όρους, η απόλυτη σύγκλιση και η σύγκλιση ταυτίζονται.
(iv) Για την τέταρτη σειρά, με $x_n = \frac{3^n n!}{n^n}$ έχουμε $x_{n+1} = \frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$ οπότε

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{3^{n+1}(n+1)! n^n}{3^n n! (n+1)^{n+1}} = \frac{3(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{3}{(1+\frac{1}{n})^n} \to \frac{3}{e} > 1.$$

Άρα η σειρά αποκλίνει (και μάλιστα στο $+\infty$ αφού έχει μη-αρνητικούς όρους).
(v) Για την πέμπτη σειρά, με $x_n = (-1)^{n-1} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ έχουμε $x_{n+1} = (-1)^n \frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}$ οπότε

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \frac{((n+1)!)^2 (2n)!}{(n!)^2 (2(n+1))!} = \frac{(n!)^2 (n+1)^2 (2n)!}{(n!)^2 (2n+2)!} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \to \frac{1}{4} < 1.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει απολύτως και άρα συγκλίνει.
(vi) Για την έκτη σειρά, με $x_n = \frac{(-e)^n n!}{n^n}$ έχουμε $x_{n+1} = \frac{(-e)^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$ οπότε

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \frac{e^{n+1}(n+1)! n^n}{e^n n! (n+1)^{n+1}} = \frac{e(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n} \to 1.$$

Άρα από το κριτήριο λόγου δεν προκύπτει συμπέρασμα για την σειρά.
Η κατάσταση είναι όπως με τις απροσδιόριστες μορφές. Το κριτήριο λόγου δεν δίνει συμπέρασμα αλλά αυτό δεν σημαίνει ότι δεν θα μπορούσαμε με κάποιον άλλο τρόπο (πιθανόν κάποιο άλλο κριτήριο) να δούμε αν η σειρά συγκλίνει απολύτως ή συγκλίνει ή αποκλίνει. Απλώς χρειάζεται επιπλέον διερεύνηση.
(vii) Για την έβδομη σειρά, με $x_n = \frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}$ έχουμε $x_{n+1} = \frac{4^{n+1}((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}$ οπότε

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{4^{n+1}((n+1)!)^2(2n)!}{4^n(n!)^2(2(n+1))!} = \frac{4(n!)^2(n+1)^2(2n)!}{(n!)^2(2n+2)!} = \frac{4(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \to 1.$$

Άρα από το κριτήριο λόγου δεν προκύπτει συμπέρασμα για την σειρά.
(viii) Για την όγδοη σειρά, με $x_n = \frac{2\cdot5\cdot8\cdots(3n-1)}{1\cdot5\cdot9\cdots(4n-3)}$ έχουμε $x_{n+1} = \frac{2\cdot5\cdot8\cdots(3n-1)(3n+2)}{1\cdot5\cdot9\cdots(4n-3)(4n+1)}$ οπότε

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{3n+2}{4n+1} \to \frac{3}{4} < 1.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει.

9. *Εφαρμόστε το κριτήριο ρίζας σε όποιες από τις παρακάτω σειρές είναι αυτό δυνατό.*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-\tfrac{n+1}{2n-1})^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}(\tfrac{3n-1}{2n+1})^{2n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{n^3}{e^n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\tfrac{2^n}{(n+1)^n},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{n2^n}{(\sqrt[n]{n}+1)^n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}(-\tfrac{n}{n+1})^{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}(-e)^n(\tfrac{n}{n+1})^{n^2}.$$

