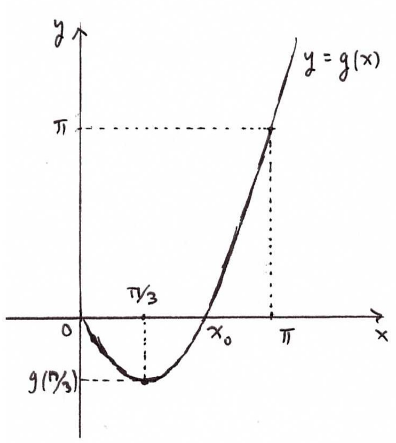
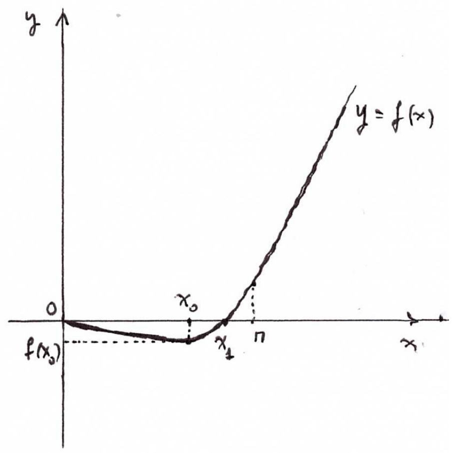
Απειροστικός Λογισμός Ι, χειμερινό εξάμηνο 2018-19.

Λύσεις ένατου φυλλαδίου ασκήσεων.

1. *Έστω $a < b$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ξ ώστε*
   (i) $a < \xi < b$ και $e^b - e^a = (b-a)e^{\xi}$.
   (ii) $a < \xi < b$ και $\cos b - \cos a = -(e^b - e^a)e^{-\xi}\sin\xi$.
   Λύση: (i) Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής του Lagrange στην συνάρτηση $f(x) = e^x$ στο διάστημα $[a, b]$.
   (ii) Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy στις συναρτήσεις $f(x) = \cos x$ και $g(x) = e^x$ στο διάστημα $[a, b]$.
   Προσοχή: δεν μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα εφαρμόζοντας δύο φορές το θεώρημα μέσης τιμής του Lagrange, μία φορά για την συνάρτηση $f(x) = \cos x$ και μία φορά για την $g(x) = e^x$. Αν κάνουμε κάτι τέτοιο, θα έχουμε ότι υπάρχει κάποιο $\xi_1 \in (a, b)$ ώστε $\frac{\cos b - \cos a}{b-a} = -\sin\xi_1$ και ότι υπάρχει κάποιο $\xi_2 \in (a, b)$ ώστε $\frac{e^b - e^a}{b-a} = e^{\xi_2}$, αλλά τα ξ_1, ξ_2 *μπορεί να είναι διαφορετικά.*
   Για να κατανοήσουμε ακριβώς τί γίνεται, ας θεωρήσουμε ένα πολύ συγκεκριμένο παράδειγμα όπου υπολογίζονται ακριβώς τα διάφορα ξ.
   Το θεώρημα μέσης τιμής του Lagrange για την συνάρτηση $f(x) = x^3$ στο διάστημα $[0, 1]$ λέει ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ ώστε $\frac{1^3-0^3}{1-0} = 3\xi^2$. Αμέσως υπολογίζουμε: $\xi = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Το θεώρημα μέσης τιμής του Lagrange για την συνάρτηση $g(x) = x^2$ στο διάστημα $[0, 1]$ λέει ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ ώστε $\frac{1^2-0^2}{1-0} = 2\xi$. Υπολογίζουμε: $\xi = \frac{1}{2}$. Βλέπουμε ότι τα δύο ξ είναι διαφορετικά. Το θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy για τις συναρτήσεις $f(x) = x^3$ και $g(x) = x^2$ (ταυτόχρονα) στο διάστημα $[0, 1]$ λέει ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ ώστε $\frac{1^3-0^3}{1^2-0^2} = \frac{3\xi^2}{2\xi}$. Υπολογίζουμε: $\xi = \frac{2}{3}$. Αυτό είναι ένα τρίτο ξ διαφορετικό από τα άλλα δύο.

2. *(i) Αποδείξτε ότι η εξίσωση $x^3/3 = \sin x - x\cos x$ έχει ακριβώς μία λύση.*
   (ii) Αποδείξτε ότι η εξίσωση $x^3/6 = \sin x - x\cos x$ έχει ακριβώς τρεις λύσεις.
   Λύση: (i) Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = x^3/3 - \sin x + x\cos x$ στο $(-\infty, +\infty)$. Η παράγωγός της είναι η συνάρτηση $f'(x) = x^2 - x\sin x = x(x - \sin x)$.
   Γνωρίζουμε ότι ισχύει $x < \sin x$ στο $(-\infty, 0)$ και $\sin x < x$ στο $(0, +\infty)$. Επομένως ισχύει $f'(x) > 0$ στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$ και στο $[0, +\infty)$ οπότε είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, +\infty)$.
   Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει προφανή λύση το $x = 0$. Επειδή η f είναι ένα-προς-ένα, η λύση αυτή είναι μοναδική.
   Σχόλιο. Έχουμε αποδείξει τις παραπάνω ανισότητες ανάμεσα στα $\sin x$ και x με γεωμετρικό τρόπο. Ας τις αποδείξουμε και πιο αυστηρά.
   Στο $(-\infty, +\infty)$ η συνάρτηση $g(x) = x - \sin x$ έχει παράγωγο $g'(x) = 1 - \cos x$ για την οποία ισχύει $g'(x) \geq 0$. Πιο συγκεκριμένα, ισχύει $g'(x) > 0$ στα διαδοχικά ανοικτά διαστήματα $(2k\pi, 2(k+1)\pi)$ για $k \in \mathbb{Z}$. Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στα αντίστοιχα κλειστά διαστήματα και, επειδή αυτά είναι διαδοχικά και η ένωσή τους είναι ολόκληρο το $(-\infty, +\infty)$, η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, +\infty)$. Άρα ισχύει $g(x) < g(0) = 0$ στο $(-\infty, 0)$ και $g(x) > g(0) = 0$ στο $(0, +\infty)$.
   (ii) Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = x^3/6 - \sin x + x\cos x$ στο $(-\infty, +\infty)$. Η παράγωγός της είναι η συνάρτηση $f'(x) = x^2/2 - x\sin x = x(x - 2\sin x)/2$. Όπως κάναμε στο (i), θα μελετήσουμε το πρόσημο της παραγώγου.





