

Απειροστικός Λογισμός I, χειμερινό εξάμηνο 2019-20.

Δέκατο τρίτο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Εφαρμόστε το κριτήριο λόγου σε όποιες από τις παρακάτω σειρές είναι αυτό δυνατό.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+2}{(\sqrt{2})^n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(-3)^n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n^n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n n!}{n^n},$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-e)^n n!}{n^n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-3)}.$$

2. Εφαρμόστε το κριτήριο ρίζας σε όποιες από τις παρακάτω σειρές είναι αυτό δυνατό.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{n+1}{2n-1}\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3n-1)^{2n}}{(2n+1)^{2n}}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{e^n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n}{(n+1)^n},$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n2^n}{(\sqrt[n]{n+1})^n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-e)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}.$$

3. Εξετάστε ως προς την σύγκλιση και την απόλυτη σύγκλιση τις σειρές:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{4/3}}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{3/4}}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+1}}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^2}{3^n},$$
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \log n}, \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \log^2 n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \log \left(1 + \frac{1}{n}\right),$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[n]{n}}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \sin \frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right).$$

4. Βρείτε τα διαστήματα σύγκλισης των δυναμοσειρών

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n^3 x^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n x^n}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n^n x^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1} x^n,$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n} x^n, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} x^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} x^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} x^n.$$

Μην παραβλέψετε τα άκρα των διαστημάτων σύγκλισης.

5. Χρησιμοποιήστε γνωστές σειρές Taylor για να βρείτε συνοπτικούς τύπους για τις δυναμοσειρές

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (1 - 2^n) x^n, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\log^n a}{n!} x^n,$$
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n}}{(2n)!} x^{2n}, \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n-1}{n!} x^n, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n},$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)!} x^{2n-1}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n} x^{2n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n-1} x^{2n-1}.$$