Απειροστικός Λογισμός Ι, χειμερινό εξάμηνο 2018-19.

Λύσεις τέταρτου φυλλαδίου ασκήσεων.

1. Αποδείξτε ότι:

$$\frac{n-(n+3)^2-7n\sqrt{n}}{(n+1)(\sqrt{n}+1)^2}\to -1,\qquad \frac{5^n-3^{n+7}}{2^{n-1}-5^{n+2}}\to -\frac{1}{25},\qquad \frac{2+\log(n\sqrt{n})}{7-2\log n}\to -\frac{3}{4},$$

$$\sqrt{n^2+n}-n\to\frac{1}{2},\qquad \Big(\frac{n(n+1)}{n+2}-\frac{n^3}{n^2+1}\Big)^3\to -1,$$

$$\frac{(1+2+2^2+\cdots+2^n)^2}{1+4+4^2+\cdots+4^n}\to 3,\qquad \frac{1}{1+2}\,\frac{2}{2+2}\,\frac{3}{3+2}\cdots\frac{n-1}{n+1}\,\frac{n}{n+2}\to 0,$$

$$3n-2n\sin n\to+\infty,\qquad \frac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}}\to 1,\qquad \sqrt[n]{n^2+3n+1}\to 1,$$

$$\sqrt[n]{2^n+3^n}\to 3,\qquad \Big(1-\frac{1}{n^2}\Big)^n\to 1,\qquad \Big(1-\frac{1}{n}\Big)^{n^2}\to 0,$$

$$\Big(1+\frac{1}{n+2}\Big)^n\to e,\qquad \Big(1-\frac{1}{n}\Big)^n\to e^{-1},\qquad \Big(1+\frac{2}{n}\Big)^n\to e^2.$$

Λύσεις: (i) Η μέγιστη δύναμη του n στον αριθμητή είναι η n^2. Το ίδιο και στον παρονομαστή. Άρα

$$\frac{n-(n+3)^2-7n\sqrt{n}}{(n+1)(\sqrt{n}+1)^2}=\frac{n^2}{n^2}\,\frac{\frac{1}{n}-(1+\frac{3}{n})^2-\frac{7}{\sqrt{n}}}{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{\sqrt{n}})^2}\to\frac{0-(1+0)^2-0}{(1+0)(1+0)^2}=-1.$$

(ii) Ο όρος με την μεγαλύτερη τάξη μεγέθους στον αριθμητή και στον παρονομαστή είναι ο 5^n. Άρα

$$\frac{5^n-3^{n+7}}{2^{n-1}-5^{n+2}}=\frac{5^n}{5^n}\,\frac{1-3^7(\frac{3}{5})^n}{2^{-1}(\frac{2}{5})^n-5^2}\to\frac{1-0}{0-25}=-\frac{1}{25}.$$

(iii) Έχουμε ότι

$$\frac{2+\log(n\sqrt{n})}{7-2\log n}=\frac{2+\frac{3}{2}\log n}{7-2\log n}=\frac{\log n}{\log n}\,\frac{\frac{2}{\log n}+\frac{3}{2}}{\frac{7}{\log n}-2}\to\frac{0+\frac{3}{2}}{0-2}=-\frac{3}{4}.$$

(iv) Επειδή $\sqrt{n^2+n}\to+\infty$ και $n\to+\infty$, προκύπτει απροσδιόριστη μορφή. Όμως,

$$\sqrt{n^2+n}-n=\frac{(n^2+n)-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}=\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\frac{n}{n}\,\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\to\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{1}{2}.$$

(v) Επειδή $\frac{n(n+1)}{n+2}=\frac{n^2+n}{n+2}\to+\infty$ και $\frac{n^3}{n^2+1}\to+\infty$, προκύπτει απροσδιόριστη μορφή. Όμως,

$$\frac{n(n+1)}{n+2}-\frac{n^3}{n^2+1}=\frac{(n^2+n)(n^2+1)-n^3(n+2)}{(n+2)(n^2+1)}=\frac{-n^3+n^2+n}{n^3+2n^2+n+2}\to -1.$$

Άρα

$$\Big(\frac{n(n+1)}{n+2}-\frac{n^3}{n^2+1}\Big)^3\to(-1)^3=-1.$$

(vi) Με την γνωστή αλγεβρική ταυτότητα $1+x+x^2+\cdots+x^n=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ για $x\neq 1$ έχουμε ότι

$$\frac{(1+2+2^2+\cdots+2^n)^2}{1+4+4^2+\cdots+4^n}=\frac{(\frac{2^{n+1}-1}{2-1})^2}{\frac{4^{n+1}-1}{4-1}}=3\,\frac{(2^{n+1}-1)^2}{4^{n+1}-1}=3\,\frac{4^{n+1}}{4^{n+1}}\,\frac{(1-\frac{1}{2^{n+1}})^2}{1-\frac{1}{4^{n+1}}}\to 3\,\frac{(1-0)^2}{1-0}=3.$$