Λύση: (i) Στην πρώτη σειρά είναι $x_n = (-\frac{n+1}{2n-1})^n$ οπότε

$$\sqrt[n]{|x_n|} = \frac{n+1}{2n-1} \to \frac{1}{2} < 1.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει απολύτως και άρα συγκλίνει.
(ii) Στην δεύτερη σειρά είναι $x_n = (\frac{3n-1}{2n+1})^{2n}$ οπότε

$$\sqrt[n]{x_n} = (\frac{3n-1}{2n+1})^2 \to \frac{9}{4} > 1.$$

Άρα η σειρά αποκλίνει.
Δείτε το σχόλιο στην τρίτη σειρά της προηγούμενης άσκησης. Δεν έγραψα την απόλυτη τιμή του x_n διότι είναι μη-αρνητικό.
(iii) Στην τρίτη σειρά είναι $x_n = \frac{n^3}{e^n}$ οπότε

$$\sqrt[n]{x_n} = \frac{(\sqrt[n]{n})^3}{e} \to \frac{1}{e} < 1.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει.
Πάλι το ίδιο σχόλιο. Επειδή η σειρά έχει μη-αρνητικούς όρους δεν έγραψα την απόλυτη τιμή του x_n και στο συμπέρασμα είπα απλώς ότι η σειρά συγκλίνει αφού, για τον ίδιο λόγο, η απόλυτη σύγκλιση και η σύγκλιση ταυτίζονται.
(iv) Στην τέταρτη σειρά είναι $x_n = (-1)^{n-1}\frac{2^n}{(n+1)^n}$ οπότε

$$\sqrt[n]{|x_n|} = \frac{2}{n+1} \to 0 < 1.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει απολύτως και άρα συγκλίνει.
(v) Στην πέμπτη σειρά είναι $x_n = \frac{n2^n}{(\sqrt[n]{n}+1)^n}$ οπότε

$$\sqrt[n]{x_n} = \frac{\sqrt[n]{n}\,2}{\sqrt[n]{n}+1} \to 1.$$

Άρα από το κριτήριο ρίζας δεν προκύπτει συμπέρασμα για την σειρά.
Το ίδιο σχόλιο όπως στην έκτη σειρά της προηγούμενης άσκησης. Το κριτήριο ρίζας δεν

δίνει συμπέρασμα αλλά αυτό δεν σημαίνει ότι δεν θα μπορούσαμε με κάποιον άλλο τρόπο να δούμε αν η σειρά συγκλίνει απολύτως ή συγκλίνει ή αποκλίνει.
(vi) Στην έκτη σειρά είναι $x_n = (-\frac{n}{n+1})^{n^2}$ οπότε

$$\sqrt[n]{|x_n|} = (\tfrac{n}{n+1})^n = \tfrac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \to \tfrac{1}{e} < 1.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει απολύτως και άρα συγκλίνει.
(vii) Στην έβδομη σειρά είναι $x_n = (-e)^n(\frac{n}{n+1})^{n^2}$ οπότε

$$\sqrt[n]{|x_n|} = e(\tfrac{n}{n+1})^n = \tfrac{e}{(1+\frac{1}{n})^n} \to 1.$$

Άρα από το κριτήριο ρίζας δεν προκύπτει συμπέρασμα για την σειρά.

10. *Εξετάστε ως προς την σύγκλιση και την απόλυτη σύγκλιση τις σειρές:*

$$\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{4/3}}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{3/4}}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}+1}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}n^2}{3^n},$$

$$\textstyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\log n}, \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\log^2 n}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\log\big(1+\frac{1}{n}\big),$$

$$\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[n]{n}}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\sin\frac{1}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\big(1-\cos\frac{1}{n}\big).$$

Λύση: (i) Στην πρώτη σειρά έχουμε

$$\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} \big|\frac{(-1)^{n-1}}{n^{4/3}}\big| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{4/3}} < +\infty.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει απολύτως και άρα συγκλίνει.
Προσέξτε ότι από το κριτήριο λόγου καθώς και από το κριτήριο ρίζας δεν προκύπτει συμπέρασμα για την σειρά. Έχουμε $x_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^{4/3}}$ οπότε $x_{n+1} = \frac{(-1)^n}{(n+1)^{4/3}}$ και άρα

$$\big|\tfrac{x_{n+1}}{x_n}\big| = \tfrac{n^{4/3}}{(n+1)^{4/3}} = \big(\tfrac{n}{n+1}\big)^{4/3} \to 1, \qquad \sqrt[n]{|x_n|} = \tfrac{1}{(\sqrt[n]{n})^{4/3}} \to 1.$$

