Απειροστικός Λογισμός Ι, χειμερινό εξάμηνο 2018-19.

Λύσεις όγδοου φυλλαδίου ασκήσεων.

1. *Γράψτε σε μορφή ορίου*

   (i) την στιγμιαία επιτάχυνση οχήματος το οποίο κινείται σε ευθύ δρόμο.

   (ii) την στιγμιαία ταχύτητα και την στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα ενός οχήματος το οποίο κινείται σε κυκλικό δρόμο και βρείτε την σχέση ανάμεσα στις δύο αυτές ταχύτητες.

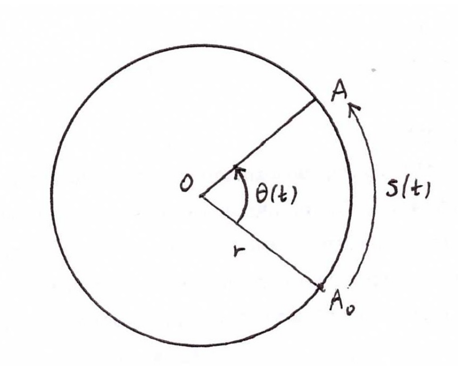
   Κατόπιν γράψτε τα προηγούμενα όρια σε μορφή παραγώγου.

   Λύση: Όλες οι ταχύτητες και επιταχύνσεις είναι αριθμητικές (όχι διανυσματικές.)

   (i) Η στιγμιαία επιτάχυνση $a(\tau)$ την χρονική στιγμή $t = \tau$ είναι ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας $v(t)$ την ίδια χρονική στιγμή. Δηλαδή είναι:

   $$a(\tau) = \lim_{t\to\tau} \tfrac{v(t)-v(\tau)}{t-\tau} = v'(\tau) = \tfrac{dv}{dt}\big|_{t=\tau}.$$

   (ii) Θεωρούμε ότι το όχημα A κινείται πάνω σε κυκλικό δρόμο κέντρου O και ακτίνας $r > 0$. Συμβολίζουμε $s(t)$ την απόσταση του A από ένα σταθερό σημείο A_0 του δρόμου την χρονική στιγμή t και $\theta(t)$ την αντίστοιχη γωνία ανάμεσα στις ακτίνες OA και OA_0.

   Η στιγμιαία ταχύτητα $v(\tau)$ την χρονική στιγμή $t = \tau$ είναι ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής της απόστασης $s(t)$ την ίδια χρονική στιγμή και η στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα $\omega(\tau)$ την χρονική στιγμή $t = \tau$ είναι ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής της γωνίας $\theta(t)$ την ίδια χρονική στιγμή. Δηλαδή:

   $$v(\tau) = \lim_{t\to\tau} \tfrac{s(t)-s(\tau)}{t-\tau} = s'(\tau) = \tfrac{ds}{dt}\big|_{t=\tau}$$

   και

   $$\omega(\tau) = \lim_{t\to\tau} \tfrac{\theta(t)-\theta(\tau)}{t-\tau} = \theta'(\tau) = \tfrac{d\theta}{dt}\big|_{t=\tau}.$$

   Επειδή $s(t) = r\theta(t)$ για κάθε t, συνεπάγεται $s'(\tau) = r\theta'(\tau)$ και άρα

   $$v(\tau) = r\omega(\tau).$$

2. *Βρείτε τα a, b ώστε η συνάρτηση* $y = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{αν } x < 1 \\ bx + 1 & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$ *να έχει παράγωγο στο* 1.

   Λύση: Η δεξιά πλευρική παράγωγος στο 1 της συνάρτησης είναι

   $$\lim_{x\to 1+} \tfrac{(bx+1)-(b+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1+} b = b.$$

   Επομένως πρέπει η αριστερή πλευρική παράγωγος στο 1 να υπάρχει και να είναι ίση με b:

   $$\lim_{x\to 1-} \tfrac{(x^2+ax+b)-(b+1)}{x-1} = b.$$

Ισοδύναμα

$$\lim_{x\to 1-} \tfrac{x^2+ax-1}{x-1} = b. \tag{1}$$

Συνεπάγεται

$$\lim_{x\to 1-}(x^2+ax-1) = \lim_{x\to 1-} \tfrac{x^2+ax-1}{x-1} \lim_{x\to 1-}(x-1) = b\cdot 0 = 0$$

και άρα

$$a = 0.$$

Με αυτήν την τιμή του a η (1) γίνεται

$$\lim_{x\to 1-} \tfrac{x^2-1}{x-1} = b.$$

Ισοδύναμα

$$b = \lim_{x\to 1-}(x+1) = 2.$$

3. *Βρείτε την σχέση ανάμεσα στα a, b η οποία είναι ισοδύναμη με το να εφάπτονται σε κάποιο κοινό τους σημείο τα γραφήματα των συναρτήσεων $y = ax^2 + 3$ και $y = x^2 + bx + 1$.*

   Λύση: Το να εφάπτονται τα γραφήματα σε κάποιο σημείο (x_0, y_0) σημαίνει ότι το σημείο (x_0, y_0) ανήκει και στα δύο γραφήματα (δηλαδή ότι ικανοποιεί και τις δύο εξισώσεις) και ότι τα δύο γραφήματα έχουν την ίδια εφαπτόμενη ευθεία στο κοινό τους σημείο (x_0, y_0). Η εφαπτόμενη ευθεία της $y = ax^2 + 3$ στο σημείο (x_0, y_0) έχει κλίση

$$\tfrac{d(ax^2+3)}{dx}\Big|_{x=x_0} = 2ax_0$$

και άρα έχει εξίσωση

$$y - y_0 = 2ax_0(x - x_0).$$

Η εφαπτόμενη ευθεία της $y = x^2 + bx + 1$ στο σημείο (x_0, y_0) έχει κλίση

$$\tfrac{d(x^2+bx+1)}{dx}\Big|_{x=x_0} = 2x_0 + b$$

και άρα έχει εξίσωση

$$y - y_0 = (2x_0 + b)(x - x_0).$$

Άρα τα δύο γραφήματα έχουν ίδια εφαπτόμενη ευθεία στο (x_0, y_0) αν και μόνο αν

$$2ax_0 = 2x_0 + b,$$

δηλαδή αν και μόνο αν οι δύο εφαπτόμενες ευθείες έχουν την ίδια κλίση.
Άρα τα δύο γραφήματα εφάπτονται σε κάποιο κοινό τους σημείο αν και μόνο αν

$$\begin{cases} y_0 = ax_0^2 + 3 \\ y_0 = x_0^2 + bx_0 + 1 \\ 2ax_0 = 2x_0 + b \end{cases} \tag{2}$$