(vii) Απλοποιούμε:

$$\frac{1}{1+2}\,\frac{2}{2+2}\,\frac{3}{3+2}\cdots\frac{n-1}{n+1}\,\frac{n}{n+2}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdots(n-1)\cdot n}{3\cdot4\cdot5\cdots(n+1)\cdot(n+2)}=\frac{1\cdot2}{(n+1)\cdot(n+2)}=\frac{2}{(n+1)(n+2)}\to 0.$$

(viii) Από την ανισότητα $3n-2n\sin n\geq 3n-2n$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και από το ότι $3n-2n=n\to+\infty$ έχουμε ότι

$$3n-2n\sin n\to+\infty.$$

(ix) Επειδή η παράσταση $\sqrt{n}$ που βρίσκεται μέσα στο σύμβολο του ακέραιου μέρους έχει όριο $+\infty$, χρησιμοποιούμε την ανισότητα $[a] \leq a < [a]+1$ ή την ισοδύναμη $a-1 < [a] \leq a$ και έχουμε ότι

$$\tfrac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}} < \tfrac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}} \leq \tfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$$

οπότε

$$1 - \tfrac{1}{\sqrt{n}} < \tfrac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}} \leq 1$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επειδή $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$, από τον κανόνα παρεμβολής παίρνουμε ότι

$$\tfrac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}} \to 1.$$

(x) Από τις ανισότητες $n^2 < n^2 + 3n + 1 < n^2 + 3n^2 + n^2 = 5n^2$ έχουμε ότι

$$\sqrt[n]{n^2} < \sqrt[n]{n^2+3n+1} < \sqrt[n]{5n^2}$$

οπότε

$$(\sqrt[n]{n})^2 < \sqrt[n]{n^2+3n+1} < \sqrt[n]{5}\,(\sqrt[n]{n})^2$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επειδή $\sqrt[n]{5} \to 1$ και $\sqrt[n]{n} \to 1$, από τον κανόνα παρεμβολής παίρνουμε ότι

$$\sqrt[n]{n^2+3n+1} \to 1.$$

(xi) Από τις ανισότητες $3^n < 2^n + 3^n < 3^n + 3^n = 2 \cdot 3^n$ έχουμε ότι

$$3 < \sqrt[n]{2^n+3^n} < \sqrt[n]{2}\,3$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επειδή $\sqrt[n]{2} \to 1$, από τον κανόνα παρεμβολής παίρνουμε ότι

$$\sqrt[n]{2^n+3^n} \to 3.$$

(xii) Κατ' αρχάς είναι $(1 - \frac{1}{n^2})^n < 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, από την ανισότητα του Bernoulli έχουμε ότι

$$\left(1 - \tfrac{1}{n^2}\right)^n \geq 1 - \tfrac{n}{n^2} = 1 - \tfrac{1}{n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από την διπλή ανισότητα

$$1 - \tfrac{1}{n} \leq \left(1 - \tfrac{1}{n^2}\right)^n < 1$$

και από τον κανόνα παρεμβολής συνεπάγεται

$$\left(1 - \tfrac{1}{n^2}\right)^n \to 1.$$

(xiii) Είναι $(1 - \frac{1}{n})^{n^2} = (\frac{n-1}{n})^{n^2}$ και θεωρούμε την αντίστροφη ακολουθία: $(\frac{n}{n-1})^{n^2}$. (Προσοχή: αυτή ορίζεται για $n \geq 2$.) Από την ανισότητα του Bernoulli έχουμε ότι

$$\left(\tfrac{n}{n-1}\right)^{n^2} = \left(1 + \tfrac{1}{n-1}\right)^{n^2} \geq 1 + \tfrac{n^2}{n-1}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Επειδή $1 + \frac{n^2}{n-1} \to +\infty$, συνεπάγεται

$$\left(\tfrac{n}{n-1}\right)^{n^2} \to +\infty$$

και άρα

$$\left(1 - \tfrac{1}{n}\right)^{n^2} \to 0.$$

(xiv) Επειδή $(1+\frac{1}{n})^n \to e$, έχουμε ότι $(1+\frac{1}{n+2})^{n+2} \to e$. (Είναι ο γνωστός κανόνας ότι αν $x_n \to x$ τότε $x_{n+k} \to x$.) Άρα

$$(1+\tfrac{1}{n+2})^n = (1+\tfrac{1}{n+2})^{n+2}(1+\tfrac{1}{n+2})^{-2} \to e\cdot 1 = e.$$