(ii) Στην δεύτερη σειρά έχουμε

$$\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} \big|\frac{(-1)^{n-1}}{n^{3/4}}\big| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/4}} = +\infty.$$

Άρα η σειρά δεν συγκλίνει απολύτως.
Όπως στην πρώτη σειρά, πάλι από το κριτήριο λόγου καθώς και από το κριτήριο ρίζας δεν προκύπτει συμπέρασμα για την σειρά.
Στην σειρά εφαρμόζεται το κριτήριο εναλλασσόμενων προσήμων. Έχουμε $\frac{1}{n^{3/4}} \downarrow 0$ οπότε η σειρά συγκλίνει.
(iii) Στην τρίτη σειρά έχουμε

$$\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} \big|\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}+1}\big| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+1}.$$

Από κριτήρια λόγου και ρίζας δεν προκύπτει συμπέρασμα. *Δοκιμάστε τα.* Θα συγκρίνουμε με απλούστερη σειρά.

$$\tfrac{1}{\sqrt{n}+1} = \tfrac{1}{\sqrt{n}}\,\tfrac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} \qquad \text{και} \qquad \tfrac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} \to 1.$$

Επειδή $0 < 1 < +\infty$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1/2}} = +\infty$, συνεπάγεται

$$\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} \big|\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}+1}\big| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+1} = +\infty.$$

Άρα η σειρά δεν συγκλίνει απολύτως.
Η σύγκριση θα μπορούσε να γίνει και με απλούστερο τρόπο. Επειδή $\frac{1}{\sqrt{n}+1} \geq \frac{1}{2\sqrt{n}}$ (ελέγξτε το), έχουμε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}+1}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+1} \geq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty.$$

Επειδή $\frac{1}{\sqrt{n}+1} \downarrow 0$, από το κριτήριο εναλλασσόμενων προσήμων έχουμε ότι η σειρά συγκλίνει.
Ας ξαναγυρίσουμε στο θέμα της απόλυτης σύγκλισης. Επειδή $\frac{1}{\sqrt{n}+1} \downarrow 0$, το αν συγκλίνει ή όχι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+1}$ θα μπορούσαμε να το εξετάσουμε και με το ολοκληρωτικό κριτήριο αλλά αυτό είναι κάπως περίπλοκο. Ας το δοκιμάσουμε. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$ η οποία είναι φθίνουσα και ≥ 0 στο $[1, +\infty)$. Έχουμε ότι

$$\int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}+1}\,dt = 2\int_1^{\sqrt{x}} \frac{u}{u+1}\,du = 2\int_1^{\sqrt{x}} \left(1 - \frac{1}{u+1}\right) du = 2\sqrt{x} - 2 - 2\log(\sqrt{x}+1) + 2\log 2$$

οπότε

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}+1}\,dt &= \lim_{x\to+\infty} (2\sqrt{x} - 2 - 2\log(\sqrt{x}+1) + 2\log 2)\\ &= 2\lim_{y\to+\infty} (y - 1 - \log(y+1) + \log 2)\\ &= 2\lim_{y\to+\infty} y\left(1 - \frac{1}{y} - \frac{\log(y+1)}{y} + \frac{\log 2}{y}\right) = +\infty.\end{aligned}$$

Μπορεί πάλι να γίνει μία απλή σύγκριση. Επειδή $\frac{1}{\sqrt{t}+1} \geq \frac{1}{2\sqrt{t}}$ για $t \geq 1$, έχουμε ότι

$$\int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}+1}\,dt \geq \frac{1}{2}\int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \sqrt{x} - 1$$

οπότε, επειδή $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x}-1) = +\infty$, παίρνουμε

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}+1}\,dt = +\infty.$$

Τώρα, από το $\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}+1}\,dt = +\infty$ παίρνουμε ότι $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+1} = +\infty$.
(iv) Στην τέταρτη σειρά εφαρμόζονται τα κριτήρια λόγου και ρίζας. Είναι $x_n = \frac{(-1)^{n-1}n^2}{3^n}$ οπότε $x_{n+1} = \frac{(-1)^n(n+1)^2}{3^{n+1}}$ και άρα