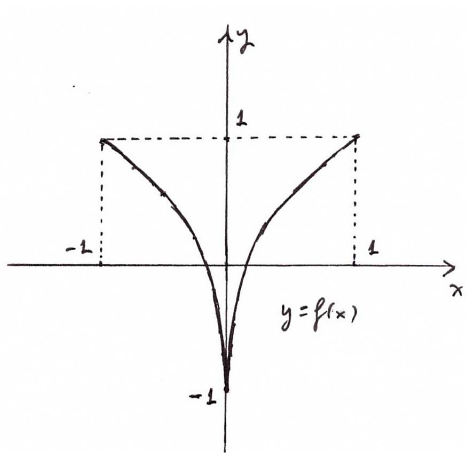
Στο διάστημα $[0,\pi]$ η συνάρτηση $g(x) = x - 2\sin x$ έχει παράγωγο $g'(x) = 1 - 2\cos x$ για την οποία ισχύει $g'(x) < 0$ στο $(0,\pi/3)$ και $g'(x) > 0$ στο $(\pi/3,\pi)$. Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,\pi/3]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\pi/3,\pi]$. Από το ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,\pi/3]$ συνεπάγεται ότι ισχύει $g(x) < g(0) = 0$ στο $(0,\pi/3]$ και, ειδικώτερα, $g(\pi/3) < 0$. Από το ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[\pi/3,\pi]$ και από το ότι $g(\pi/3) < 0$ και $g(\pi) = \pi > 0$ συνεπάγεται ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (\pi/3,\pi)$ ώστε $g(x_0) = 0$ και ώστε να ισχύει $g(x) < 0$ στο $[\pi/3,x_0)$ και $g(x) > 0$ στο $(x_0,\pi]$. Δηλαδή συνολικά ισχύει $g(x) < 0$ στο $(0,x_0)$ και $g(x) > 0$ στο $(x_0,\pi]$. Επιπλέον, για $x \in [\pi,+\infty)$ έχουμε ότι $g(x) = x - 2\sin x \geq \pi - 2 > 0$. Συμπεραίνουμε ότι ισχύει $f'(x) < 0$ στο $(0,x_0)$ και $f'(x) > 0$ στο $(x_0,+\infty)$.

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,x_0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[x_0,+\infty)$. Από το ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,x_0]$ συνεπάγεται ότι ισχύει $f(x) < f(0) = 0$ στο $(0,x_0]$ και, ειδικώτερα, $f(x_0) < 0$. Από το ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0,+\infty)$ και από το ότι $f(x_0) < 0$ και $f(\pi) > 0$ συνεπάγεται ότι υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (x_0,+\infty)$ ώστε $f(x_1) = 0$. Άρα η f έχει στο $(0,+\infty)$ μοναδική ρίζα το x_1.

Επειδή η f είναι περιττή, έχει στο $(-\infty,0)$ μοναδική ρίζα το $-x_1$.

Άρα η f έχει ακριβώς τρείς ρίζες: $-x_1, 0, x_1$.

3. *Θεωρήστε την* $y = 2\sqrt[3]{x^2} - 1 = 2|x|^{2/3} - 1$ *και παρατηρήστε ότι έχει την ίδια τιμή* 1 *στα σημεία* 1 *και* -1. *Το συμπέρασμα του θεωρήματος του Rolle είναι ότι υπάρχει* $\xi \in (-1,1)$ *στο οποίο μηδενίζεται η παράγωγος της συνάρτησης. Υπάρχει τέτοιο* ξ *και ποιό είναι το πρόβλημα;*



Λύση: Η παράγωγος της f έχει τύπο

$$f'(x) = \begin{cases} (4/3)|x|^{-1/3}, & \text{αν } x > 0 \\ -(4/3)|x|^{-1/3}, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

Η f δεν έχει παράγωγο στο 0 αφού μπορούμε εύκολα να δούμε (με το όριο του λόγου διαφορών) ότι $f'_-(0) = -\infty$ και $f'_+(0) = +\infty$.
Είναι σαφές ότι δεν υπάρχει $\xi \in (-1, 1)$ στο οποίο μηδενίζεται η παράγωγος της συνάρτησης. Επομένως το συμπέρασμα του θεωρήματος του Rolle δεν ισχύει, και αυτό οφείλεται στο ότι ούτε οι υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle ισχύουν όλες: η f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ και $f(-1) = f(1)$ αλλά δεν είναι σωστό ότι η f έχει παράγωγο στο εσωτερικό του $[-1, 1]$.

4. *Έστω f συνεχής στο $[-1, 3]$, $f(3) = -7$ και έστω ότι ισχύει $f'(x) \geq -2$ στο $(-1, 3)$.*
(i) Αποδείξτε ότι $f(-1) \leq 1$.
(ii) Αν υποθέσουμε επιπλέον ότι $f(-1) = 1$, αποδείξτε ότι ισχύει $f(x) = -2x-1$ στο $[-1, 3]$.
Λύση: (i) Από το θεώρημα μέσης τιμής του Lagrange έχουμε ότι

$$\tfrac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)} = f'(\xi)$$

για κάποιο $\xi \in (-1, 3)$. Επομένως $\frac{-7-f(-1)}{4} \geq -2$ και άρα $f(-1) \leq 1$.
(ii) Τώρα έστω επιπλέον ότι $f(-1) = 1$. Τότε η συνάρτηση $g(x) = f(x) + 2x + 1$ είναι συνεχής στο $[-1, 3]$ με $g(-1) = g(3) = 0$. Ισχύει $g'(x) = f'(x) + 2 \geq 0$ στο $(-1, 3)$ οπότε η g είναι αύξουσα στο $[-1, 3]$. Αφού οι τιμές της g στα άκρα του $[-1, 3]$ είναι ίσες, η g είναι σταθερή στο $[-1, 3]$. Δηλαδή ισχύει $g(x) = 0$ ή, ισοδύναμα, $f(x) = -2x - 1$ στο $[-1, 3]$