(Οι πρώτες δύο εξισώσεις εκφράζουν το ότι το (x_0, y_0) είναι κοινό σημείο των δύο γραφημάτων και η τρίτη εξίσωση εκφράζει το ότι στο σημείο αυτό τα γραφήματα έχουν την ίδια εφαπτόμενη ευθεία.)
Από την τρίτη εξίσωση έχουμε ότι

$$2(a-1)x_0 = b.$$

Αν $a = 1$, τότε $b = 0$ οπότε οι δύο πρώτες εξισώσεις γίνονται $y_0 = x_0^2 + 3$ και $y_0 = x_0^2 + 1$ και καταλήγουμε σε άτοπο.
Άρα $a \neq 1$ και τότε

$$x_0 = \tfrac{b}{2(a-1)}.$$

Από τις δύο πρώτες εξισώσεις παίρνουμε

$$ax_0^2 + 3 = x_0^2 + bx_0 + 1$$

ή, ισοδύναμα,

$$(a-1)x_0^2 + 2 = bx_0.$$

Με την τιμή του x_0 που βρήκαμε η τελευταία εξίσωση είναι ισοδύναμη με

$$b^2 = 8(a-1). \tag{3}$$

Η σχέση (3) είναι η ζητούμενη. Πράγματι, παίρνοντας

$$x_0 = \tfrac{b}{2(a-1)},$$

ικανοποιείται η τρίτη εξίσωση του συστήματος (2). Παίρνοντας

$$y_0 = ax_0^2 + 3 = \tfrac{ab^2}{4(a-1)^2} + 3,$$

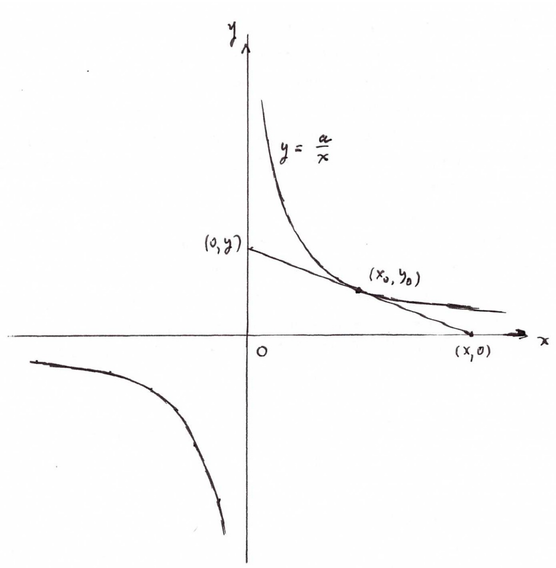
ικανοποιείται η πρώτη εξίσωση του συστήματος (2). Τότε, όμως, ικανοποιείται αυτομάτως και η δεύτερη εξίσωση του συστήματος (2), διότι λόγω της (3), έχουμε ότι

$$ax_0^2 + 3 = x_0^2 + bx_0 + 1.$$

4. *Αποδείξτε ότι αν πάρουμε οποιαδήποτε ευθεία εφαπτόμενη στην καμπύλη $xy = a$ $(a > 0)$ το ευθύγραμμο τμήμα της το οποίο αποκόπτεται από τον x-άξονα και τον y-άξονα διχοτομείται από το σημείο επαφής (της εφαπτόμενης ευθείας με την καμπύλη). Μπορείτε να θεωρήσετε οποιαδήποτε από τις x, y ως ανεξάρτητη μεταβλητή.*

   Λύση: Έστω ότι η ευθεία εφάπτεται στην καμπύλη στο σημείο (x_0, y_0). Φυσικά η καμπύλη είναι το γράφημα της συνάρτησης

$$y = \tfrac{a}{x}.$$



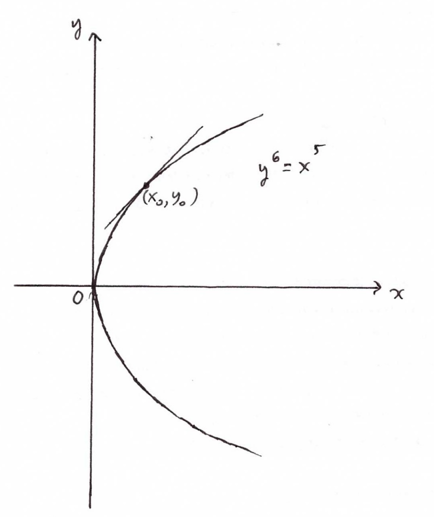
Άρα
$$y_0 = \tfrac{a}{x_0} \tag{4}$$
και η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας είναι ίση με
$$\tfrac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0} = -\tfrac{a}{x^2}\Big|_{x=x_0} = -\tfrac{a}{x_0^2}$$
οπότε η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας είναι
$$y - y_0 = -\tfrac{a}{x_0^2}\,(x - x_0). \tag{5}$$
Το σημείο τομής της εφαπτόμενης ευθείας με τον x-άξονα ικανοποιεί την εξίσωση (5) και έχει την μορφή $(x, 0)$. Βρίσκουμε επομένως το x από την
$$0 - y_0 = -\tfrac{a}{x_0^2}\,(x - x_0)$$
δηλαδή
$$x = \tfrac{x_0^2 y_0}{a} + x_0 = 2x_0$$
λόγω της (4).
Το σημείο τομής της εφαπτόμενης ευθείας με τον y-άξονα ικανοποιεί την εξίσωση (5) και έχει την μορφή $(0, y)$ οπότε βρίσκουμε το y από την
$$y - y_0 = -\tfrac{a}{x_0^2}\,(0 - x_0)$$
δηλαδή
$$y = \tfrac{a}{x_0} + y_0 = \tfrac{2a}{x_0}$$
λόγω της (4).
Άρα το σημείο επαφής και τα σημεία τομής της εφαπτόμενης ευθείας με τον x-άξονα και με τον y-άξονα είναι αντιστοίχως τα:
$$(x_0, y_0) = (x_0, \tfrac{a}{x_0}), \qquad (2x_0, 0), \qquad (0, \tfrac{2a}{x_0}).$$
Άρα το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα δύο τελευταία σημεία είναι το σημείο
$$\tfrac{1}{2}\,(2x_0 + 0, 0 + \tfrac{2a}{x_0}) = (x_0, \tfrac{a}{x_0}),$$
δηλαδή το σημείο επαφής.