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \frac{(n+1)^2 3^n}{n^2 3^{n+1}} = \frac{(n+1)^2}{3n^2} \to \frac{1}{3} < 1, \qquad \sqrt[n]{|x_n|} = \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{3} \to \frac{1}{3} < 1.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει απολύτως και άρα συγκλίνει.
Για να εξετάσουμε την απόλυτη σύγκλιση θα μπορούσαμε να γράψουμε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^{n-1}n^2}{3^n}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{3^n}$$

αλλά η σειρά η οποία προκύπτει δεν μπορεί να εξεταστεί εύκολα συγκρίνοντας με απλούστερη σειρά ούτε με το ολοκληρωτικό κριτήριο (γίνεται αλλά είναι κάπως περίπλοκο) οπότε πάλι θα καταφεύγαμε στα κριτήρια λόγου και ρίζας.
(v) Για την πέμπτη σειρά γράφουμε

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n\log n}\right| = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\log n}.$$

Στην άσκηση 7 είδαμε με το ολοκληρωτικό κριτήριο ότι $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\log n} = +\infty$, οπότε η σειρά μας δεν συγκλίνει απολύτως.
Όμως, επειδή $\frac{1}{n\log n} \downarrow 0$, εφαρμόζεται το κριτήριο εναλλασσόμενων προσήμων και καταλήγουμε στο ότι η σειρά συγκλίνει.

Πάλι σχετικά με την απόλυτη σύγκλιση, μπορείτε να ελέγξετε (κάντε το) ότι δεν εφαρμόζεται κανένα από τα κριτήρια λόγου και ρίζας.

(vi) Για την έκτη σειρά έχουμε

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left|\tfrac{(-1)^{n-1}}{n\log^2 n}\right| = \sum_{n=2}^{+\infty} \tfrac{1}{n\log^2 n}.$$

Στην άσκηση 7 είδαμε με το ολοκληρωτικό κριτήριο ότι $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\log^2 n} < +\infty$, οπότε η σειρά μας συγκλίνει απολύτως και άρα συγκλίνει.

Και πάλι μπορείτε να ελέγξετε ότι δεν εφαρμόζεται κανένα από τα κριτήρια λόγου και ρίζας.

(vii) Για την έβδομη σειρά γράφουμε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|(-1)^{n-1}\log\left(1+\tfrac{1}{n}\right)\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1+\tfrac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \log\tfrac{n+1}{n}.$$

Στην άσκηση 4 είδαμε (ως τηλεσκοπική) την αντίθετη σειρά: $\sum_{n=1}^{+\infty} \log\frac{n}{n+1} = -\infty$. Άρα $\sum_{n=1}^{+\infty} \log\frac{n+1}{n} = +\infty$, οπότε η σειρά μας δεν συγκλίνει απολύτως.

Επίσης, στην άσκηση 5 χρησιμοποιήσαμε το όριο

$$\lim_{x\to 0} \tfrac{\log(1+x)}{x} = 1.$$

Με το όριο αυτό μπορούμε να κάνουμε σύγκριση της σειράς με απλούστερη σειρά (όπως στην άσκηση 5):

$$\log\left(1+\tfrac{1}{n}\right) = \tfrac{1}{n}\,\tfrac{\log(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} \qquad \text{και} \qquad \tfrac{\log(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} \to 1.$$

Επειδή $0 < 1 < +\infty$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$, έχουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|(-1)^{n-1}\log\left(1+\tfrac{1}{n}\right)\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1+\tfrac{1}{n}\right) = +\infty$$

οπότε η σειρά μας δεν συγκλίνει απολύτως.

Τέλος, επειδή η λογαριθμική συνάρτηση είναι αύξουσα και $\frac{1}{n} \downarrow 0$, έχουμε ότι $\log(1+\frac{1}{n}) \downarrow 0$ οπότε από το κριτήριο εναλλασσόμενων προσήμων παίρνουμε ότι η σειρά μας συγκλίνει.