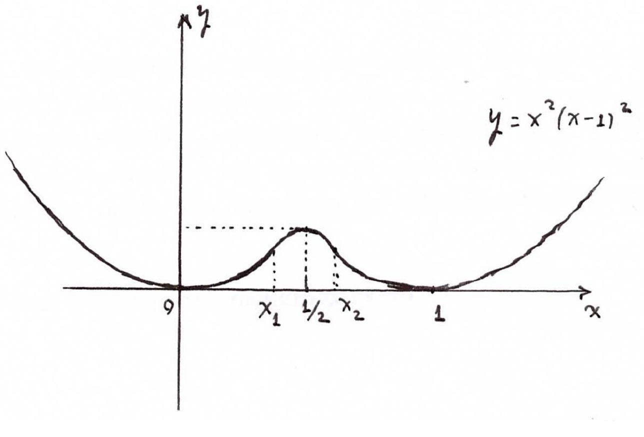
5. *Μελετήστε τις παρακάτω συναρτήσεις σχετικά με την μονοτονία, την κυρτότητα και τα ακρότατά τους.*
(i) $f(x) = x^2(x-1)^2$.
(ii) $f(x) = 1/\log x$.
(iii) $f(x) = |x|(x-1)$ στο διάστημα $[-1, 2]$.
Λύση: (i) Η f έχει παράγωγο

$$f'(x) = 2x(x-1)^2 + 2x^2(x-1) = 2x(x-1)(x-1+x) = 2x(x-1)(2x-1)$$

και δεύτερη παράγωγο (μετά από πράξεις)

$$f''(x) = 3(2x-1)^2 - 1.$$

Ισχύει $f'(x) > 0$ στο $(0, \frac{1}{2})$ και στο $(1, +\infty)$ και $f'(x) < 0$ στο $(-\infty, 0)$ και στο $(\frac{1}{2}, 1)$. Άρα η f είναι, διαδοχικά, γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$, γνησίως αύξουσα στο $[0, \frac{1}{2}]$, γνησίως φθίνουσα στο $[\frac{1}{2}, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Ειδικώτερα, τα σημεία 0 και 1 είναι σημεία τοπικού ελαχίστου της f και το σημείο $\frac{1}{2}$ είναι σημείο τοπικού μεγίστου της f. Επειδή $f(0) = f(1) = 0$, τα σημεία 0 και 1 είναι σημεία ολικού ελαχίστου της f. Το σημείο $\frac{1}{2}$ δεν είναι σημείο ολικού ελαχίστου της f, διότι $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$.



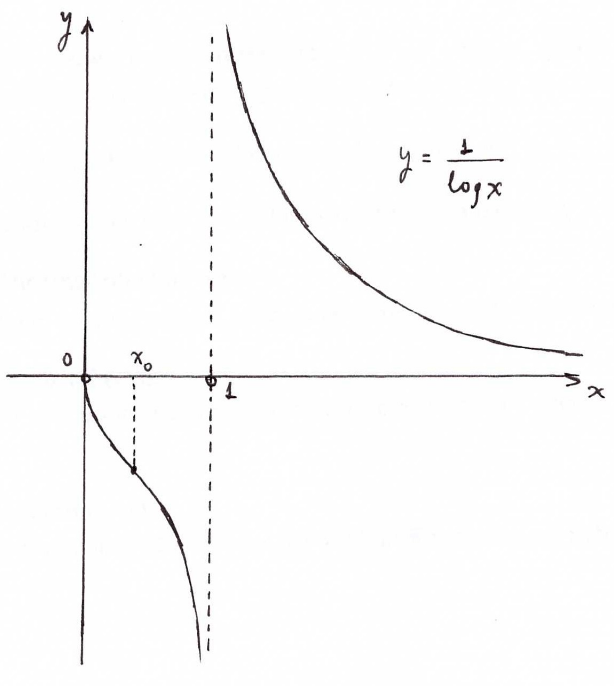
Η f'' μηδενίζεται στα σημεία $x_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}$ και $x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}$ και ισχύει $f''(x) > 0$ στο $(-\infty, x_1)$ και στο $(x_2, +\infty)$ και $f''(x) < 0$ στο (x_1, x_2). Άρα η f είναι, διαδοχικά, γνησίως κυρτή στο $(-\infty, x_1]$, γνησίως κοίλη στο $[x_1, x_2]$ και γνησίως κυρτή στο $[x_2, +\infty)$. Τα σημεία x_1, x_2 είναι σημεία καμπής της f. Ας σημειώσουμε ότι $0 < x_1 < \frac{1}{2} < x_2 < 1$.
(ii) Το πεδίο ορισμού της f είναι το $(0,1) \cup (1, +\infty)$. Η f έχει παράγωγο

$$f'(x) = -\frac{1}{x \log^2 x}$$

και δεύτερη παράγωγο (μετά από πράξεις)

$$f''(x) = \frac{\log x + 2}{x \log^3 x}.$$

Ισχύει $f'(x) < 0$ στο $(0,1) \cup (1, +\infty)$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1)$ και στο $(1, +\infty)$. Επειδή $\lim_{x \to 0+} f(x) = 0$ και $\lim_{x \to 1-} f(x) = -\infty$, το σύνολο τιμών της f στο $(0,1)$ είναι το $(-\infty, 0)$. Η f δεν έχει σημεία τοπικού ακροτάτου στο $(0,1)$. Επειδή $\lim_{x \to 1+} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, το σύνολο τιμών της f στο $(1, +\infty)$ είναι το $(0, +\infty)$. Η f δεν έχει σημεία τοπικού ακροτάτου στο $(1, +\infty)$. Η κατακόρυφη ευθεία με εξίσωση $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη του γραφήματος της f.