(xv) Πάλι κάνουμε αναγωγή στο γνωστό όριο $(1+\frac{1}{n})^n \to e$ ως εξής:

$$\big(1-\tfrac{1}{n}\big)^n = \big(\tfrac{n-1}{n}\big)^n = \tfrac{1}{(\frac{n}{n-1})^n} = \tfrac{1}{(1+\frac{1}{n-1})^n} = \tfrac{1}{(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}(1+\frac{1}{n-1})} \to \tfrac{1}{e\cdot 1} = e^{-1}.$$

(xvi) Όπως πριν:

$$\begin{aligned}\big(1+\tfrac{2}{n}\big)^n &= \big(\tfrac{n+2}{n}\big)^n = \big(\tfrac{n+2}{n+1}\,\tfrac{n+1}{n}\big)^n = \big(\tfrac{n+2}{n+1}\big)^n\big(\tfrac{n+1}{n}\big)^n\\ &= \big(1+\tfrac{1}{n+1}\big)^{n+1}\big(1+\tfrac{1}{n+1}\big)^{-1}\big(1+\tfrac{1}{n}\big)^n \to e\cdot 1\cdot e = e^2.\end{aligned}$$

2. Αν $|x_n| \to 0$ αποδείξτε ότι $x_n \to 0$.
Λύση: Από την ανισότητα
$$-|x_n| \le x_n \le |x_n|$$
και τον κανόνα παρεμβολής.

3. Έστω $x_n \neq 1$ για κάθε n και $x \neq 1$. Αποδείξτε ότι $x_n \to x$ αν και μόνο αν $\frac{1+x_n}{1-x_n} \to \frac{1+x}{1-x}$.
Λύση: Το ότι από $x_n \to x$ συνεπάγεται το $\frac{1+x_n}{1-x_n} \to \frac{1+x}{1-x}$ προκύπτει από τους γνωστούς αλγεβρικούς κανόνες ορίων.
Για την αντίστροφη συνεπαγωγή, γράφουμε $y_n = \frac{1+x_n}{1-x_n}$ και $y = \frac{1+x}{1-x}$, οπότε η υπόθεσή μας είναι ότι $y_n \to y$. Τώρα λύνουμε τους τύπους ως προς x_n και x και βρίσκουμε
$$x_n = \tfrac{y_n-1}{y_n+1}, \qquad x = \tfrac{y-1}{y+1}.$$
(Από τους τύπους που ορίζουν τα y_n, y είναι εύκολο να δούμε ότι $y_n \neq -1$ και $y \neq -1$.)
Τώρα, όπως πριν, από τους γνωστούς αλγεβρικούς κανόνες ορίων προκύπτει ότι από $y_n \to y$ συνεπάγεται
$$x_n = \tfrac{y_n-1}{y_n+1} \to \tfrac{y-1}{y+1} = x.$$

4. Αν $n+1 \le nx_n \le n+x_n+2$ για κάθε n αποδείξτε ότι $x_n \to 1$.
Λύση: Από $n+1 \le nx_n$ συνεπάγεται $\frac{n+1}{n} \le x_n$. Ομοίως, από $nx_n \le n+x_n+2$ συνεπάγεται $x_n \le \frac{n+2}{n-1}$ (για $n \ge 2$). Άρα
$$\tfrac{n+1}{n} \le x_n \le \tfrac{n+2}{n-1}$$
για κάθε $n \ge 2$. Από τον κανόνα παρεμβολής έχουμε ότι $x_n \to 1$.

5. Αν $n^2x_n^2 - 2n(n-1)x_n + n^2 \le 2n+3$ για κάθε n αποδείξτε ότι $x_n \to 1$.
Λύση: Λύνουμε την ανισότητα δεύτερου βαθμού $n^2x_n^2 - 2n(n-1)x_n + n^2 \le 2n+3$ με άγνωστο το x_n και βρίσκουμε ότι
$$\tfrac{n-3}{n} \le x_n \le \tfrac{n+1}{n}$$
για κάθε n. Από τον κανόνα παρεμβολής συνεπάγεται $x_n \to 1$.