5. *(i) Βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας σε κάθε σημείο της καμπύλης $y^6 = x^5$. Η λύση είναι απλούστερη αν θεωρήσετε την y ως ανεξάρτητη μεταβλητή και την x ως εξαρτημένη μεταβλητή. Αν θεωρήσετε την x ως ανεξάρτητη μεταβλητή τότε πρέπει να θεωρήσετε την καμπύλη ως ένωση των γραφημάτων των $y = x^{5/6}$ και $y = -x^{5/6}$ στο διάστημα $[0, +\infty)$ και να προσέξετε ιδιαιτέρως το σημείο $(0, 0)$ της καμπύλης.*

   (ii) Να επαναλάβετε τα προηγούμενα για την καμπύλη $y^4 = x^5$. Μήπως τώρα υπάρχει κάποιο πρόβλημα με την εφαπτόμενη ευθεία στο σημείο $(0, 0)$;

   Λύση: (i) Επειδή $x^5 = y^6 \geq 0$, πρέπει να είναι $x \geq 0$. Θεωρούμε την x ως ανεξάρτητη μεταβλητή και τότε έχουμε δύο τιμές για την y ως εξαρτημένη μεταβλητή: $y = x^{5/6}$ και $y = -x^{5/6}$. Άρα η καμπύλη είναι η ένωση του γραφήματος της συνάρτησης $y = x^{5/6}$ στο διάστημα $[0, +\infty)$ και του γραφήματος της συνάρτησης $y = -x^{5/6}$ στο ίδιο διάστημα. (Το πρώτο γράφημα είναι στο πρώτο τεταρτημόριο και το δεύτερο είναι στο τέταρτο τεταρτημόριο.)

   Έστω $x_0 > 0$ και το σημείο $(x_0, y_0) = (x_0, x_0^{5/6})$ στο άνω μέρος της καμπύλης. Η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας στο σημείο αυτό είναι
$$\tfrac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0} = \tfrac{5}{6}\,x_0^{-1/6}$$
   οπότε η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας είναι
$$y = \tfrac{5}{6}\,x_0^{-1/6}(x - x_0) + y_0 = \tfrac{5}{6}\,x_0^{-1/6}(x - x_0) + x_0^{5/6}.$$



Ομοίως, στο σημείο $(x_0, y_0) = (x_0, -x_0^{5/6})$ στο κάτω μέρος της καμπύλης η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας είναι

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0} = -\frac{5}{6}\, x_0^{-1/6}$$

οπότε η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας είναι

$$y = -\frac{5}{6}\, x_0^{-1/6}(x - x_0) + y_0 = -\frac{5}{6}\, x_0^{-1/6}(x - x_0) - x_0^{5/6}.$$

Τώρα έστω $x_0 = 0$ οπότε έχουμε το σημείο $(x_0, y_0) = (0, 0)$ της καμπύλης. Και οι δύο συναρτήσεις $y = x^{5/6}$ και $y = -x^{5/6}$ ορίζονται μόνο δεξιά του 0 οπότε ορίζονται οι δύο αντίστοιχες εφαπτόμενες ημιευθείες με αντίστοιχες κλίσεις

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0+} = \lim_{x\to 0+} \frac{x^{5/6}-0}{x-0} = \lim_{x\to 0+} x^{-1/6} = +\infty$$

και

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0+} = \lim_{x\to 0+} \frac{-x^{5/6}-0}{x-0} = -\lim_{x\to 0+} x^{-1/6} = -\infty.$$

Οι δύο αυτές ημιευθείες είναι αντίθετες: η πρώτη έχει κατεύθυνση προς τα πάνω και η δεύτερη προς τα κάτω. Άρα ορίζουν τον y-άξονα ως εφαπτόμενη ευθεία.

Αν θεωρήσουμε την y ως ανεξάρτητη μεταβλητή στο $(-\infty, +\infty)$, τότε η x ως εξαρτημένη μεταβλητή ορίζεται μέσω του τύπου

$$x = (y^6)^{1/5} = |y|^{6/5} = \begin{cases} y^{6/5}, & \text{αν } y \geq 0 \\ (-y)^{6/5}, & \text{αν } y \leq 0 \end{cases}$$

Αν $y_0 > 0$, στο σημείο $(x_0, y_0) = (y_0^{6/5}, y_0)$ η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας στο γράφημα της συνάρτησης είναι

$$\frac{dx}{dy}\Big|_{y=y_0} = \frac{6}{5}\, y_0^{1/5}$$

και η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας είναι η

$$x = \frac{6}{5}\, y_0^{1/5}(y - y_0) + x_0 = \frac{6}{5}\, y_0^{1/5}(y - y_0) + y_0^{6/5}.$$

Αν $y_0 < 0$, στο σημείο $(x_0, y_0) = ((-y_0)^{6/5}, y_0)$ η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας στο γράφημα της συνάρτησης είναι

$$\frac{dx}{dy}\Big|_{y=y_0} = -\frac{6}{5}\, (-y_0)^{1/5}$$

και η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας είναι η

$$x = -\tfrac{6}{5}\,(-y_0)^{1/5}(y-y_0) + x_0 = -\tfrac{6}{5}\,(-y_0)^{1/5}(y-y_0) + (-y_0)^{6/5}.$$

Αν $y_0 = 0$, στο σημείο $(x_0, y_0) = (0, 0)$ η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας στο γράφημα της συνάρτησης είναι

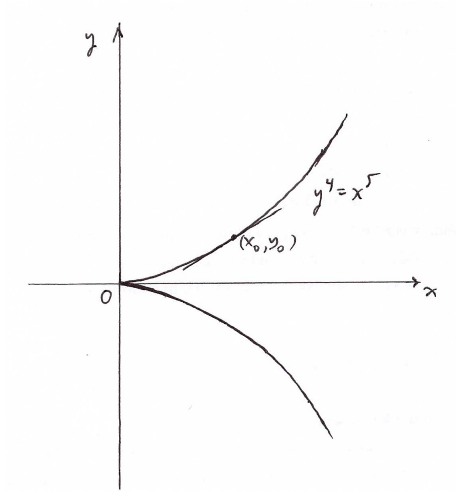
$$\tfrac{dx}{dy}\big|_{y=0} = 0$$

(γιατί;) και η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας είναι η

$$x = 0(y-0) + 0 = 0.$$

Αυτή είναι η εξίσωση του y-άξονα.