Η f'' μηδενίζεται στο $x_0 = e^{-2}$ το οποίο ανήκει στο διάστημα $(0,1)$. Ισχύει $f''(x) > 0$ στο $(0, x_0)$ και στο $(1, +\infty)$ και $f''(x) < 0$ στο $(x_0, 1)$. Άρα η f είναι, διαδοχικά, γνησίως κυρτή στο $(0, x_0]$, γνησίως κοίλη στο $[x_0, 1)$ και γνησίως κυρτή στο $(1, +\infty)$. Το σημείο x_0 είναι σημείο καμπής της f.
(iii) Η f έχει παράγωγο

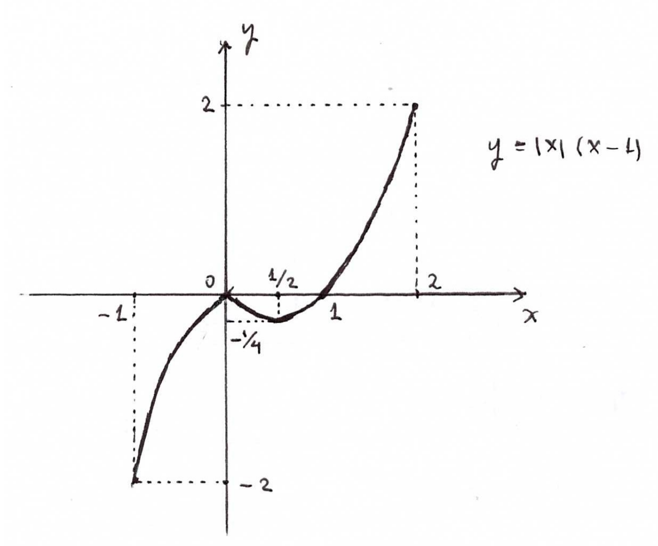
$$f'(x) = \begin{cases} -2x + 1, & \text{αν } -1 \le x < 0 \\ 2x - 1, & \text{αν } 0 < x \le 2 \end{cases}$$

Η f δεν έχει παράγωγο στο 0 αφού εύκολα βλέπουμε (με το όριο του λόγου διαφορών) ότι $f'_-(0) = 1$ και $f'_+(0) = -1$.
Ισχύει $f'(x) > 0$ στο $(-1, 0)$ και στο $(\frac{1}{2}, 2)$ και $f'(x) < 0$ στο $(0, \frac{1}{2})$. Άρα η f είναι, διαδοχικά, γνησίως αύξουσα στο $[-1, 0]$, γνησίως φθίνουσα στο $[0, \frac{1}{2}]$ και γνησίως αύξουσα

στο $[\frac{1}{2}, 2]$. Ειδικώτερα, το σημείο 0 είναι σημείο τοπικού μεγίστου της f και το σημείο $\frac{1}{2}$ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της f. Το σημείο -1 είναι σημείο ολικού ελαχίστου της f και το σημείο 2 είναι σημείο ολικού μεγίστου της f.
Η f έχει δεύτερη παράγωγο

$$f''(x) = \begin{cases} -2, & \text{αν } -1 \leq x < 0 \\ 2, & \text{αν } 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

Άρα η f είναι γνησίως κοίλη στο $[-1, 0]$ και γνησίως κυρτή στο $[0, 2]$. Η f δεν έχει σημεία καμπής. (Αριστερά του σημείου 0 η f είναι κοίλη και δεξιά του είναι κυρτή, αλλά η f δεν έχει παράγωγο στο 0.)



6. *Αποδείξτε ότι ισχύει* $\frac{2}{\pi} x < \sin x < x$ *για κάθε* $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.
Λύση: Η ανισότητα $\sin x < x$ για $x > 0$ είναι γνωστή και μάλιστα την αποδείξαμε και στην άσκηση 2.
Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \sin x - (2/\pi)x$ με παράγωγο $f'(x) = \cos x - (2/\pi)$ και δεύτερη παράγωγο $f''(x) = -\sin x$.
Ισχύει $f''(x) < 0$ στο $(0, \pi/2)$, οπότε η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, \pi/2]$. Επειδή $f'(0) = 1 - (2/\pi) > 0$ και $f'(\pi/2) = -2/\pi < 0$, υπάρχει κάποιο $x_0 \in (0, \pi/2)$ ώστε να ισχύει $f'(x) > 0$ στο $[0, x_0)$ και $f'(x) < 0$ στο $(x_0, \pi/2]$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, x_0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, \pi/2]$. Επειδή $f(0) = f(\pi/2) = 0$, συμπεραίνουμε ότι ισχύει $f(x) > 0$ στο $(0, \pi/2)$.

7. *Έστω οποιαδήποτε ευθεία* l *του* xy*-επιπέδου με εξίσωση* $ax + by = c$*, όπου ένα τουλάχιστον από τα* a, b *είναι* $\neq 0$*, και οποιοδήποτε σημείο* $M = (x_0, y_0)$ *του ίδιου επιπέδου. Η απόσταση του* M *από την* l *είναι η ελάχιστη απόσταση από το* M *προς οποιοδήποτε σημείο της* l*. Αποδείξτε ότι η απόσταση του* M *από την* l *δίνεται από τον τύπο*

$$\frac{|ax_0 + by_0 - c|}{(a^2 + b^2)^{1/2}}.$$

Λύση: (i) Αν $b = 0$, τότε η l είναι κατακόρυφη με εξίσωση $x = \kappa = \frac{c}{a}$. Τα σημεία της l είναι τα $K = (\kappa, y)$ και η απόσταση ενός τυχόντος τέτοιου σημείου από το M είναι ίση με $\sqrt{(\kappa - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$. Είναι προφανές ότι η ελάχιστη τιμή αυτής της απόστασης είναι ίση με

$$\sqrt{(\kappa - x_0)^2} = |\kappa - x_0| = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{(a^2 + b^2)^{1/2}}$$

