Απειροστικός Λογισμός Ι, χειμερινό εξάμηνο 2018-19.

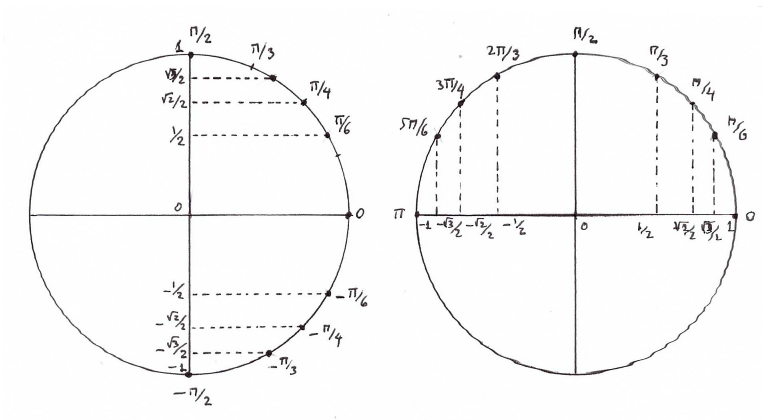
Λύσεις δεύτερου φυλλαδίου ασκήσεων.

1. *Βρείτε τα* arccos *και* arcsin *των* 0, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, ± 1.
Λύση: Στο διάστημα $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ είναι (κατά αύξουσα διάταξη των γωνιών και άρα κατά αύξουσα διάταξη των ημιτόνων τους):

$$\sin(-\tfrac{\pi}{2}) = -1, \quad \sin(-\tfrac{\pi}{3}) = -\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin(-\tfrac{\pi}{4}) = -\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin(-\tfrac{\pi}{6}) = -\tfrac{1}{2},$$
$$\sin 0 = 0, \quad \sin\tfrac{\pi}{6} = \tfrac{1}{2}, \quad \sin\tfrac{\pi}{4} = \tfrac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin\tfrac{\pi}{3} = \tfrac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\tfrac{\pi}{2} = 1.$$

Άρα έχουμε αντιστοίχως:

$$\arcsin(-1) = -\tfrac{\pi}{2}, \quad \arcsin(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}) = -\tfrac{\pi}{3}, \quad \arcsin(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}) = -\tfrac{\pi}{4}, \quad \arcsin(-\tfrac{1}{2}) = -\tfrac{\pi}{6},$$
$$\arcsin 0 = 0, \quad \arcsin\tfrac{1}{2} = \tfrac{\pi}{6}, \quad \arcsin\tfrac{\sqrt{2}}{2} = \tfrac{\pi}{4}, \quad \arcsin\tfrac{\sqrt{3}}{2} = \tfrac{\pi}{3}, \quad \arcsin 1 = \tfrac{\pi}{2}.$$



Στο διάστημα $[0, \pi]$ είναι (κατά αύξουσα διάταξη των γωνιών και άρα κατά φθίνουσα διάταξη των συνημιτόνων τους):

$$\cos 0 = 1, \quad \cos\tfrac{\pi}{6} = \tfrac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\tfrac{\pi}{4} = \tfrac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\tfrac{\pi}{3} = \tfrac{1}{2}, \quad \cos\tfrac{\pi}{2} = 0,$$
$$\cos\tfrac{2\pi}{3} = -\tfrac{1}{2}, \quad \cos\tfrac{3\pi}{4} = -\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\tfrac{5\pi}{6} = -\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\pi = -1.$$

Άρα έχουμε αντιστοίχως:

$$\arccos 1 = 0, \quad \arccos\tfrac{\sqrt{3}}{2} = \tfrac{\pi}{6}, \quad \arccos\tfrac{\sqrt{2}}{2} = \tfrac{\pi}{4}, \quad \arccos\tfrac{1}{2} = \tfrac{\pi}{3}, \quad \arccos 0 = \tfrac{\pi}{2},$$
$$\arccos(-\tfrac{1}{2}) = \tfrac{2\pi}{3}, \quad \arccos(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}) = \tfrac{3\pi}{4}, \quad \arccos(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}) = \tfrac{5\pi}{6}, \quad \arccos(-1) = \pi.$$