(ii) Επειδή $x^5 = y^4 \geq 0$, πρέπει να είναι $x \geq 0$. Θεωρούμε την x ως ανεξάρτητη μεταβλητή και έχουμε δύο τιμές για την y ως εξαρτημένη μεταβλητή: $y = x^{5/4}$ και $y = -x^{5/4}$. Άρα η καμπύλη είναι η ένωση του γραφήματος της συνάρτησης $y = x^{5/4}$ στο διάστημα $[0, +\infty)$ και του γραφήματος της συνάρτησης $y = -x^{5/4}$ στο ίδιο διάστημα. (Το πρώτο γράφημα είναι στο πρώτο τεταρτημόριο και το δεύτερο είναι στο τέταρτο τεταρτημόριο.)



Έστω $x_0 > 0$ και το σημείο $(x_0, y_0) = (x_0, x_0^{5/4})$ στο άνω μέρος της καμπύλης. Η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας στο σημείο αυτό είναι

$$\tfrac{dy}{dx}\big|_{x=x_0} = \tfrac{5}{4}\,x_0^{1/4}$$

οπότε η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας είναι

$$y = \tfrac{5}{4}\,x_0^{1/4}(x-x_0) + y_0 = \tfrac{5}{4}\,x_0^{1/4}(x-x_0) + x_0^{5/4}.$$

Ομοίως, στο σημείο $(x_0, y_0) = (x_0, -x_0^{5/4})$ στο κάτω μέρος της καμπύλης η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας είναι

$$\tfrac{dy}{dx}\big|_{x=x_0} = -\tfrac{5}{4}\,x_0^{1/4}$$

οπότε η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας είναι

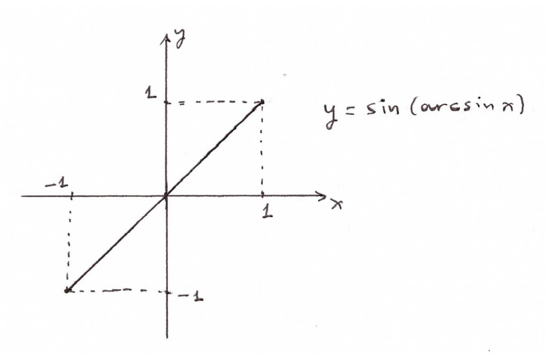
$$y = -\tfrac{5}{4}\,x_0^{1/4}(x-x_0) + y_0 = -\tfrac{5}{4}\,x_0^{1/4}(x-x_0) - x_0^{5/4}.$$

Τώρα έστω $x_0 = 0$ οπότε έχουμε το σημείο $(x_0, y_0) = (0, 0)$ της καμπύλης. Και οι δύο συναρτήσεις $y = x^{5/4}$ και $y = -x^{5/4}$ ορίζονται μόνο δεξιά του 0 οπότε ορίζονται οι δύο αντίστοιχες εφαπτόμενες ημιευθείες με αντίστοιχες κλίσεις

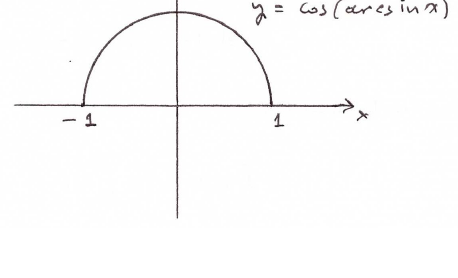
$$\tfrac{dy}{dx}\big|_{x=0+} = \lim_{x\to 0+} \tfrac{x^{5/4}-0}{x-0} = \lim_{x\to 0+} x^{1/4} = 0$$

και
$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0+} = \lim_{x\to 0+} \frac{-x^{5/4}-0}{x-0} = -\lim_{x\to 0+} x^{1/4} = 0.$$
Οι δύο αυτές ημιευθείες ταυτίζονται: είναι και οι δύο ο θετικός x-ημιάξονας. Άρα ορίζουν εφαπτόμενη ημιευθεία, αλλά όχι εφαπτόμενη ευθεία.

6. *Σχεδιάστε τα γραφήματα των συναρτήσεων:*
$$y = \sin(\arcsin x), \quad y = \cos(\arcsin x), \quad y = \arcsin(\sin x), \quad y = \arcsin(\cos x).$$
(Οι δύο πρώτες έχουν πεδίο ορισμού το $[-1,1]$ και οι δύο τελευταίες το $(-\infty,+\infty)$.)
Βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων με δύο τρόπους: με τον κανόνα αλυσίδας καθώς και με την βοήθεια των αντίστοιχων γραφημάτων.
Λύση: (i) Για $x \in [-1,1]$ το $z = \arcsin x$ ορίστηκε ως ο (μοναδικός) αριθμός στο $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ με την ιδιότητα: $\sin z = x$. Άρα προφανώς:
$$y = \sin(\arcsin x) = x \qquad \text{για κάθε } x \in [-1,1].$$
Το γράφημα της συνάρτησης $y = \sin(\arcsin x)$ είναι:



Η παράγωγος της συνάρτησης είναι
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1 \qquad \text{για κάθε } x \in [-1,1].$$
Αυτό είναι φανερό και στο γράφημα: έχει σταθερή κλίση 1.
Με τον κανόνα αλυσίδας έχουμε μέσω της ενδιάμεσης μεταβλητής $z = \arcsin x$ και της $y = \sin z$:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = \cos z \,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \cos z \,\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 z}} = \cos z \,\frac{1}{\cos z} = 1.$$
(ii) Όπως στο (i), για $x \in [-1,1]$ το $z = \arcsin x$ είναι ο (μοναδικός) αριθμός στο $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ με την ιδιότητα: $\sin z = x$. Άρα:
$$y = \cos(\arcsin x) = \cos z = \sqrt{1-\sin^2 z} = \sqrt{1-x^2} \qquad \text{για κάθε } x \in [-1,1].$$
Το γράφημα της συνάρτησης $y = \cos(\arcsin x)$ είναι το ημικύκλιο:



Η παράγωγος της συνάρτησης είναι

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\sqrt{1-x^2}}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{για κάθε } x \in [-1, 1].$$

Παρατηρήστε ότι στο -1 η παράγωγος είναι $+\infty$ και στο 1 η παράγωγος είναι $-\infty$.
Με τον κανόνα αλυσίδας έχουμε μέσω της ενδιάμεσης μεταβλητής $z = \arcsin x$ και της $y = \cos z$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = -\sin z \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(iii) Έστω $x \in [-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi]$ για $k \in \mathbb{Z}$.
Τότε το $z = \sin x$ ανήκει στο $[-1, 1]$ και το $y = \arcsin(\sin x) = \arcsin z$ ορίστηκε ως ο (μοναδικός) αριθμός στο $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ με την ιδιότητα: $\sin y = z$. Δηλαδή:

$$\sin y = \sin x.$$

Από την εξίσωση αυτή προκύπτει το y από το x. Η εξίσωση έχει δύο λύσεις:

$$y = x + 2m\pi \quad \text{ή} \quad y = \pi - x + 2m\pi \qquad \text{με } m \in \mathbb{Z}. \tag{6}$$

Επειδή $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, από την πρώτη δυνατότητα στην (6) έχουμε

$$-\frac{\pi}{2} \le x + 2m\pi \le \frac{\pi}{2}$$

ή, ισοδύναμα,

$$-\frac{\pi}{2} - 2m\pi \le x \le \frac{\pi}{2} - 2m\pi.$$

Από την αρχική μας υπόθεση $-\frac{\pi}{2} + k\pi \le x \le \frac{\pi}{2} + k\pi$ βλέπουμε ότι πρέπει να είναι $k = -2m$, δηλαδή ότι το k είναι άρτιος ακέραιος και ότι το y δίνεται από την

$$y = x - k\pi \qquad \text{για άρτιο ακέραιο } k.$$

Πάλι, επειδή $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, από την δεύτερη δυνατότητα στην (6) έχουμε

$$-\frac{\pi}{2} \le \pi - x + 2m\pi \le \frac{\pi}{2}$$

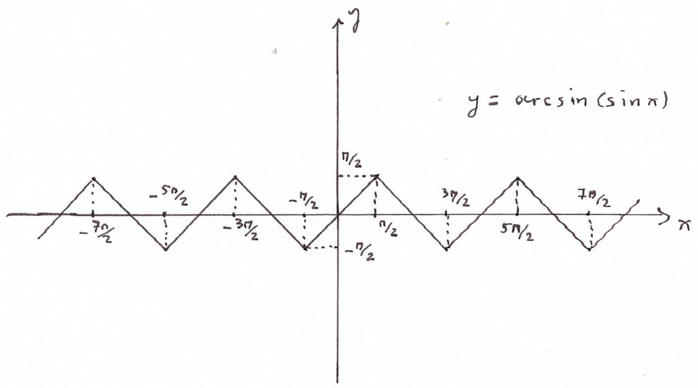
ή, ισοδύναμα,

$$-\frac{\pi}{2} + (2m+1)\pi \le x \le \frac{\pi}{2} + (2m+1)\pi.$$

Από την αρχική μας υπόθεση $-\frac{\pi}{2} + k\pi \le x \le \frac{\pi}{2} + k\pi$ βλέπουμε ότι πρέπει να είναι $k = 2m + 1$, δηλαδή ότι το k είναι περιττός ακέραιος και ότι το y δίνεται από την

$$y = -x + k\pi \qquad \text{για περιττό ακέραιο } k.$$

Θεωρώντας ότι το k διατρέχει το $\mathbb{Z}$ έχουμε ότι τα αντίστοιχα διαστήματα $[-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi]$ είναι διαδοχικά και καλύπτουν ολόκληρο το $(-\infty, +\infty)$ και παίρνουμε το γράφημα της $y = \arcsin(\sin x)$:

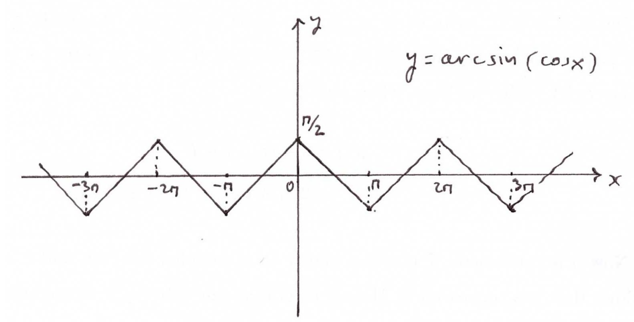


Η παράγωγος της συνάρτησης στο *ανοικτό* διάστημα $(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$ είναι σταθερή $+1$ αν το k είναι άρτιο, και σταθερή -1 αν το k είναι περιττό. Στα σημεία $\frac{\pi}{2}+k\pi$ δεν υπάρχει παράγωγος: στο γράφημα σχηματίζεται γωνία στα σημεία αυτά.

(iv) Για την συνάρτηση $y = \arcsin(\cos x)$ μπορούμε να επαναλάβουμε τα ίδια με το (iii), αλλά καλύτερα να παρατηρήσουμε ότι

$$y = \arcsin(\cos x) = \arcsin(\sin(x + \tfrac{\pi}{2}))$$

οπότε το γράφημα της συνάρτησης προκύπτει από το γράφημα της συνάρτησης στο (iii) με οριζόντια μεταφορά κατά $-\frac{\pi}{2}$:



7. *Θεωρήστε την συνάρτηση* $y = \begin{cases} x^a \sin(1/x) & \text{αν } x > 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

Αποδείξτε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ *αν και μόνο αν* $a > 0$ *και ότι είναι παραγωγίσιμη στο* $[0, +\infty)$ *αν και μόνο αν* $a > 1$. *Αποδείξτε ότι η παράγωγος είναι συνεχής στο* $[0, +\infty)$ *αν και μόνο αν* $a > 2$.

Λύση: (i) Αν $a > 0$, έχουμε

$$\lim_{x\to 0+} x^a \sin\tfrac{1}{x} = 0$$

διότι $\lim_{x\to 0+} x^a = 0$ και η $\sin\frac{1}{x}$ είναι φραγμένη. Άρα η συνάρτηση είναι συνεχής στο 0 και άρα σε ολόκληρο το $[0, +\infty)$.