και πιάνεται όταν $y = y_0$, δηλαδή όταν το σημείο K συμπέσει με το σημείο (κ, y_0) της l.
(ii) Αν $b \neq 0$, τότε η l είναι πλάγια με εξίσωση $y = \mu x + \nu$, όπου $\mu = -\frac{a}{b}$, $\nu = \frac{c}{b}$. Τα σημεία της l είναι τα $K = (x, \mu x + \nu)$ και η απόσταση ενός τυχόντος τέτοιου σημείου από το M είναι ίση με $\sqrt{(x - x_0)^2 + (\mu x + \nu - y_0)^2}$.
Για να ελαχιστοποιήσουμε αυτήν την απόσταση, αρκεί να ελαχιστοποιήσουμε την συνάρτηση $f(x) = (x - x_0)^2 + (\mu x + \nu - y_0)^2$. Η f έχει παράγωγο

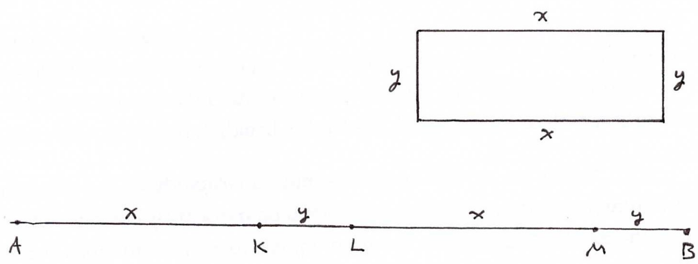
$$f'(x) = 2(x - x_0) + 2\mu(\mu x + \nu - y_0) = 2(1 + \mu^2)\big(x - \tfrac{x_0 + \mu y_0 - \mu\nu}{1+\mu^2}\big).$$

Ορίζουμε $p = \frac{x_0 + \mu y_0 - \mu\nu}{1+\mu^2}$ και έχουμε ότι ισχύει $f'(x) < 0$ στο $(-\infty, p)$ και $f'(x) > 0$ στο $(p, +\infty)$. Επομένως, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, p]$ και γνησίως αύξουσα στο $[p, +\infty)$ και άρα έχει ελάχιστη τιμή (μόνο) στο p.
Άρα η απόσταση $\sqrt{(x - x_0)^2 + (\mu x + \nu - y_0)^2}$ γίνεται ελάχιστη όταν $x = p$ και η ελάχιστη τιμή της απόστασης αυτής είναι ίση με

$$\sqrt{(p - x_0)^2 + (\mu p + \nu - y_0)^2} = \tfrac{|\mu x_0 + \nu - y_0|}{(1+\mu^2)^{1/2}} = \tfrac{|a x_0 + b y_0 - c|}{(a^2+b^2)^{1/2}}.$$

8. *Λυγίζουμε μία λεπτή ευθεία ράβδο μήκους l ώστε να σχηματισθεί ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Σε ποιά σημεία της πρέπει να λυγίσουμε την ράβδο ώστε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο να έχει μέγιστο εμβαδό;*

   Λύση: Αν A, B είναι τα άκρα της ράβδου, για να σχηματιστεί ορθογώνιο παραλληλόγραμμο από την ράβδο πρέπει να την λυγίσουμε στα διαδοχικά (από το A προς το B) σημεία K, L, M έτσι ώστε τα τμήματα AK, LM να έχουν ίσα μήκη και τα τμήματα KL, MB να έχουν, επίσης, ίσα μήκη.



   Αν x είναι το κοινό μήκος των AK, LM και y είναι το κοινό μήκος των KL, MB, τότε είναι $2x + 2y = l$ και το εμβαδό του ορθογώνιου παραλληλογράμμου που προκύπτει είναι ίσο με xy.
   Έχουμε, λοιπόν, να βρούμε τα $x, y > 0$ ώστε να μεγιστοποιηθεί η συνάρτηση xy με τον περιορισμό $2x + 2y = l$.
   Ισοδύναμα, έχουμε να βρούμε το $x \in (0, \frac{l}{2})$ ώστε να μεγιστοποιηθεί η $f(x) = x(\frac{l}{2} - x)$.
   Η παράγωγος της f είναι η $f'(x) = \frac{l}{2} - 2x$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, \frac{l}{4}]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[\frac{l}{4}, \frac{l}{2})$, οπότε το $\frac{l}{4}$ είναι το σημείο ολικού μεγίστου της f και η μέγιστη τιμή της είναι ίση με $f(\frac{l}{4}) = \frac{l^2}{16}$.
   Άρα η ράβδος πρέπει να χωριστεί σε τέσσερα ίσα μέρη και το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που θα προκύψει είναι τετράγωνο.

9. *Έστω ορθός κυκλικός κώνος με ύψος h και ακτίνα βάσης r. Ποιός είναι ο κύλινδρος ο οποίος περιέχεται στον κώνο με μία βάση του πάνω στην βάση του κώνου και έχει τον μέγιστο όγκο;*

   Λύση: Είναι αναμενόμενο ο κύλινδρος να έχει το κέντρο της βάσης του πάνω στο κέντρο της βάσης του κώνου. Αν η ακτίνα της βάσης του κυλίδρου είναι $x \in (0, r)$, τότε εύκολα