(viii) Στην όγδοη σειρά προσέχουμε ότι ο n-οστός όρος $\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[n]{n}}$ δεν τείνει στο 0. Μάλιστα δεν έχει καν όριο: η υπακολουθία άρτιων δεικτών τείνει στο -1 και η υπακολουθία περιττών δεικτών τείνει στο 1. Άρα η σειρά αποκλίνει.

Πρέπει να πω ότι σε όλες τις προηγούμενες σειρές (και στις επόμενες) κοίταξα πρώτα-πρώτα αν ο n-οστός όρος τείνει στο 0. Αυτή η σειρά είναι η μόνη στην οποία ο n-οστός όρος δεν τείνει στο 0.

(ix) Για την ένατη σειρά γράφουμε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|(-1)^{n-1}\sin\tfrac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\tfrac{1}{n}.$$

Στην άσκηση 5 χρησιμοποιήσαμε το όριο

$$\lim_{x\to 0} \tfrac{\sin x}{x} = 1.$$

Όπως στην άσκηση 5, θα κάνουμε σύγκριση της σειράς με απλούστερη σειρά:

$$\sin\tfrac{1}{n} = \tfrac{1}{n}\,\tfrac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \qquad \text{και} \qquad \tfrac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \to 1.$$

Επειδή $0 < 1 < +\infty$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$, έχουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|(-1)^{n-1}\sin\tfrac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\tfrac{1}{n} = +\infty$$

οπότε η σειρά μας δεν συγκλίνει απολύτως.
Τέλος, επειδή η $\sin x$ είναι αύξουσα στο $[0,\pi]$ και $\frac{1}{n}\downarrow 0$, έχουμε ότι $\sin\frac{1}{n}\downarrow 0$ οπότε από το κριτήριο εναλλασσόμενων προσήμων παίρνουμε ότι η σειρά μας συγκλίνει.
(x) Για την δέκατη σειρά γράφουμε

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\big|(-1)^{n-1}\big(1-\cos\tfrac{1}{n}\big)\big|=\sum_{n=1}^{+\infty}\big(1-\cos\tfrac{1}{n}\big).$$

Όπως πριν, χρησιμοποιούμε το όριο

$$\lim_{x\to 0}\tfrac{1-\cos x}{x^2}=\tfrac{1}{2}$$

και θα κάνουμε σύγκριση της σειράς με απλούστερη σειρά:

$$1-\cos\tfrac{1}{n}=\tfrac{1}{n^2}\,\tfrac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}\qquad\text{και}\qquad\tfrac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}\to\tfrac{1}{2}.$$

Επειδή $0<\frac{1}{2}<+\infty$ και $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}<+\infty$, έχουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\big|(-1)^{n-1}\big(1-\cos\tfrac{1}{n}\big)\big|=\sum_{n=1}^{+\infty}\big(1-\cos\tfrac{1}{n}\big)<+\infty$$

οπότε η σειρά μας συγκλίνει απολύτως και άρα συγκλίνει.

11. *Βρείτε τα διαστήματα σύγκλισης των δυναμοσειρών*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\tfrac{x^n}{2^n},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}n^3x^n,\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{2^nx^n}{n^2},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}n^nx^n,\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{(-1)^nn}{n^2+1}x^n,$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{1}{n^n}x^n,\quad \sum_{n=0}^{+\infty}\tfrac{2^n}{n!}x^n,\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{n^n}{(n+1)^n}x^n,\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}x^n.$$

Μην παραβλέψετε τα άκρα των διαστημάτων σύγκλισης.
Λύση: (i) Με $a_n=\frac{1}{2^n}$ έχουμε

$$\tfrac{a_{n+1}}{a_n}=\tfrac{2^n}{2^{n+1}}=\tfrac{1}{2}\to\tfrac{1}{2},\qquad \sqrt[n]{a_n}=\tfrac{1}{2}\to\tfrac{1}{2}.$$