Αν $a = 0$, γνωρίζουμε ότι το $\lim_{x\to 0+} x^a \sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0+} \sin\frac{1}{x}$ δεν υπάρχει και άρα η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο 0.

Αν $a < 0$ και υποθέσουμε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο 0, τότε

$$\lim_{x\to 0+} x^a \sin\tfrac{1}{x} = 0$$

οπότε, επειδή $\lim_{x\to 0+} x^{-a} = 0$, βρίσκουμε

$$\lim_{x\to 0+} \sin\tfrac{1}{x} = \lim_{x\to 0+} x^{-a} x^a \sin\tfrac{1}{x} = \lim_{x\to 0+} x^{-a} \lim_{x\to 0+} x^a \sin\tfrac{1}{x} = 0 \cdot 0 = 0$$

και καταλήγουμε σε άτοπο.

(ii) Αν $a > 1$, τότε

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x^a \sin\frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0+} x^{a-1} \sin\tfrac{1}{x} = 0$$

διότι $\lim_{x\to 0+} x^{a-1} = 0$ και η $\sin\frac{1}{x}$ είναι φραγμένη. Άρα η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο 0 και άρα σε ολόκληρο το $[0, +\infty)$. Η τιμή της παραγώγου στο 0 είναι 0.

Αν $a = 1$, γνωρίζουμε ότι το

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x^a \sin\frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0+} \frac{x \sin\frac{1}{x}}{x - 0} = \lim_{x\to 0+} \sin\tfrac{1}{x}$$

δεν υπάρχει και άρα η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.
Αν $a < 1$ και υποθέσουμε ότι η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο 0, τότε το

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x^a \sin\frac{1}{x} - 0}{x-0} = \lim_{x\to 0+} x^{a-1}\sin\frac{1}{x}$$

υπάρχει και είναι αριθμός οπότε, επειδή $\lim_{x\to 0+} x^{1-a} = 0$, βρίσκουμε

$$\lim_{x\to 0+} \sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0+} x^{1-a}x^{a-1}\sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0+} x^{1-a} \lim_{x\to 0+} x^{a-1}\sin\frac{1}{x} = 0$$

και καταλήγουμε σε άτοπο.
(iii) Για να μελετήσουμε την παράγωγο στο $[0, +\infty)$ υποθέτουμε (βάσει του (ii)) ότι $a > 1$ και τότε η παράγωγος δίνεται από τον τύπο

$$\begin{cases} ax^{a-1}\sin(1/x) - x^{a-2}\cos(1/x) & \text{αν } x > 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

Αν $a > 2$, έχουμε

$$\lim_{x\to 0+} \left(ax^{a-1}\sin\tfrac{1}{x} - x^{a-2}\cos\tfrac{1}{x}\right) = 0$$

διότι $\lim_{x\to 0+} x^{a-1} = \lim_{x\to 0+} x^{a-2} = 0$ και οι $\sin\frac{1}{x}$ και $\cos\frac{1}{x}$ είναι φραγμένες. Άρα η παράγωγος είναι συνεχής στο 0 και άρα σε ολόκληρο το $[0, +\infty)$.
Αν $a = 2$, το

$$\lim_{x\to 0+} \left(ax^{a-1}\sin\tfrac{1}{x} - x^{a-2}\cos\tfrac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0+} \left(2x\sin\tfrac{1}{x} - \cos\tfrac{1}{x}\right)$$

δεν υπάρχει διότι $\lim_{x\to 0+} 2x\sin\frac{1}{x} = 0$ αλλά το $\lim_{x\to 0+}\cos\frac{1}{x}$ δεν υπάρχει. Άρα η παράγωγος δεν είναι συνεχής στο 0.
Αν $1 < a < 2$ και υποθέσουμε ότι η παράγωγος είναι συνεχής στο 0, τότε

$$\lim_{x\to 0+} \left(ax^{a-1}\sin\tfrac{1}{x} - x^{a-2}\cos\tfrac{1}{x}\right) = 0$$

και, επειδή $\lim_{x\to 0+} ax^{a-1}\sin\frac{1}{x} = 0$, έχουμε ότι

$$\lim_{x\to 0+} x^{a-2}\cos\frac{1}{x} = 0.$$

Τότε, επειδή $\lim_{x\to 0+} x^{2-a} = 0$, συνεπάγεται

$$\lim_{x\to 0+} \cos\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0+} x^{2-a}x^{a-2}\cos\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0+} x^{2-a} \lim_{x\to 0+} x^{a-2}\cos\frac{1}{x} = 0\cdot 0 = 0$$

και καταλήγουμε σε άτοπο αφού το $\lim_{x\to 0+}\cos\frac{1}{x}$ δεν υπάρχει.

8. *Αν η $y = r(x)$ είναι ρητή συνάρτηση, αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty} \frac{xr'(x)}{r(x)} = 0$ αν και μόνο αν οι βαθμοί των πολυωνύμων στον αριθμητή και στον παρονομαστή της συνάρτησης είναι ίσοι.*
Λύση: Έστω

$$r(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots}$$

με $a_n \neq 0$ και $b_m \neq 0$.
Αν $n \neq m$, τότε

$$r'(x) = \frac{(na_n x^{n-1} + \cdots)(b_m x^m + \cdots) - (a_n x^n + \cdots)(mb_m x^{m-1} + \cdots)}{(b_m x^m + \cdots)^2} = \frac{(n-m)a_n b_m x^{n+m-1} + \cdots}{(b_m x^m + \cdots)^2}$$

οπότε

$$\frac{xr'(x)}{r(x)} = \frac{(n-m)a_n b_m x^{n+m} + \cdots}{(a_n x^n + \cdots)(b_m x^m + \cdots)}$$

και άρα
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{xr'(x)}{r(x)}=n-m\neq 0.$$
Τώρα έστω $n=m$ οπότε
$$r(x)=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots}{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots}.$$
Μετά από λίγες πράξεις βρίσκουμε
$$r'(x)=\frac{(a_nb_{n-1}-a_{n-1}b_n)x^{2n-2}+\cdots}{(b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots)^2}$$
οπότε
$$\frac{xr'(x)}{r(x)}=\frac{(a_nb_{n-1}-a_{n-1}b_n)x^{2n-1}+\cdots}{(a_nx^n+\cdots)(b_nx^n+\cdots)}$$
και άρα
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{xr'(x)}{r(x)}=0.$$