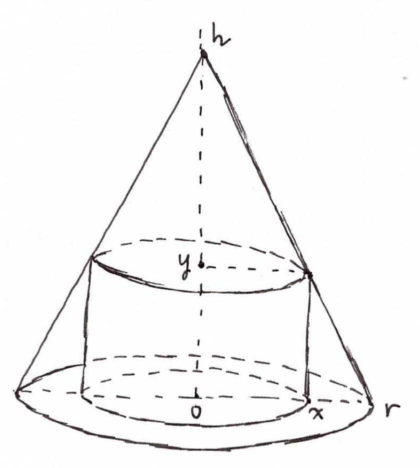
βλέπουμε (μέσω όμοιων τριγώνων) ότι το ύψος του είναι $y = h(1 - \frac{x}{r})$.
Ο όγκος του κυλίνδρου είναι ίσος με

$$V(x) = \pi x^2 y = \pi h x^2 (1 - \tfrac{1}{r}\, x).$$

Η παράγωγος του όγκου είναι

$$V'(x) = \pi h x (2 - \tfrac{3}{r}\, x).$$

Ισχύει $V'(x) > 0$ στο $(0, \frac{2r}{3})$ και $V'(x) < 0$ στο $(\frac{2r}{3}, r)$. Άρα η V είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, \frac{2r}{3}]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[\frac{2r}{3}, r)$. Επομένως ο όγκος μεγιστοποιείται όταν η ακτίνα της βάσης του είναι ίση με $\frac{2r}{3}$.



10. *Έστω ότι η f έχει δεύτερη παράγωγο στο (a, b) και ότι ισχύει $f(x)f''(x) \geq 0$ στο (a, b). Αν στο (a, b) περιέχονται δύο λύσεις της εξίσωσης $f(x)f'(x) = 0$ αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή ανάμεσα στις δύο αυτές λύσεις.*

Λύση: Έστω x_1 και x_2 με $x_1 < x_2$ οι δύο λύσεις της $f(x)f'(x) = 0$. Δηλαδή

$$f(x_1)f'(x_1) = f(x_2)f'(x_2) = 0.$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $g = ff'$ στο (a, b) και έχουμε ότι ισχύει

$$g'(x) = f(x)f''(x) + f'(x)^2 \geq 0 \qquad \text{στο } (a, b),$$

οπότε η g είναι αύξουσα στο (a, b). Όμως, $g(x_1) = g(x_2) = 0$, οπότε η g είναι σταθερή 0 στο $[x_1, x_2]$. Αυτό, φυσικά, σημαίνει ότι ισχύει

$$f(x)f''(x) + f'(x)^2 = g'(x) = 0 \qquad \text{στο } [x_1, x_2]$$

και, επειδή ισχύει $f(x)f''(x) \geq 0$ στο $[x_1, x_2]$, συνεπάγεται ότι ισχύει $f'(x) = 0$ στο $[x_1, x_2]$. Άρα η f είναι σταθερή στο $[x_1, x_2]$.
Από το σημείο στο οποίο βρήκαμε ότι η $g = ff'$ είναι σταθερή 0 στο $[x_1, x_2]$ μπορούμε να ακολουθήσουμε έναν δεύτερο δρόμο λιγότερο σύντομο αλλά διδακτικό.
Έχουμε ότι ισχύει

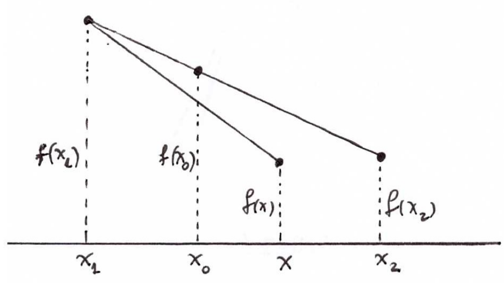
$$\big(f^2(x)\big)' = 2f(x)f'(x) = 0 \qquad \text{στο } [x_1, x_2].$$

Άρα η συνάρτηση f^2 είναι σταθερή στο διάστημα $[x_1, x_2]$. Δηλαδή ισχύει

$$f^2(x) = c \qquad \text{στο } [x_1, x_2]$$

για κάποια σταθερά $c \geq 0$.
Αν $c = 0$, τότε ισχύει $f(x) = 0$ στο $[x_1, x_2]$, οπότε η f είναι σταθερή στο $[x_1, x_2]$.
Αν $c > 0$, τότε η f δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο του $[x_1, x_2]$ και, επειδή είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, διατηρεί πρόσημο στο $[x_1, x_2]$. Άρα είτε ισχύει $f(x) = +\sqrt{c}$ στο $[x_1, x_2]$ είτε ισχύει $f(x) = -\sqrt{c}$ στο $[x_1, x_2]$.
Σε κάθε περίπτωση η f είναι σταθερή στο $[x_1, x_2]$.

11. *Έστω ότι η f είναι κυρτή στο διάστημα I και έστω $x_1, x_0, x_2 \in I$ με $x_1 < x_0 < x_2$. Αν το σημείο $(x_0, f(x_0))$ βρίσκεται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα το οποίο ενώνει τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$ αποδείξτε ότι το μέρος του γραφήματος της f το οποίο αντιστοιχεί στο $[x_1, x_2]$ ταυτίζεται με το ευθύγραμμο τμήμα το οποίο ενώνει τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$.*
Λύση: Το ότι η f είναι κυρτή συνεπάγεται ότι για κάθε $x \in (x_1, x_2)$ το σημείο $(x, f(x))$ δεν βρίσκεται πάνω από το ευθύγραμμο τμήμα l με άκρα τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$. Αυτό που πρέπει να αποδείξουμε λέει ότι το $(x, f(x))$ ανήκει στο ευθ. τμήμα l. Άρα πρέπει να αποδείξουμε ότι το $(x, f(x))$ δεν βρίσκεται κάτω από το ευθ. τμήμα l.



Τώρα έστω $x_0 < x < x_2$ και έστω (για άτοπο) ότι το $(x, f(x))$ βρίσκεται κάτω από το ευθ. τμήμα l. Τότε όμως το $(x_0, f(x_0))$ βρίσκεται πάνω από το ευθ. τμήμα με άκρα τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x, f(x))$ και καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα το $(x, f(x))$ βρίσκεται πάνω στο ευθ. τμήμα l.
Αν $x_1 < x < x_0$, με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι το $(x, f(x))$ βρίσκεται πάνω στο ευθ. τμήμα l.