6. Έστω $3x_{n+1} = x_n^2 + 2$ για κάθε n.
(i) Αν $1 < x_1 < 2$ αποδείξτε ότι η (x_n) είναι γνησίως φθίνουσα και $x_n \to 1$.
(ii) Αν $x_1 > 2$ αποδείξτε ότι η (x_n) είναι γνησίως αύξουσα και $x_n \to +\infty$.
Λύση: (i) Για να είναι η (x_n) γνησίως φθίνουσα και να τείνει στο 1 θα πρέπει όλοι οι όροι της να είναι > 1, δηλαδή να ισχύει:
$$1 < \ldots < x_{n+1} < x_n < \ldots < x_2 < x_1 < 2. \tag{1}$$

Αρκεί επομένως να αποδείξουμε την συνεπαγωγή:

$$1 < x < 2 \quad \Rightarrow \quad 1 < \tfrac{x^2+2}{3} < x < 2. \tag{2}$$

Πράγματι, αν ισχύει η (2) τότε από $1 < x_1 < 2$ (το οποίο έχουμε υποθέσει) και από τον αναδρομικό τύπο συνεπάγεται $1 < x_2 < x_1 < 2$. Τώρα από $1 < x_2 < 2$ και από τον αναδρομικό τύπο συνεπάγεται $1 < x_3 < x_2 < 2$. Τώρα από $1 < x_3 < 2$ και από τον αναδρομικό τύπο συνεπάγεται $1 < x_4 < x_3 < 2$. Επαγωγικά προκύπτει η (1).
Το να αποδείξουμε την συνεπαγωγή (2) είναι απλό θέμα άλγεβρας και μπορείτε να το κάνετε εσείς.
Άρα αφού αποδείξουμε την (2) προκύπτει η (1) και άρα η (x_n) είναι γνησίως φθίνουσα και κάτω φραγμένη και επομένως συγκλίνει: $x_n \to x$ για κάποιο $x \in \mathbb{R}$. Από τον αναδρομικό τύπο $3x_{n+1} = x_n^2 + 2$ και τους κανόνες ορίων συνεπάγεται

$$3x = x^2 + 2$$

και άρα $x = 1$ ή $x = 2$. Επειδή $x_n \leq x_1 < 2$ για κάθε n, έχουμε $x \leq x_1 < 2$ οπότε $x = 1$.
(ii) Για να είναι η (x_n) γνησίως αύξουσα θα πρέπει να ισχύει:

$$2 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1} < \ldots . \tag{3}$$

Αρκεί επομένως να αποδείξουμε την συνεπαγωγή:

$$2 < x \quad \Rightarrow \quad 2 < x < \tfrac{x^2+2}{3}. \tag{4}$$

Πράγματι, αν ισχύει η (4) τότε από $2 < x_1$ (το οποίο έχουμε υποθέσει) και από τον αναδρομικό τύπο συνεπάγεται $2 < x_1 < x_2$. Τώρα από $2 < x_2$ και από τον αναδρομικό τύπο συνεπάγεται $2 < x_2 < x_3$. Τώρα από $2 < x_3$ και από τον αναδρομικό τύπο συνεπάγεται $2 < x_3 < x_4$. Επαγωγικά προκύπτει η (3).
Όπως στο (i), μπορείτε να αποδείξετε εύκολα την συνεπαγωγή (4) οπότε η (x_n) είναι γνησίως αύξουσα και άρα έχει όριο: $x_n \to x$ για κάποιο $x \in \mathbb{R}$ ή $x_n \to +\infty$.
Έστω $x_n \to x$ με $x \in \mathbb{R}$. Από τον αναδρομικό τύπο $3x_{n+1} = x_n^2 + 2$ και τους κανόνες ορίων συνεπάγεται

$$3x = x^2 + 2$$

και άρα $x = 1$ ή $x = 2$. Επειδή $x_n \geq x_1 > 2$ για κάθε n, παίρνουμε $x \geq x_1 > 2$ και καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $x_n \to +\infty$.

7. Έστω $x_{n+1} = 1 + \frac{6}{x_n}$ για κάθε n.
   (i) Αν $0 < x_1 < 3$ αποδείξτε ότι η υπακολουθία (x_{2k-1}) είναι γνησίως αύξουσα και άνω φραγμένη και η (x_{2k}) είναι γνησίως φθίνουσα και κάτω φραγμένη και ότι $x_n \to 3$.
   (ii) Τί γίνεται αν $x_1 > 3$;
   Λύση: (i) Για να μελετήσουμε τις υπακολουθίες των περιττών και των άρτιων δεικτών είναι λογικό να αναζητήσουμε μία αναδρομική σχέση ανάμεσα στον γενικό όρο της ακολουθίας και στον μεθεπόμενο όρο της:

$$x_{n+2} = 1 + \tfrac{6}{x_{n+1}} = 1 + \tfrac{6}{1+\frac{6}{x_n}} = 1 + \tfrac{6x_n}{x_n+6} = \tfrac{7x_n+6}{x_n+6}.$$