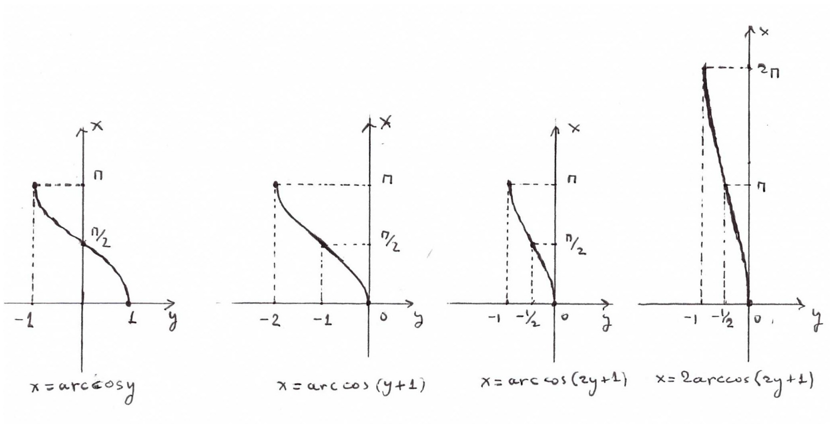
2. *(i) Αποδείξτε ότι* $\arccos y + \arcsin y = \frac{\pi}{2}$ *για κάθε* $y \in [-1, 1]$.
(ii) Αποδείξτε ότι $\arctan y + \operatorname{arccot} y = \frac{\pi}{2}$ *για κάθε* y.
Λύση: (i) Έστω $y \in [-1, 1]$ και $x = \arcsin y$. Αυτό σημαίνει ότι $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ και $\sin x = y$.
Ορίζουμε το $z = \frac{\pi}{2} - x$.
Τότε $z \in [0, \pi]$ και $\cos z = \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x = y$. Άρα

$$\arccos y = z = \tfrac{\pi}{2} - x = \tfrac{\pi}{2} - \arcsin y.$$

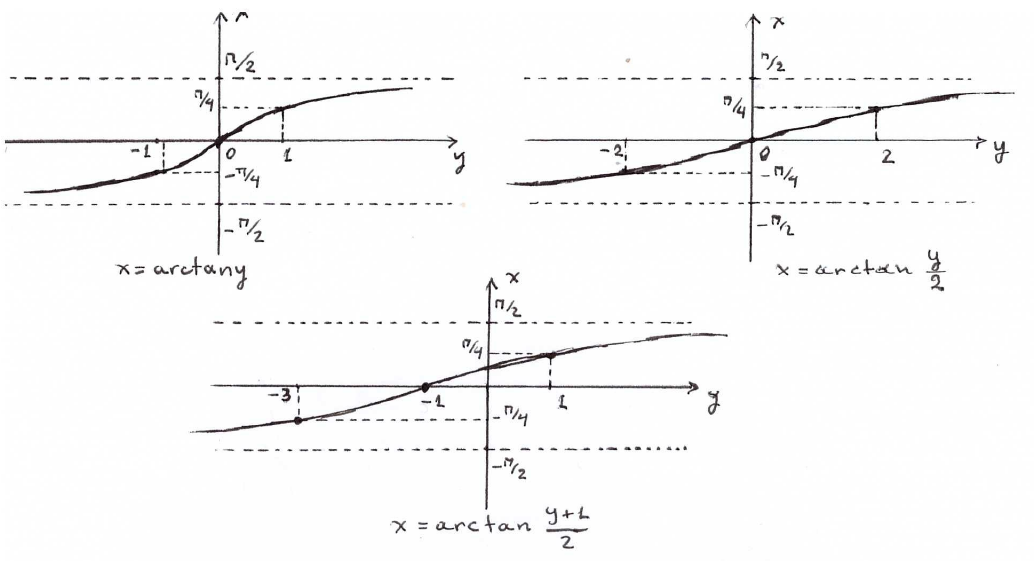
(ii) Έστω $x = \arctan y$. Αυτό σημαίνει ότι $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ και $\tan x = y$.
Ορίζουμε το $z = \frac{\pi}{2} - x$.
Τότε $z \in (0, \pi)$ και $\cot z = \cot(\frac{\pi}{2} - x) = \tan x = y$. Άρα

$$\operatorname{arccot} y = z = \tfrac{\pi}{2} - x = \tfrac{\pi}{2} - \arctan y.$$

3. *Σχεδιάστε τα γραφήματα των* $x = 2\arccos(2y+1)$, $x = \arctan\frac{y+1}{2}$.
Λύση: (i) Μεταφέρουμε οριζόντια το γράφημα της $x = \arccos y$ κατά -1 και έτσι προκύπτει το γράφημα της $x = \arccos(y+1)$. Πολλαπλασιάζουμε τις y-συντεταγμένες των σημείων του τελευταίου γραφήματος με $\frac{1}{2}$ και προκύπτει το γράφημα της $x = \arccos(2y+1)$. Τέλος, πολλαπλασιάζουμε τις x-συντεταγμένες των σημείων του τελευταίου γραφήματος με 2 και προκύπτει το γράφημα της $x = 2\arccos(2y+1)$.



(i) Ξεκινάμε από το γράφημα της $x = \arctan y$ και πολλαπλασιάζουμε τις y-συντεταγμένες των σημείων του με 2 και προκύπτει το γράφημα της $x = \arctan\frac{y}{2}$. Μεταφέρουμε το τελευταίο γράφημα οριζόντια κατά -1 και προκύπτει το γράφημα της $x = \arctan\frac{y+1}{2}$.