Με δύο τρόπους βλέπουμε ότι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R=2$. Άρα το διάστημα σύγκλισης είναι το $(-2,2)$ μαζί, ίσως, με κάποια από τα άκρα του. Δοκιμάζουμε αν η δυναμοσειρά συγκλίνει σε κάποιο από τα άκρα ± 2.
Για $x=2$ και $x=-2$ παίρνουμε τις σειρές

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\tfrac{2^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}1,\qquad \sum_{n=0}^{+\infty}\tfrac{(-2)^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n$$

οι οποίες αποκλίνουν αφού οι n-οστοί όροι τους δεν τείνουν στο 0.
Άρα το διάστημα σύγκλισης είναι το $(-2,2)$.
(ii) Με $a_n=n^3$ έχουμε

$$\tfrac{a_{n+1}}{a_n}=\tfrac{(n+1)^3}{n^3}\to 1,\qquad \sqrt[n]{a_n}=(\sqrt[n]{n})^3\to 1.$$

Άρα η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R=1$. Άρα το διάστημα σύγκλισης είναι το $(-1,1)$ μαζί, ίσως, με κάποια από τα άκρα του.
Για $x=1$ και $x=-1$ παίρνουμε τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{+\infty}n^3=+\infty,\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^nn^3$$

οι οποίες αποκλίνουν αφού οι n-οστοί όροι τους δεν τείνουν στο 0.
Άρα το διάστημα σύγκλισης είναι το $(-1,1)$.
(iii) Με $a_n=\frac{2^n}{n^2}$ έχουμε

$$\tfrac{a_{n+1}}{a_n}=\tfrac{2^{n+1}n^2}{2^n(n+1)^2}=\tfrac{2n^2}{(n+1)^2}\to 2,\qquad \sqrt[n]{a_n}=\tfrac{2}{(\sqrt[n]{n})^2}\to 2.$$

Άρα η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = \frac{1}{2}$.
Για $x = \frac{1}{2}$ και $x = -\frac{1}{2}$ παίρνουμε τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Γνωρίζουμε ότι η πρώτη σειρά συγκλίνει. Η δεύτερη σειρά συγκλίνει απολύτως (και άρα συγκλίνει) διότι η σειρά με τις απόλυτες τιμές των όρων της είναι η πρώτη σειρά.
Άρα το διάστημα σύγκλισης είναι το $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.
(iv) Με $a_n = n^n$ έχουμε

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = (1 + \frac{1}{n})^n (n+1) \to +\infty, \qquad \sqrt[n]{a_n} = n \to +\infty.$$

Άρα η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = 0$ οπότε το διάστημα σύγκλισης είναι το μονοσύνολο $\{0\}$: η σειρά συγκλίνει μόνο όταν $x = 0$.
(v) Με $a_n = \frac{(-1)^n n}{n^2+1}$ έχουμε

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)(n^2+1)}{n((n+1)^2+1)} \to 1.$$

Δεν δοκιμάζουμε το $\sqrt[n]{|a_n|}$ διότι είναι κάπως πιο περίπλοκο.
Άρα η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = 1$.
Για $x = 1$ και $x = -1$ παίρνουμε τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1}(-1)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2+1}.$$

Η δεύτερη σειρά (έχει μη-αρνητικούς όρους) αποκλίνει στο $+\infty$. Αυτό το βλέπουμε π.χ. συγκρίνοντας με την σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, η οποία αποκλίνει στο $+\infty$, μέσω των:

$$\frac{n}{n^2+1} = \frac{1}{n} \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} \qquad \text{και} \qquad \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} \to 1.$$

Η πρώτη σειρά δεν συγκλίνει απολύτως διότι η σειρά με τις απόλυτες τιμές των όρων της είναι η δεύτερη σειρά. Όμως το κριτήριο εναλλασσόμενων προσήμων λέει ότι η πρώτη σειρά συγκλίνει αφού $\frac{n}{n^2+1} \downarrow 0$. Άρα το διάστημα σύγκλισης είναι το $(-1, 1]$.
(vi) Με $a_n = \frac{1}{n^n}$ έχουμε

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n (n+1)} \to 0, \qquad \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{n} \to 0.$$