Άρα για την υπακολουθία των περιττών δεικτών ισχύει

$$x_{2k+1} = \tfrac{7x_{2k-1}+6}{x_{2k-1}+6}.$$

Μπορούμε να απλοποιήσουμε λίγο τα σύμβολα ορίζοντας

$$y_k = x_{2k-1}.$$

Δηλαδή $y_1 = x_1$, $y_2 = x_3$, $y_3 = x_5$, $y_4 = x_7$ και ούτω καθ' εξής. Οπότε είναι $0 < y_1 < 3$ και ο τελευταίος αναδρομικός τύπος γράφεται

$$y_{k+1} = \tfrac{7y_k+6}{y_k+6}.$$

Θα αποδείξουμε ότι η (y_k) είναι γνησίως αύξουσα και ότι $y_k \to 3$.
Όπως στην προηγούμενη άσκηση, πρώτα αποδεικνύουμε καθαρά αλγεβρικά την συνεπαγωγή:

$$0 < y < 3 \quad \Rightarrow \quad 0 < y < \tfrac{7y+6}{y+6} < 3.$$

Από αυτήν και από τον αναδρομικό τύπο συνεπάγεται επαγωγικά ότι

$$0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_k < y_{k+1} < \ldots < 3.$$

Άρα η (y_k) είναι γνησίως αύξουσα και άνω φραγμένη και επομένως συγκλίνει: $y_k \to y$ για κάποιο $y \in \mathbb{R}$. Από τον αναδρομικό τύπο $y_{k+1} = \frac{7y_k+6}{y_k+6}$ προκύπτει

$$y = \tfrac{7y+6}{y+6}.$$

Λύνουμε την εξίσωση και βρίσκουμε $y = 3$ ή $y = -2$. Επειδή $y_k > 0$ για κάθε k καταλήγουμε στο ότι $y_k \to 3$, δηλαδή

$$x_{2k-1} \to 3.$$

Για την υπακολουθία των άρτιων δεικτών ισχύει

$$x_{2k+2} = \tfrac{7x_{2k}+6}{x_{2k}+6}.$$

Πάλι για απλούστευση ορίζουμε

$$y_k = x_{2k}.$$

Δηλαδή $y_1 = x_2$, $y_2 = x_4$, $y_3 = x_6$, $y_4 = x_8$ και ούτω καθ' εξής.
Τώρα, από $0 < x_1 < 3$ και από $x_2 = 1 + \frac{6}{x_1}$ προκύπτει εύκολα ότι $3 < x_2$. Οπότε είναι $3 < y_1$ και ο τελευταίος αναδρομικός τύπος γράφεται

$$y_{k+1} = \tfrac{7y_k+6}{y_k+6}.$$

Θα αποδείξουμε ότι η (y_k) είναι γνησίως φθίνουσα και ότι $y_k \to 3$.
Όπως πριν, πρώτα αποδεικνύουμε την συνεπαγωγή:

$$3 < y \quad \Rightarrow \quad 3 < \tfrac{7y+6}{y+6} < y.$$

Από αυτήν συνεπάγεται επαγωγικά ότι

$$3 < \ldots < y_{k+1} < y_k < \ldots < y_2 < y_1.$$

Άρα η (y_k) είναι γνησίως φθίνουσα και κάτω φραγμένη και επομένως συγκλίνει: $y_k \to y$ για κάποιο $y \in \mathbb{R}$. Από τον αναδρομικό τύπο $y_{k+1} = \frac{7y_k+6}{y_k+6}$ προκύπτει

$$y = \tfrac{7y+6}{y+6}.$$

Λύνουμε την εξίσωση και βρίσκουμε $y = 3$ ή $y = -2$. Επειδή $y_k > 0$ για κάθε k καταλήγουμε στο ότι $y_k \to 3$, δηλαδή

$$x_{2k} \to 3.$$

Από $x_{2k-1} \to 3$ και $x_{2k} \to 3$ συνεπάγεται $x_n \to 3$.
(ii) Αν $x_1 > 3$, τότε επαναλαμβάνοντας τα προηγούμενα βλέπουμε ότι η υπακολουθία (x_{2k-1}) είναι γνησίως φθίνουσα και κάτω φραγμένη και η (x_{2k}) είναι γνησίως αύξουσα και άνω φραγμένη και ότι $x_n \to 3$.