4. *Βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της* $y = \arcsin\frac{x+2}{x-1}$.
Λύση: Το $\frac{x+2}{x-1}$ πρέπει να ανήκει στο $[-1,1]$. Εύκολα βλέπουμε ότι

$$-1 \le \tfrac{x+2}{x-1} \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \le -\tfrac{1}{2}.$$

Άρα το πεδίο ορισμού της $y = \arcsin\frac{x+2}{x-1}$ είναι το $(-\infty, -\frac{1}{2}]$.
Το σύνολο τιμών της συνάρτησης αποτελείται από εκείνα τα y για τα οποία η εξίσωση $\arcsin\frac{x+2}{x-1} = y$ με άγνωστο το x έχει τουλάχιστον μία λύση στο πεδίο ορισμού.
Αν $y \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, η εξίσωση $\arcsin\frac{x+2}{x-1} = y$ δεν έχει λύση.
Αν $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, τότε

$$\arcsin\tfrac{x+2}{x-1} = y \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{x+2}{x-1} = \sin y \quad \Leftrightarrow \quad (\sin y - 1)x = \sin y + 2.$$

Αν $\sin y = 1$ δηλαδή αν $y = \frac{\pi}{2}$, τότε η τελευταία εξίσωση δεν έχει λύση.
Αν $\sin y \neq 1$ δηλαδή αν $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, τότε η τελευταία εξίσωση έχει λύση:

$$x = \frac{\sin y + 2}{\sin y - 1}.$$

Βλέπουμε εύκολα ότι η λύση που βρήκαμε ανήκει στο πεδίο ορισμού $(-\infty, -\frac{1}{2}]$ της συνάρτησης. Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

5. *Ποιά είναι η αντίστροφη συνάρτηση της $y = \arcsin x$; Ποιό είναι το πεδίο ορισμού της και το σύνολο τιμών της;*
Λύση: Η συνάρτηση $x = \sin y$ με πεδίο ορισμού το $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ και σύνολο τιμών το $[-1, 1]$ έχει αντίστροφη συνάρτηση την $y = \arcsin x$ με πεδίο ορισμού το $[-1, 1]$ και σύνολο τιμών το $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Άρα η αντίστροφη συνάρτηση της $y = \arcsin x$ με πεδίο ορισμού το $[-1, 1]$ και σύνολο τιμών το $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ είναι η $x = \sin y$ με πεδίο ορισμού το $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ και σύνολο τιμών το $[-1, 1]$.
Προσοχή: η αντίστροφη συνάρτηση της $y = \arcsin x$ δεν είναι η συνηθισμένη συνάρτηση $x = \sin y$ η οποία έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$.

6. *Σχεδιάστε τα γραφήματα των $y = \arcsin(\sin x)$, $y = \arctan(\tan x)$.*
Λύση: (i) Έστω $x \in [-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi]$ για $k \in \mathbb{Z}$.
Τότε το $z = \sin x$ ανήκει στο $[-1, 1]$ και το $y = \arcsin(\sin x) = \arcsin z$ ορίστηκε ως ο (μοναδικός) αριθμός στο $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ με την ιδιότητα: $\sin y = z$. Δηλαδή:

$$\sin y = \sin x.$$

Από την εξίσωση αυτή προκύπτει το y από το x. Η εξίσωση έχει δύο λύσεις:

$$y = x + 2m\pi \quad \text{ή} \quad y = \pi - x + 2m\pi \qquad \text{με } m \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Επειδή $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, από την πρώτη δυνατότητα στην (1) έχουμε

$$-\frac{\pi}{2} \leq x + 2m\pi \leq \frac{\pi}{2}$$

ή, ισοδύναμα,

$$-\frac{\pi}{2} - 2m\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} - 2m\pi.$$

Από την αρχική μας υπόθεση $-\frac{\pi}{2} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + k\pi$ βλέπουμε ότι πρέπει να είναι $k = -2m$, δηλαδή ότι το k είναι άρτιος ακέραιος και ότι το y δίνεται από την

$$y = x - k\pi \qquad \text{όταν το } k \text{ είναι άρτιος ακέραιος.}$$

Πάλι, επειδή $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, από την δεύτερη δυνατότητα στην (1) έχουμε

$$-\frac{\pi}{2} \leq \pi - x + 2m\pi \leq \frac{\pi}{2}$$

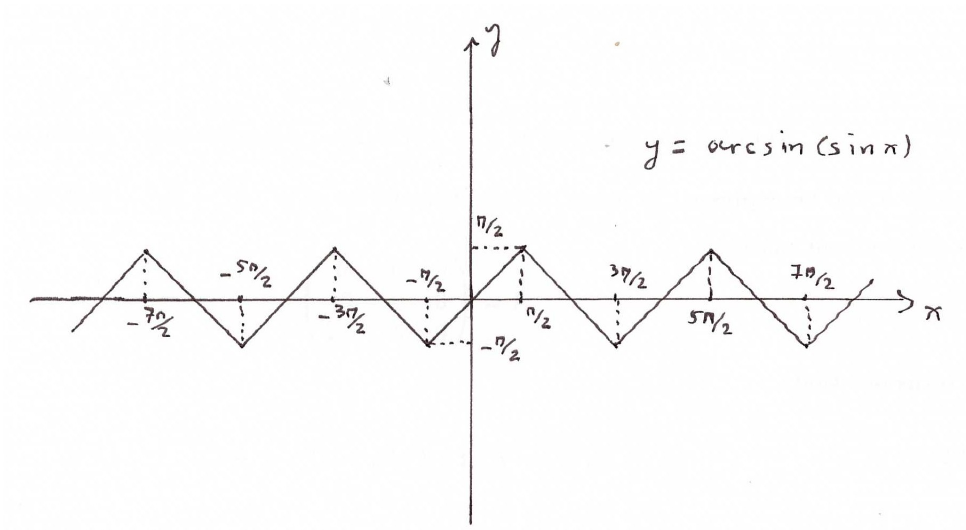
ή, ισοδύναμα,

$$-\frac{\pi}{2} + (2m+1)\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + (2m+1)\pi.$$