9. *Στο xy-επίπεδο ένα όχημα με ζεύγος συντεταγμένων (x,y) κινείται (με μη-μηδενική ταχύτητα) πάνω στην καμπύλη με εξίσωση $y^3-y=2x^3-2x$. Αποδείξτε ότι οι θέσεις του οχήματος στις οποίες ο ρυθμός μεταβολής του y (ως προς τον χρόνο) είναι διπλάσιος από τον ρυθμό μεταβολής του x (ως προς τον χρόνο) είναι οι: $(0,0)$, $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$ και $(-1,-1)$.*

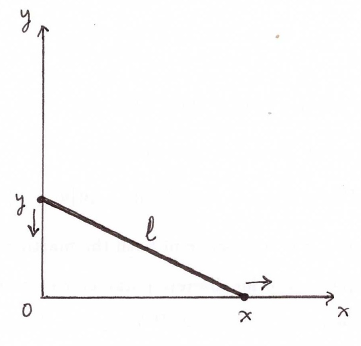
   Λύση: Έστω $(x(t),y(t))$ η θέση του οχήματος την χρονική στιγμή t. Το ότι το όχημα κινείται πάνω στην δοσμένη καμπύλη ισοδυναμεί με
$$y^3(t)-y(t)=2x^3(t)-2x(t)\qquad\text{για κάθε } t. \tag{7}$$
Παραγωγίζουμε αυτήν την σχέση χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδας και βρίσκουμε
$$(3y^2(t)-1)y'(t)=2(3x^2(t)-1)x'(t)\qquad\text{για κάθε } t. \tag{8}$$
Έστω ότι την χρονική στιγμή t_0 η θέση του οχήματος είναι
$$(x_0,y_0)=(x(t_0),y(t_0))$$
και ο ρυθμός μεταβολής του y (ως προς τον χρόνο) είναι διπλάσιος από τον ρυθμό μεταβολής του x (ως προς τον χρόνο), δηλαδή
$$y'(t_0)=2x'(t_0). \tag{9}$$
Με την (9) η (8) γίνεται
$$(3y_0^2-1)2x'(t_0)=2(3x_0^2-1)x'(t_0). \tag{10}$$
Αν $x'(t_0)=0$ τότε η (9) δίνει $y'(t_0)=0$ οπότε η (διανυσματική) ταχύτητα του οχήματος την χρονική στιγμή t_0 είναι $(x'(t_0),y'(t_0))=(0,0)$ το οποίο είναι άτοπο. Άρα η (10) γίνεται
$$3y_0^2-1=3x_0^2-1$$
ή, ισοδύναμα,
$$y_0=\pm x_0.$$
Τώρα η (7) με $t=t_0$ δίνει
$$y_0^3-y_0=2x_0^3-2x_0$$
και με $y_0=\pm x_0$ παίρνουμε
$$x_0^3=x_0.$$
Αυτή έχει λύσεις $x_0=0$, $x_0=1$ και $x_0=-1$. Άρα λόγω της $y_0=\pm x_0$, έχουμε τις εξής θέσεις του οχήματος: $(0,0)$, $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$ και $(-1,-1)$.

10. *Μία μεταλλική ράβδος μήκους l έχει το ένα άκρο της στην πλευρά Ox και το άλλο άκρο της στην άλλη πλευρά Oy μίας ορθής γωνίας.*

Αν το άκρο x απομακρύνεται από την κορυφή O της γωνίας με σταθερή ταχύτητα v βρείτε την ταχύτητα με την οποία το άκρο y πλησιάζει την κορυφή O. Ειδικώτερα, ποιά είναι η ταχύτητα του άκρου y όταν το άκρο x ξεκινάει από την κορυφή O καθώς και όταν το άκρο x φτάνει στην θέση l.

Βρείτε επίσης τον ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x.

Λύση: Έχουμε το εξής σχήμα:



Τα x, y συνδέονται με την σχέση

$$x^2 + y^2 = l^2 \text{ (σταθερό)}. \tag{11}$$

Τα x, y είναι συναρτήσεις $x(t), y(t)$ του χρόνου και γνωρίζουμε ότι

$$\tfrac{dx}{dt} = v \text{ (σταθερό)}.$$

Παραγωγίζουμε την σχέση (11) ως προς t και με τον κανόνα αλυσίδας βρίσκουμε:

$$2x\,\tfrac{dx}{dt} + 2y\,\tfrac{dy}{dt} = 0.$$

Άρα η ταχύτητα του y είναι:

$$\tfrac{dy}{dt} = -\tfrac{x}{y}\,\tfrac{dx}{dt} = -\tfrac{x}{y}\,v.$$

Η ταχύτητα του y δεν είναι σταθερή: εξαρτάται από τον λόγο $\frac{x}{y}$.
Όταν το άκρο x ξεκινάει από την κορυφή O, δηλαδή όταν $x \to 0+$, το y είναι ίσο με l και η ταχύτητα του y είναι $-\frac{x}{y}\,v = 0$. Όταν το άκρο x φτάνει στην θέση l, δηλαδή όταν $x \to l-$, τότε $y \to 0+$ και η ταχύτητα του y είναι $-\frac{x}{y}\,v = -\infty$.
Για να βρούμε τον ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x, δηλαδή το $\frac{dy}{dx}$, παραγωγίζουμε την (11) ως προς x:

$$2x + 2y\,\tfrac{dy}{dx} = 0$$

οπότε

$$\tfrac{dy}{dx} = -\tfrac{x}{y}.$$

11. *Παρατηρήστε ότι τα όρια*

$$\lim_{x\to 1} \tfrac{\log x}{x-1}, \qquad \lim_{x\to 0} \tfrac{e^x-1}{x}, \qquad \lim_{x\to 1} \tfrac{x^a-1}{x-1}$$

είναι γνωστές παράγωγοι συγκεκριμένων συναρτήσεων σε συγκεκριμένα σημεία και ως τέτοιες υπολογίστε τα. Βάσει των ορίων αυτών αποδείξτε ότι

$$\lim_{x\to 1} \tfrac{\log x}{x^a-1} = \tfrac{1}{a}, \quad \lim_{x\to 1} \tfrac{x^a-x^b}{x-1} = a-b, \quad \lim_{x\to 0} \tfrac{a^x-b^x}{x} = \log\tfrac{a}{b}, \quad \lim_{x\to 0} \tfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x} = a-b.$$