Άρα η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = +\infty$ οπότε το διάστημα σύγκλισης είναι το $(-\infty, +\infty)$: η σειρά συγκλίνει για κάθε x.
(vii) Με $a_n = \frac{2^n}{n!}$ έχουμε

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1} n!}{2^n (n+1)!} = \frac{2}{n+1} \to 0.$$

Δεν δοκιμάζουμε το $\sqrt[n]{|a_n|}$ διότι είναι κάπως πιο περίπλοκο.
Άρα η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = +\infty$ οπότε το διάστημα σύγκλισης είναι το $(-\infty, +\infty)$: η σειρά συγκλίνει για κάθε x.
(viii) Με $a_n = \frac{n^n}{(n+1)^n}$ έχουμε

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{n}{n+1} \to 1.$$

Δεν δοκιμάζουμε το $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ διότι είναι πιο περίπλοκο.
Άρα η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = 1$.
Για $x = 1$ και $x = -1$ παίρνουμε τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^n}{(n+1)^n}.$$

Επειδή

$$\frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \to \frac{1}{e},$$

η πρώτη σειρά αποκλίνει αφού ο n-οστός όρος της δεν τείνει στο 0. Για τον ίδιο λόγο και η δεύτερη σειρά αποκλίνει. Η υπακολουθίες των άρτιων και των περιττών δεικτών του n-οστού όρου της τείνουν στο $\frac{1}{e}$ και στο $-\frac{1}{e}$ αντιστοίχως.
Άρα το διάστημα σύγκλισης είναι το $(-1, 1)$.
(ix) Με $a_n = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$ έχουμε

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{n}{(n+1)\sqrt[n]{n+1}} \to 1.$$

Δεν δοκιμάζουμε το $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ διότι είναι πιο περίπλοκο.
Άρα η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = 1$.
Για $x = 1$ και $x = -1$ παίρνουμε τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

Η πρώτη σειρά (έχει μη-αρνητικούς όρους) αποκλίνει στο $+\infty$. Αυτό το βλέπουμε π.χ. συγκρίνοντας με την σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, η οποία αποκλίνει στο $+\infty$, μέσω των:

$$\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{n}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n})^n} \qquad \text{και} \qquad \frac{1}{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n})^n} \to \frac{1}{e}.$$

Η δεύτερη σειρά δεν συγκλίνει απολύτως διότι η σειρά με τις απόλυτες τιμές των όρων της είναι η πρώτη σειρά. Όμως από το κριτήριο εναλλασσόμενων προσήμων έχουμε ότι η δεύτερη σειρά συγκλίνει αφού

$$\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)(1+\frac{1}{n})^n} \downarrow 0.$$

(Η $n+1$ είναι αύξουσα και έχει όριο $+\infty$ και η $(1+\frac{1}{n})^n$ είναι αύξουσα και έχει όριο e.)
Άρα το διάστημα σύγκλισης είναι το $[-1, 1)$.

12. *Χρησιμοποιήστε γνωστές σειρές Taylor για να βρείτε συνοπτικούς τύπους για τις δυναμοσειρές*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(1-2^n)x^n, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\log^n a}{n!}x^n,$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{2n}}{(2n)!}x^{2n}, \qquad \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n-1}{n!}x^n, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n)!}x^{2n},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n}x^{2n}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n-1}x^{2n-1}.$$

Λύση: Οι σειρές Taylor τις οποίες θα θεωρήσουμε γνωστές είναι της συνάρτησης $\frac{1}{1-x}$ (δηλαδή η γεωμετρική σειρά), της εκθετικής συνάρτησης e^x, των τριγωνομετρικών συναρτήσεων $\cos x$ και $\sin x$ και της λογαριθμικής συνάρτησης $\log \frac{1}{1-x}$. Οι σειρές αυτές με τα διαστήματα σύγκλισής τους είναι:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, && -1 < x < 1\\
&e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{1}{n!}\, x^n, && -\infty < x < +\infty\\
&\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n}, && -\infty < x < +\infty\\
&\sin x = \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\, x^{2n-1}, && -\infty < x < +\infty\\
&\log \tfrac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{1}{n}\, x^n, && -1 \le x < 1
\end{aligned}$$