Από την αρχική μας υπόθεση $-\frac{\pi}{2} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + k\pi$ βλέπουμε ότι πρέπει να είναι $k = 2m + 1$, δηλαδή ότι το k είναι περιττός ακέραιος και ότι το y δίνεται από την

$$y = -x + k\pi \qquad \text{όταν το } k \text{ είναι περιττός ακέραιος.}$$

Όταν το k διατρέχει το $\mathbb{Z}$ τα αντίστοιχα διαστήματα $[-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi]$ είναι διαδοχικά και καλύπτουν ολόκληρο το $(-\infty, +\infty)$, οπότε το γράφημα της $y = \arcsin(\sin x)$ είναι το:



(ii) Έστω $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ για $k \in \mathbb{Z}$.
Τότε το $z = \tan x$ ανήκει στο $(-\infty, +\infty)$ και το $y = \arctan(\tan x) = \arctan z$ ορίστηκε ως ο (μοναδικός) αριθμός στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ με την ιδιότητα: $\tan y = z$. Δηλαδή:

$$\tan y = \tan x.$$

Από την εξίσωση αυτή προκύπτει το y από το x. Η εξίσωση έχει μία λύση:

$$y = x + m\pi \qquad \text{με } m \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Επειδή $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, έχουμε

$$-\tfrac{\pi}{2} < x + m\pi < \tfrac{\pi}{2}$$

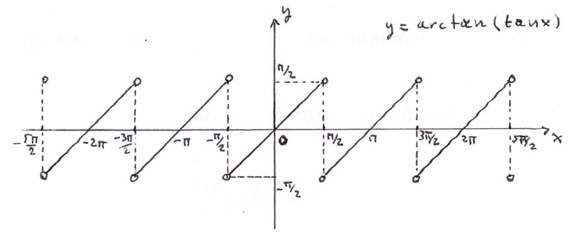
ή, ισοδύναμα,

$$-\tfrac{\pi}{2} - m\pi < x < \tfrac{\pi}{2} - 2m\pi.$$

Από την αρχική μας υπόθεση $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$ βλέπουμε ότι πρέπει να είναι $k = -m$ και ότι το y δίνεται από την

$$y = x - k\pi.$$

Όταν το k διατρέχει το $\mathbb{Z}$ τα αντίστοιχα διαστήματα $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ είναι διαδοχικά και καλύπτουν ολόκληρο το $(-\infty, +\infty)$ (εκτός από τα σημεία $\frac{\pi}{2} + k\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$) και παίρνουμε το γράφημα της $y = \arctan(\tan x)$:



7. *Βρείτε τα σύνολα των όρων των ακολουθιών* $\big(\frac{1+(-1)^{n-1}}{2}\big)$, $\big(\frac{a+b}{2} + (-1)^{n-1}\frac{a-b}{2}\big)$, $\big(n - 2[\frac{n}{2}]\big)$, $\big(n - 3[\frac{n}{3}]\big)$.

Λύση: (i) Για n άρτιο έχουμε ότι $\frac{1+(-1)^{n-1}}{2} = 0$ και για n περιττό ότι $\frac{1+(-1)^{n-1}}{2} = 1$. Άρα το σύνολο των όρων της ακολουθίας είναι το δισύνολο $\{0, 1\}$.

(ii) Για n άρτιο έχουμε ότι $\frac{a+b}{2} + (-1)^{n-1}\frac{a-b}{2} = b$ και για n περιττό ότι $\frac{a+b}{2} + (-1)^{n-1}\frac{a-b}{2} = a$. Άρα το σύνολο των όρων της ακολουθίας είναι το δισύνολο $\{a, b\}$.

(iii) Αν το $n = 2k$ είναι άρτιος, τότε το $\frac{n}{2} = k$ είναι ακέραιος, οπότε $[\frac{n}{2}] = [k] = k$ και άρα $n - 2[\frac{n}{2}] = 2k - 2k = 0$.
Αν το $n = 2k + 1$ είναι περιττός, τότε το $\frac{n}{2} = k + \frac{1}{2}$ είναι ανάμεσα στους ακέραιους k και $k + 1$, οπότε $[\frac{n}{2}] = [k + \frac{1}{2}] = k$ και άρα $n - 2[\frac{n}{2}] = 2k + 1 - 2k = 1$.
Άρα το σύνολο των όρων της ακολουθίας είναι το δισύνολο $\{0, 1\}$.