Λύση: Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 1} \tfrac{\log x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \tfrac{\log x - \log 1}{x-1} = \tfrac{d\log x}{dx}\Big|_{x=1} = \tfrac{1}{x}\Big|_{x=1} = 1.\\
&\lim_{x\to 0} \tfrac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0} \tfrac{e^x-e^0}{x-0} = \tfrac{de^x}{dx}\Big|_{x=0} = e^x\Big|_{x=0} = 1.\\
&\lim_{x\to 1} \tfrac{x^a-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \tfrac{x^a-1^a}{x-1} = \tfrac{dx^a}{dx}\Big|_{x=1} = ax^{a-1}\Big|_{x=1} = a.
\end{aligned} \tag{12}$$

Τα επόμενα όρια υπολογίζονται από τα όρια στην (12) ως εξής:
(i)

$$\lim_{x\to 1} \tfrac{\log x}{x^a-1} = \tfrac{1}{a} \lim_{x\to 1} \tfrac{\log x^a}{x^a-1} = \tfrac{1}{a} \lim_{y\to 1} \tfrac{\log y}{y-1} = \tfrac{1}{a}.$$

(ii)

$$\lim_{x\to 1} \tfrac{x^a-x^b}{x-1} = \lim_{x\to 1} \tfrac{x^a-1}{x-1} - \lim_{x\to 1} \tfrac{x^b-1}{x-1} = a-b$$

αλλά και

$$\lim_{x\to 1} \tfrac{x^a-x^b}{x-1} = \lim_{x\to 1} x^b\,\tfrac{x^{a-b}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} x^b \lim_{x\to 1} \tfrac{x^{a-b}-1}{x-1} = 1^b(a-b) = a-b.$$

(iii)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \tfrac{a^x-b^x}{x} &= \lim_{x\to 0} \tfrac{a^x-1}{x} - \lim_{x\to 0} \tfrac{b^x-1}{x} = \lim_{x\to 0} \tfrac{e^{x\log a}-1}{x} - \lim_{x\to 0} \tfrac{e^{x\log b}-1}{x}\\
&= \log a \lim_{x\to 0} \tfrac{e^{x\log a}-1}{x\log a} - \log b \lim_{x\to 0} \tfrac{e^{x\log b}-1}{x\log b}\\
&= \log a \lim_{y\to 0} \tfrac{e^y-1}{y} - \log b \lim_{y\to 0} \tfrac{e^y-1}{y} = \log a - \log b = \log \tfrac{a}{b}.
\end{aligned}$$

αλλά και

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \tfrac{a^x-b^x}{x} &= \lim_{x\to 0} b^x\,\tfrac{(a/b)^x-1}{x} = \lim_{x\to 0} b^x \lim_{x\to 0} \tfrac{(a/b)^x-1}{x}\\
&= b^0 \lim_{x\to 0} \tfrac{e^{x\log(a/b)}-1}{x} = \log\tfrac{a}{b} \lim_{x\to 0} \tfrac{e^{x\log(a/b)}-1}{x\log(a/b)} = \log\tfrac{a}{b} \lim_{y\to 0} \tfrac{e^y-1}{y} = \log\tfrac{a}{b}.
\end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \tfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x} &= \lim_{x\to 0} \tfrac{e^{ax}-1}{x} - \lim_{x\to 0} \tfrac{e^{bx}-1}{x} = a \lim_{x\to 0} \tfrac{e^{ax}-1}{ax} - b \lim_{x\to 0} \tfrac{e^{bx}-1}{bx}\\
&= a \lim_{y\to 0} \tfrac{e^y-1}{y} - b \lim_{y\to 0} \tfrac{e^y-1}{y} = a-b
\end{aligned}$$

αλλά και

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} e^{bx}\,\tfrac{e^{(a-b)x}-1}{x} &= \lim_{x\to 0} e^{bx} \lim_{x\to 0} \tfrac{e^{(a-b)x}-1}{x} = e^0\,(a-b) \lim_{x\to 0} \tfrac{e^{(a-b)x}-1}{(a-b)x}\\
&= (a-b) \lim_{y\to 0} \tfrac{e^y-1}{y} = a-b.
\end{aligned}$$

12. *Έστω $f : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ και $0 < \xi < +\infty$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο ξ αποδείξτε ότι:*

$$\lim_{x\to\xi} \Big(\tfrac{f(x)}{f(\xi)}\Big)^{1/(x-\xi)} = e^{f'(\xi)/f(\xi)}, \qquad \lim_{x\to\xi} \Big(\tfrac{f(x)}{f(\xi)}\Big)^{1/(\log x - \log\xi)} = e^{\xi f'(\xi)/f(\xi)}.$$

Λύση: (i)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\xi} \Big(\tfrac{f(x)}{f(\xi)}\Big)^{1/(x-\xi)} &= \lim_{x\to\xi} e^{\frac{1}{x-\xi}\,\log\frac{f(x)}{f(\xi)}} = \lim_{x\to\xi} e^{\frac{\log f(x)-\log f(\xi)}{x-\xi}} = e^{\lim_{x\to\xi} \frac{\log f(x)-\log f(\xi)}{x-\xi}}\\
&= e^{\frac{d\log f(x)}{dx}\big|_{x=\xi}} = e^{\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}}.
\end{aligned}$$

(ii)

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\xi}\left(\frac{f(x)}{f(\xi)}\right)^{1/(\log x-\log\xi)} &= \lim_{x\to\xi} e^{\frac{1}{\log x-\log\xi}\;\log\frac{f(x)}{f(\xi)}} = \lim_{x\to\xi} e^{\frac{\log f(x)-\log f(\xi)}{\log x-\log\xi}} \\
&= e^{\lim_{x\to\xi}\frac{\log f(x)-\log f(\xi)}{\log x-\log\xi}} = e^{\lim_{x\to\xi}\frac{\log f(x)-\log f(\xi)}{x-\xi}\;\lim_{x\to\xi}\frac{x-\xi}{\log x-\log\xi}} \\
&= e^{\lim_{x\to\xi}\frac{\log f(x)-\log f(\xi)}{x-\xi}\Big/\lim_{x\to\xi}\frac{\log x-\log\xi}{x-\xi}} \\
&= e^{\frac{d\log f(x)}{dx}\Big|_{x=\xi}\Big/\frac{d\log x}{dx}\Big|_{x=\xi}} = e^{\frac{\xi f'(\xi)}{f(\xi)}}.
\end{aligned}
$$