12. *Χρησιμοποιώντας την κυρτότητα ή κοιλότητα σχετικών συναρτήσεων αποδείξτε τις παρακάτω ανισότητες:*
(i) $(\frac{x_1+x_2}{2})^a \leq \frac{x_1^a+x_2^a}{2}$ *για* $0 \leq x_1 < x_2$ *και* $a \geq 1$.
(ii) $(\frac{x_1+x_2}{2})^a \geq \frac{x_1^a+x_2^a}{2}$ *για* $0 \leq x_1 < x_2$ *και* $0 < a \leq 1$.
(iii) $e^{\frac{x_1+x_2}{2}} \leq \frac{e^{x_1}+e^{x_2}}{2}$ *για* $x_1 < x_2$.
(iv) $\log \frac{x_1+x_2}{2} \geq \frac{\log x_1+\log x_2}{2}$ *για* $0 < x_1 < x_2$.
Λύση: Έστω ότι η f είναι κυρτή στο διάστημα I και έστω $x_1, x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$. Το $\xi = \frac{x_1+x_2}{2}$ είναι το μέσο του διαστήματος $[x_1, x_2]$ και, λόγω κυρτότητας της f, η κλίση του ευθ. τμήματος με άκρα τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(\xi, f(\xi))$ είναι το πολύ ίση με την κλίση του ευθ. τμήματος με άκρα τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$. Δηλαδή

$$\frac{f(\xi)-f(x_1)}{\xi-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

Από το ότι $x_2 - x_1 = 2(\xi - x_1)$ παίρνουμε ότι $f(\xi) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, δηλαδή

$$f(\frac{x_1+x_2}{2}) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}. \tag{1}$$

Αν η f είναι κοίλη, τότε με τον ίδιο τρόπο παίρνουμε την αντίθετη ανισότητα.
Τώρα τα (i)-(iv) προκύπτουν από την (1) (ή την αντίθετή της) και από το ότι η $y = x^a$ είναι κυρτή στο $[0, +\infty)$ αν $a \geq 1$ και κοίλη στο $[0, +\infty)$ αν $0 < a \leq 1$, η $y = e^x$ είναι κυρτή στο $(-\infty, +\infty)$ και η $y = \log x$ είναι κοίλη στο $(0, +\infty)$.

13. *Χρησιμοποιώντας τους κανόνες του l' Hopitâl, βρείτε τα όρια*

$$\lim_{x\to 0} \tfrac{\sin x}{\arctan x}, \quad \lim_{x\to 0} \big(\tfrac{1}{\log(1+x)} - \tfrac{1}{x}\big), \quad \lim_{x\to 0} (x + e^x)^{1/x},$$

$$\lim_{x\to 1+} \log x \log(x-1), \quad \lim_{x\to 0+} x^{x^x - 1}, \quad \lim_{x\to +\infty} \tfrac{x(x^{1/x}-1)}{\log x}.$$

Λύση: Πριν ξεκινήσουμε θα κάνουμε ένα σχόλιο για την χρήση των κανόνων του l' Hopitâl. Όταν το όριο $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)}{g(x)}$ είναι απροσδιόριστη μορφή $0/0$ ή (οτιδήποτε)$/(\pm\infty)$, τότε επιτρέπεται να γράψουμε την ισότητα $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\xi} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ **υπό την προϋπόθεση** ότι το δεύτερο όριο (του λόγου των παραγώγων) υπάρχει. Τυπικά, πρέπει *πρώτα* να αποδείξουμε την ύπαρξη του δεύτερου ορίου και *κατόπιν* να επιστρέψουμε και να γράψουμε την ισότητα των δύο ορίων (εννοώντας ότι και το πρώτο όριο υπάρχει και είναι ίσο με το δεύτερο). Πολλές φορές για να μην διακόψουμε την *ροή των υπολογισμών* γράφουμε την ισότητα και συνεχίζουμε υπολογίζοντας το δεύτερο όριο. Μάλιστα μπορεί και το δεύτερο όριο να είναι απροσδιόριστη μορφή οπότε ξαναχρησιμοποιούμε τους κανόνες του l' Hopitâl εξισώνοντας το δεύτερο όριο με το όριο του λόγου των δεύτερων παραγώγων και ούτω καθ' εξής. Όμως, κάθε φορά που γράφουμε την ισότητα $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\xi} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ **πρέπει να έχουμε υπ'όψιν ότι σε περίπτωση που το τελικό όριο δεν υπάρχει τότε ούτε η ισότητα που γράψαμε ισχύει**.
Για παράδειγμα, το όριο $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\sin x}{x}$ είναι απροσδιόριστη μορφή $\frac{\pm\infty}{+\infty}$ και υπολογίζεται εύκολα χωρίς χρήση του κανόνα του l' Hopitâl:

$$\lim_{x\to+\infty} \tfrac{x-\sin x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \big(1 - \tfrac{\sin x}{x}\big) = 1 - 0 = 1.$$

Όμως αν γράψουμε την ισότητα

$$\lim_{x\to+\infty} \tfrac{x-\sin x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \tfrac{1-\cos x}{1}$$

καταλήγουμε σε όριο το οποίο δεν υπάρχει και κινδυνεύουμε να συμπεράνουμε λανθασμένα ότι λόγω της ισότητας ούτε το αρχικό όριο υπάρχει.
Μετά από αυτό το σχόλιο υπολογίζουμε τα διάφορα όρια της άσκησης. Όταν μία ισότητα προκύπτει από κανόνα του l' Hopitâl, θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\overset{\mathrm{H}}{=}$ γι αυτήν.
(i) Το πρώτο όριο είναι απροσδιόριστη μορφή $0/0$. Γράφουμε

$$\lim_{x\to 0} \tfrac{\sin x}{\arctan x} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 0} \tfrac{\cos x}{1/(1+x^2)} = 1.$$