(iv) Αν $n = 3k$ με ακέραιο k, τότε το $\frac{n}{3} = k$ είναι ακέραιος, οπότε $[\frac{n}{3}] = [k] = k$ και άρα $n - 3[\frac{n}{3}] = 3k - 3k = 0$.
Αν $n = 3k + 1$ με ακέραιο k, τότε το $\frac{n}{3} = k + \frac{1}{3}$ είναι ανάμεσα στους ακέραιους k και $k + 1$, οπότε $[\frac{n}{3}] = [k + \frac{1}{3}] = k$ και άρα $n - 3[\frac{n}{3}] = 3k + 1 - 3k = 1$.
Αν $n = 3k + 2$ με ακέραιο k, τότε το $\frac{n}{3} = k + \frac{2}{3}$ είναι ανάμεσα στους ακέραιους k και $k + 1$, οπότε $[\frac{n}{3}] = [k + \frac{2}{3}] = k$ και άρα $n - 3[\frac{n}{3}] = 3k + 2 - 3k = 2$.
Άρα το σύνολο των όρων της ακολουθίας είναι το τρισύνολο $\{0, 1, 2\}$.

8. *Υπολογίστε τον n-οστό όρο καθεμίας από τις τέσσερις ακολουθίες οι οποίες ορίζονται από τους (κοινούς και για τις τέσσερις) πρώτους όρους $x_1 = x_2 = 1$ και από τους αναδρομικούς τύπους $x_{n+2} = 3x_n$, $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, $x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n$, $x_{n+2} = x_{n+1} - x_n$. (Υπόδειξη: Διαβάστε την άσκηση 2.1.4.)*

Λύση: (i) Βάσει του αναδρομικού τύπου $x_{n+2} = 3x_n$ κάθε όρος της ακολουθίας προσδιορίζει τον μεθεπόμενο όρο: από τον x_1 προσδιορίζονται οι όροι με περιττούς δείκτες και από τον x_2 προσδιορίζονται οι όροι με τους άρτιους δείκτες.
Έχουμε διαδοχικά:

$$x_1 = 1, \quad x_3 = 3x_1 = 3 = 3^1, \quad x_5 = 3x_3 = 3^2, \quad x_7 = 3x_5 = 3^3, \quad x_9 = 3x_7 = 3^4.$$

Υποψιαζόμαστε ότι

$$x_{2k-1} = 3^{k-1} \qquad \text{για κάθε } k \in \mathbb{N}$$

και το αποδεικνύουμε επαγωγικά. Το $x_{2k-1} = 3^{k-1}$ ισχύει για $k = 1$ αφού είναι το ίδιο με το $x_1 = 1$. Έστω ότι ισχύει $x_{2k-1} = 3^{k-1}$ για κάποιο $m \in \mathbb{N}$. Τότε

$$x_{2(m+1)-1} = x_{2m+1} = 3x_{2m-1} = 3 \cdot 3^{m-1} = 3^m = 3^{(m+1)-1}.$$

Άρα το $x_{2k-1} = 3^{k-1}$ ισχύει και για το $m + 1$.
Επίσης έχουμε διαδοχικά:

$$x_2 = 1, \quad x_4 = 3x_2 = 3 = 3^1, \quad x_6 = 3x_4 = 3^2, \quad x_8 = 3x_6 = 3^3, \quad x_{10} = 3x_8 = 3^4.$$

Υποψιαζόμαστε ότι

$$x_{2k} = 3^{k-1} \qquad \text{για κάθε } k \in \mathbb{N}$$

και το αποδεικνύουμε επαγωγικά. Το $x_{2k} = 3^{k-1}$ ισχύει για $k = 1$ αφού είναι το ίδιο με το $x_2 = 1$. Έστω ότι ισχύει $x_{2k} = 3^{k-1}$ για κάποιο $m \in \mathbb{N}$. Τότε

$$x_{2(m+1)} = x_{2m+2} = 3x_{2m} = 3 \cdot 3^{m-1} = 3^m = 3^{(m+1)-1}.$$

Άρα το $x_{2k} = 3^{k-1}$ ισχύει και για το $m + 1$.
Καταλήγουμε στον τύπο

$$x_n = \begin{cases} 3^{(n/2)-1}, & \text{αν } n \text{ είναι άρτιος} \\ 3^{(n-1)/2}, & \text{αν } n \text{ είναι περιττός} \end{cases}$$

Επίσης, ισχύει και ο τύπος

$$x_n = 3^{[(n-1)/2]}.$$

(ii) Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 = x + 2$. Αυτή έχει τις λύσεις: $\rho_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ και $\rho_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Προσδιορίζουμε κ, λ ώστε $\kappa + \lambda = x_1 = 1$ και $\kappa\rho_1 + \lambda\rho_2 = x_2 = 1$. Αυτά είναι τα:

$\kappa = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ και $\lambda = -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$.
Τώρα μπορούμε να αποδείξουμε επαγωγικά ότι

$$x_n = \kappa\rho_1^{n-1} + \lambda\rho_2^{n-1} \qquad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Η σχέση αυτή ισχύει για $n = 1$ και για $n = 2$ αφού για $n = 1$ γίνεται $\kappa + \lambda = x_1 = 1$ και για $n = 2$ γίνεται $\kappa\rho_1 + \lambda\rho_2 = x_2 = 1$.
Τώρα έστω ότι για κάποιο $m \in \mathbb{N}$ η σχέση ισχύει όταν το n είναι ίσο με m και όταν το n είναι ίσο με $m + 1$. Τότε

$$\begin{aligned} x_{m+2} &= x_{m+1} + x_m = (\kappa\rho_1^m + \lambda\rho_2^m) + (\kappa\rho_1^{m-1} + \lambda\rho_2^{m-1}) \\ &= \kappa\rho_1^{m-1}(\rho_1 + 1) + \lambda\rho_2^{m-1}(\rho_2 + 1) = \kappa\rho_1^{m+1} + \lambda\rho_2^{m+1} \end{aligned}$$

οπότε η σχέση ισχύει και όταν το n είναι ίσο με $m + 2$. Άρα ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε ότι:

$$x_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\big)^{n-1} - \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\big)^{n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\big)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\big)^n \ \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

(iii) Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 = 2x - 1$. Αυτή έχει την μοναδική λύση: $\rho = 1$. Προσδιορίζουμε κ, λ ώστε $\kappa = x_1 = 1$ και $\kappa\rho + \lambda\rho = x_2 = 1$. Αυτά είναι τα: $\kappa = 1$ και $\lambda = 0$.
Τώρα μπορούμε να αποδείξουμε επαγωγικά ότι

$$x_n = \kappa\rho^{n-1} + \lambda(n-1)\rho^{n-1} \qquad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Η σχέση αυτή ισχύει για $n = 1$ και για $n = 2$ αφού για $n = 1$ γίνεται $\kappa = x_1 = 1$ και για $n = 2$ γίνεται $\kappa\rho + \lambda\rho = x_2 = 1$.
Τώρα έστω ότι για κάποιο $m \in \mathbb{N}$ η σχέση ισχύει όταν το n είναι ίσο με m και όταν το n είναι ίσο με $m + 1$. Τότε

$$\begin{aligned} x_{m+2} &= 2x_{m+1} - x_m = 2(\kappa\rho^m + \lambda m\rho^m) - (\kappa\rho^{m-1} + \lambda(m-1)\rho^{m-1}) \\ &= \kappa\rho^{m-1}(2\rho - 1) + \lambda\rho^{m-1}(2m\rho - m + 1) = \kappa\rho^{m+1} + \lambda(m+1)\rho^{m+1} \end{aligned}$$

οπότε η σχέση ισχύει και όταν το n είναι ίσο με $m + 2$. Άρα ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Πιο συγκεκριμένα (με $\kappa = 1$, $\lambda = 0$ και $\rho = 1$), έχουμε ότι:

$$x_n = 1 \qquad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

(iv) Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 = x - 1$. Αυτή έχει τις μιγαδικές λύσεις: $\rho_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ και $\rho_2 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$. Παρατηρούμε ότι $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ και $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, οπότε $\rho_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$ και $\rho_2 = \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}$. Προσδιορίζουμε κ, λ ώστε $\kappa = x_1 = 1$ και $\kappa\cos\frac{\pi}{3} + \lambda\sin\frac{\pi}{3} = x_2 = 1$.
Αυτά είναι τα: $\kappa = 1$ και $\lambda = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
Τώρα μπορούμε να αποδείξουμε επαγωγικά ότι

$$x_n = \kappa\cos\frac{(n-1)\pi}{3} + \lambda\sin\frac{(n-1)\pi}{3} \qquad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Η σχέση αυτή ισχύει για $n = 1$ και για $n = 2$ αφού για $n = 1$ γίνεται $\kappa = x_1 = 1$ και για $n = 2$ γίνεται $\kappa\cos\frac{\pi}{3} + \lambda\sin\frac{\pi}{3} = x_2 = 1$.
Τώρα έστω ότι για κάποιο $m \in \mathbb{N}$ η σχέση ισχύει όταν το n είναι ίσο με m και όταν το n είναι ίσο με $m + 1$. Τότε

$$\begin{aligned} x_{m+2} &= x_{m+1} - x_m = \big(\kappa\cos\frac{m\pi}{3} + \lambda\sin\frac{m\pi}{3}\big) - \big(\kappa\cos\frac{(m-1)\pi}{3} + \lambda\sin\frac{(m-1)\pi}{3}\big) \\ &= \kappa\big(\cos\frac{m\pi}{3} - \cos\frac{(m-1)\pi}{3}\big) + \lambda\big(\sin\frac{m\pi}{3} - \sin\frac{(m-1)\pi}{3}\big) \\ &= \kappa\cos\frac{(m+1)\pi}{3} + \lambda\sin\frac{(m+1)\pi}{3}. \end{aligned}$$

οπότε η σχέση ισχύει και όταν το n είναι ίσο με $m + 2$. Άρα ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε ότι:

$$x_n = \cos\frac{(n-1)\pi}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{(n-1)\pi}{3} \qquad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