(i) Χωρίζουμε την πρώτη δυναμοσειρά σε δύο γεωμετρικές δυναμοσειρές:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(1-2^n)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty}(2x)^n = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-2x}.$$

(ii) Στην δεύτερη δυναμοσειρά εμφανίζονται όλα τα παραγοντικά οπότε μάλλον σχετίζεται με την σειρά Taylor της e^x:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(-x^2)^n = e^{-x^2}.$$

(iii) Ομοίως:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\log^n a}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(x \log a)^n = e^{x \log a} = a^x.$$

(iv) Στην τέταρτη δυναμοσειρά εμφανίζονται τα παραγοντικά μόνο των άρτιων αριθμών και με εναλλασσόμενα πρόσημα οπότε μάλλον σχετίζεται με την σειρά Taylor της $\cos x$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n}}{(2n)!} x^{2n} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (2x)^{2n} = -\cos(2x).$$

(v) Στην πεμπτη δυναμοσειρά εμφανίζονται όλα τα παραγοντικά οπότε μάλλον σχετίζεται με την σειρά Taylor της e^x. Απλώς πρέπει να χωρίσουμε σε δύο δυναμοσειρές ώστε να γίνει κάποια απλοποίηση:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n-1}{n!} x^n &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{n!} x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n \\
&= x \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n \\
&= x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n \\
&= x(e^x - 1) - (e^x - 1 - x) = xe^x - e^x + 1.
\end{aligned}$$

(vi)-(vii) Οι επόμενες δύο δυναμοσειρές είναι τα δύο "μισά κομμάτια" της σειράς Taylor της e^x: το ένα έχει τους άρτιους δείκτες και το άλλο τους περιττούς. Επίσης, δεν έχουν εναλλασσόμενα πρόσημα (αν είχαν θα σχετίζονταν με τις σειρές Taylor των $\cos x$ και $\sin x$). Γενικά, όταν έχουμε την σειρά Taylor μίας συνάρτησης σε διάστημα με κέντρο το σημείο 0, δηλαδή

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \qquad -R < x < R,$$

τότε υπάρχει ένας απλός τρόπος να "χωρίσουμε" τα κομμάτια με τους άρτιους και τους περιττούς δείκτες. Θέτουμε $-x$ στην θέση του x και έχουμε

$$f(-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n x^n, \qquad -R < x < R.$$

Τώρα προσθέτουμε και μετά αφαιρούμε τις δύο ισότητες και χρησιμοποιούμε το ότι

$$1 + (-1)^n = \begin{cases} 2 & \text{για άρτιο } n \\ 0 & \text{για περιττό } n \end{cases} \qquad 1 - (-1)^n = \begin{cases} 0 & \text{για άρτιο } n \\ 2 & \text{για περιττό } n \end{cases}$$

Καταλήγουμε στους τύπους:

$$f(x) + f(-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (1 + (-1)^n) a_n x^n = 2 \sum_{n \text{ άρτιο}} a_n x^n = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k} x^{2k}$$

και

$$f(x) - f(-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (1 - (-1)^n) a_n x^n = 2 \sum_{n \text{ περιττό}} a_n x^n = 2 \sum_{k=1}^{+\infty} a_{2k-1} x^{2k-1}.$$

Επομένως, στην ειδική περίπτωση που έχουμε παίρνουμε:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$$

και

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)!} x^{2k-1} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x.$$

(viii)-(ix) Τα ίδια αλλά με την σειρά Taylor της $\log \frac{1}{1-x}$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k} x^{2k} = \frac{1}{2}\Big(\log \frac{1}{1-x} + \log \frac{1}{1+x} \Big) = \frac{1}{2} \log \frac{1}{1-x^2}.$$

και

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k-1} x^{2k-1} = \frac{1}{2}\Big(\log \frac{1}{1-x} - \log \frac{1}{1+x} \Big) = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}.$$