(ii) Το δεύτερο όριο είναι απροσδιόριστη μορφή $(\pm\infty) - (\pm\infty)$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \big(\tfrac{1}{\log(1+x)} - \tfrac{1}{x}\big) &= \lim_{x\to 0} \tfrac{x-\log(1+x)}{x\log(1+x)} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 0} \tfrac{1-1/(1+x)}{\log(1+x)+x/(1+x)} \\ &\overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 0} \tfrac{1/(1+x)^2}{1/(1+x)+1/(1+x)^2} = \lim_{x\to 0} \tfrac{1}{2+x} = \tfrac{1}{2}.\end{aligned}$$

(iii) Το τρίτο όριο είναι απροσδιόριστη μορφή $1^{\pm\infty}$. Γράφουμε $(x+e^x)^{1/x} = e^{(1/x)\log(x+e^x)}$ και υπολογίζουμε το όριο $\lim_{x\to 0} \frac{\log(x+e^x)}{x}$, το οποίο είναι απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Έχουμε

$$\lim_{x\to 0} \tfrac{\log(x+e^x)}{x} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 0} \tfrac{1+e^x}{x+e^x} = 2,$$

και άρα $\lim_{x\to 0}(x+e^x)^{1/x} = e^2$.

(iv) Το τέταρτο όριο είναι απροσδιόριστη μορφή $(0+)(-\infty)$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1+} \log x \log(x-1) &= \lim_{x\to 1+} \tfrac{\log(x-1)}{1/\log x} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 1+} \tfrac{1/(x-1)}{-1/(x\log^2 x)} \\ &= -\lim_{x\to 1+} \tfrac{x\log^2 x}{x-1} = -\lim_{x\to 1+} \tfrac{\log^2 x}{x-1} \overset{\mathrm{H}}{=} -\lim_{x\to 1+} \tfrac{2\log x}{x} = 0.\end{aligned}$$

(v) Το πέμπτο όριο είναι πιο σύνθετο από τα προηγούμενα τέσσερα. Το $\lim_{x\to 0+} x^x$ είναι απροσδιόριστη μορφή 0^0 και το υπολογίζουμε αφού γράψουμε $x^x = e^{x\log x}$. Έχουμε

$$\lim_{x\to 0+} x\log x = \lim_{x\to 0+} \tfrac{\log x}{1/x} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 0+} \tfrac{1/x}{-1/x^2} = -\lim_{x\to 0+} x = 0.$$

Επομένως, $\lim_{x\to 0+} x^x = e^0 = 1$ και άρα το $\lim_{x\to 0+} x^{x^x-1}$ είναι πάλι απροσδιόριστη μορφή 0^0.

Τώρα γράφουμε $x^{x^x-1} = e^{(x^x-1)\log x}$, οπότε αρκεί να βρούμε το $\lim_{x\to 0+}(x^x-1)\log x$ που είναι απροσδιόριστη μορφή $0(-\infty)$. Τώρα

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+}(x^x-1)\log x &= \lim_{x\to 0+} \tfrac{x^x-1}{1/\log x} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 0+} \tfrac{x^x(\log x+1)}{-1/(x\log^2 x)} \\ &= -\lim_{x\to 0+} x^{x+1}(\log x+1)\log^2 x \\ &= -\lim_{x\to 0+} x(\log x+1)\log^2 x \\ &= -\lim_{x\to 0+} (x\log^3 x + x\log^2 x).\end{aligned}$$

Από το $\lim_{x\to 0+} x\log x = 0$ προκύπτει εύκολα το $\lim_{x\to 0+} x\log^n x = 0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+} x\log^n x &= \lim_{x\to 0+}(x^{1/n}\log x)^n = n^n \lim_{x\to 0+}(x^{1/n}\log(x^{1/n}))^n \\ &= n^n \lim_{y\to 0+}(y\log y)^n = 0.\end{aligned}$$

Άρα

$$\lim_{x\to 0+}(x^x-1)\log x = -\lim_{x\to 0+}(x\log^3 x + x\log^2 x) = 0$$

και, επομένως, $\lim_{x\to 0+} x^{x^x-1} = e^0 = 1$.

(vi) Το έκτο όριο είναι κι αυτό σύνθετο. Το $\lim_{x\to +\infty} x^{1/x}$ είναι απροσδιόριστη μορφή $(+\infty)^0$. Έχουμε $x^{1/x} = e^{(\log x)/x}$ και υπολογίζουμε το $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x}$ που είναι απροσδιόριστη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$. Τώρα

$$\lim_{x\to+\infty} \tfrac{\log x}{x} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \tfrac{1}{x} = 0,$$

οπότε $\lim_{x\to+\infty} x^{1/x} = e^0 = 1$.

Επομένως στο $\lim_{x\to+\infty} \frac{x(x^{1/x}-1)}{\log x}$ ακόμη και το όριο του αριθμητή είναι απροσδιόριστη μορφή $(+\infty)0$.

Σκεφτόμαστε, όμως, ένα κόλπο. Γράφουμε

$$\lim_{x\to+\infty} \tfrac{x(x^{1/x}-1)}{\log x} = \lim_{x\to+\infty} \tfrac{e^{(\log x)/x}-1}{(\log x)/x} = \lim_{y\to 0} \tfrac{e^y-1}{y} = 1.$$

14. *Μπορείτε να υπολογίσετε το $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ με διαδοχικές εφαρμογές του δεύτερου κανόνα του l' Hopitâl; Μήπως το όριο αυτό υπολογίζεται πολύ εύκολα χωρίς αναφορά στον δεύτερο κανόνα του l' Hopitâl;*

Λύση: Με διαδοχικές εφαρμογές του δεύτερου κανόνα του l’ Hopitâl προκύπτει συνεχώς η ίδια απροσδιόριστη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$ και δημιουργείται ένας αέναος φαύλος κύκλος:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \stackrel{\text{H}}{=} \dots$$

Το όριο υπολογίζεται πολύ εύκολα, χωρίς τον δεύτερο κανόνα του l’ Hopitâl:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{1/2} = 1.$$