9. *Αποδείξτε ότι οι ακολουθίες* $(n^4/2^n)$ *και* $(8^n/n!)$ *δεν είναι μονότονες αλλά και ότι είναι μονότονες από κάποια τιμή του δείκτη και πέρα. Είναι φραγμένες;*

Λύση: (i) Έστω $x_n = \frac{n^4}{2^n}$. Ελέγχουμε την γνήσια μονοτονία της ακολουθίας:

$$x_n < x_{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n^4}{2^n} < \frac{(n+1)^4}{2^{n+1}} \quad \Leftrightarrow \quad 2 < (1+\frac{1}{n})^4 \quad \Leftrightarrow \quad n < \frac{1}{\sqrt[4]{2}-1} \approx 5.285.$$

Ομοίως,

$$x_n > x_{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n^4}{2^n} > \frac{(n+1)^4}{2^{n+1}} \quad \Leftrightarrow \quad 2 > (1+\frac{1}{n})^4 \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{1}{\sqrt[4]{2}-1} \approx 5.285.$$

Άρα

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6 > x_7 > x_8 > \dots .$$

Δηλαδή η ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα μέχρι τον έκτο όρο της και γνησίως φθίνουσα από τον έκτο όρο της και πέρα. Η ακολουθία είναι φραγμένη: όλοι οι όροι της βρίσκονται ανάμεσα στο 0 και στον έκτο όρο της.

(ii) Έστω $x_n = \frac{8^n}{n!}$. Ελέγχουμε την γνήσια μονοτονία της ακολουθίας:

$$x_n < x_{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{8^n}{n!} < \frac{8^{n+1}}{(n+1)!} \quad \Leftrightarrow \quad n+1 < 8 \quad \Leftrightarrow \quad n < 7.$$

Ομοίως,

$$x_n > x_{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{8^n}{n!} > \frac{8^{n+1}}{(n+1)!} \quad \Leftrightarrow \quad n+1 > 8 \quad \Leftrightarrow \quad n > 7.$$

Άρα

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6 < x_7 = x_8 > x_9 > x_{10} > x_{11} > \dots .$$

Δηλαδή η ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα μέχρι τον έβδομο όρο της και γνησίως φθίνουσα από τον όγδοο όρο της και πέρα. Η ακολουθία είναι φραγμένη: όλοι οι όροι της βρίσκονται ανάμεσα στο 0 και στον έβδομο όρο της.

10. *Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορίου, δηλαδή παίρνοντας* $\epsilon > 0$ *και υπολογίζοντας κατάλληλο* $n_0 \in \mathbb{N}$ *συναρτήσει του* ϵ*, όπως στα παραδείγματα, αποδείξτε ότι*

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0, \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^n \to 0, \quad \frac{2n+3}{3n+5} \to \frac{2}{3}, \quad \frac{\sin n}{n\sqrt{n}} \to 0, \quad \frac{1}{2^n+3n} \to 0.$$

Λύση: (i) Παίρνουμε τυχαίο $\epsilon > 0$ και θα βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{\sqrt{n}}\right| < \epsilon.$$

Λύνουμε την ανισότητα $|\frac{1}{\sqrt{n}}| < \epsilon$, δηλαδή την $\frac{1}{\sqrt{n}} < \epsilon$, ως προς n:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{1}{\epsilon^2}.$$

Άρα αρκεί να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad n > \frac{1}{\epsilon^2}.$$

Αυτή η συνεπαγωγή ισχύει αν θεωρήσουμε ως n_0 οποιονδήποτε φυσικό μεγαλύτερο από τον αριθμό $\frac{1}{\epsilon^2}$. Ο μικρότερος φυσικός ο οποίος είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό $\frac{1}{\epsilon^2}$ δίνεται από τον τύπο

$$\left[\frac{1}{\epsilon^2}\right] + 1.$$

Άρα μπορούμε να θεωρήσουμε οποιονδήποτε φυσικό

$$n_0 \geq \left[\frac{1}{\epsilon^2}\right] + 1.$$

(ii) Παίρνουμε τυχαίο $\epsilon > 0$ και θα βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \left|\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n\right| < \epsilon.$$

Λύνουμε την ανισότητα $|(-\frac{1}{2})^n| < \epsilon$, δηλαδή την $\frac{1}{2^n} < \epsilon$, ως προς n:

$$\tfrac{1}{2^n} < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad 2^n > \tfrac{1}{\epsilon} \quad \Leftrightarrow \quad n > \log_2 \tfrac{1}{\epsilon}.$$

Άρα αρκεί να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad n > \log_2 \tfrac{1}{\epsilon}.$$

Αυτή η συνεπαγωγή ισχύει αν θεωρήσουμε ως n_0 οποιονδήποτε φυσικό μεγαλύτερο από τον αριθμό $\log_2 \frac{1}{\epsilon}$. Ο μικρότερος φυσικός ο οποίος είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό $\log_2 \frac{1}{\epsilon}$ δίνεται από τον τύπο

$$\begin{cases} [\log_2 \frac{1}{\epsilon}] + 1, & \text{αν } 0 < \epsilon \leq 1 \\ 1, & \text{αν } 1 < \epsilon \end{cases}$$

Άρα μπορούμε να θεωρήσουμε οποιονδήποτε φυσικό

$$n_0 \geq \begin{cases} [\log_2 \frac{1}{\epsilon}] + 1, & \text{αν } 0 < \epsilon \leq 1 \\ 1, & \text{αν } 1 < \epsilon \end{cases}$$

(iii) Παίρνουμε τυχαίο $\epsilon > 0$ και θα βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \left|\tfrac{2n+3}{3n+5} - \tfrac{2}{3}\right| < \epsilon.$$

Λύνουμε την ανισότητα $|\frac{2n+3}{3n+5} - \frac{2}{3}| < \epsilon$ ως προς n:

$$\left|\tfrac{2n+3}{3n+5} - \tfrac{2}{3}\right| < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{3(3n+5)} < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad n > \tfrac{1}{9\epsilon} - \tfrac{5}{3}.$$

Άρα αρκεί να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad n > \tfrac{1}{9\epsilon} - \tfrac{5}{3}.$$

Όπως στις προηγούμενες περιπτώσεις, αυτή η συνεπαγωγή ισχύει αν θεωρήσουμε ως n_0 οποιονδήποτε φυσικό μεγαλύτερο από τον αριθμό $\frac{1}{9\epsilon} - \frac{5}{3}$. Ο μικρότερος φυσικός ο οποίος είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό $\frac{1}{9\epsilon} - \frac{5}{3}$ δίνεται από τον τύπο

$$\begin{cases} [\frac{1}{9\epsilon} - \frac{5}{3}] + 1, & \text{αν } 0 < \epsilon \leq \frac{1}{15} \\ 1, & \text{αν } \frac{1}{15} < \epsilon \end{cases}$$

Άρα μπορούμε να θεωρήσουμε οποιονδήποτε φυσικό

$$n_0 \geq \begin{cases} [\frac{1}{9\epsilon} - \frac{5}{3}] + 1, & \text{αν } 0 < \epsilon \leq \frac{1}{15} \\ 1, & \text{αν } \frac{1}{15} < \epsilon \end{cases}$$

(iv) Παίρνουμε τυχαίο $\epsilon > 0$ και θα βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \left|\tfrac{\sin n}{n\sqrt{n}}\right| < \epsilon.$$

Η ανισότητα $|\frac{\sin n}{n\sqrt{n}}| < \epsilon$, δηλαδή η $\frac{|\sin n|}{n\sqrt{n}} < \epsilon$, δεν λύνεται ως προς n λόγω της μορφής που έχει. Βρίσκουμε κάποια παράσταση του n μεγαλύτερη και απλούστερη από την $\frac{|\sin n|}{n\sqrt{n}}$:

$$\tfrac{|\sin n|}{n\sqrt{n}} \leq \tfrac{1}{n\sqrt{n}}.$$

Άρα αρκεί να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n\sqrt{n}} < \epsilon.$$

Λύνουμε την ανισότητα $\frac{1}{n\sqrt{n}} < \epsilon$ ως προς n:

$$\frac{1}{n\sqrt{n}} < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{1}{\epsilon^{2/3}}.$$

Άρα αρκεί να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad n > \frac{1}{\epsilon^{2/3}}.$$

Ο μικρότερος φυσικός ο οποίος είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό $\frac{1}{\epsilon^{2/3}}$ δίνεται από τον τύπο

$$\left[\frac{1}{\epsilon^{2/3}}\right] + 1.$$

Άρα μπορούμε να θεωρήσουμε οποιονδήποτε φυσικό

$$n_0 \geq \left[\frac{1}{\epsilon^{2/3}}\right] + 1.$$

(v) Παίρνουμε τυχαίο $\epsilon > 0$ και θα βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{2^n+3n}\right| < \epsilon.$$

Η ανισότητα $\left|\frac{1}{2^n+3n}\right| < \epsilon$, δηλαδή η $\frac{1}{2^n+3n} < \epsilon$, δεν λύνεται ως προς n λόγω της μορφής που έχει. Βρίσκουμε κάποια παράσταση του n μεγαλύτερη και απλούστερη από την $\frac{1}{2^n+3n}$:

$$\frac{1}{2^n+3n} \leq \frac{1}{n}.$$

Άρα αρκεί να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n} < \epsilon.$$

Λύνουμε την ανισότητα $\frac{1}{n} < \epsilon$ ως προς n:

$$\frac{1}{n} < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{1}{\epsilon}.$$

Άρα αρκεί να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad n > \frac{1}{\epsilon}.$$

Ο μικρότερος φυσικός ο οποίος είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό $\frac{1}{\epsilon}$ δίνεται από τον τύπο

$$\left[\frac{1}{\epsilon}\right] + 1.$$

Άρα μπορούμε να θεωρήσουμε οποιονδήποτε φυσικό

$$n_0 \geq \left[\frac{1}{\epsilon}\right] + 1.$$