Απειροστικός Λογισμός Ι, χειμερινό εξάμηνο 2019-20.

Τέταρτο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Ποιά από τα παρακάτω όρια έχουν νόημα;

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{-x^2},\quad \lim_{x\to 1+}\sqrt{1-x^2},\quad \lim_{x\to 0-}\log\tfrac{1}{x},\quad \lim_{x\to 1-}\log(x^2-1),$$

$$\lim_{x\to 0-}\tfrac{1}{x+|x|},\quad \lim_{x\to 0-}x^{\sqrt{3}},\quad \lim_{x\to 1}\sqrt[4]{(x^2-2x+1)(1-2x)},\quad \lim_{x\to 1+}\big(\tfrac{1-x}{1+x}\big)^{1/2}.$$

Προσέξτε: δεν εξετάζουμε το αν υπάρχουν τα όρια αυτά ή το ποιά είναι η τιμή τους. Εξετάζουμε, απλώς, αν έχουν νόημα.

2. Αποδείξτε βάσει των ορισμών ότι

$$\lim_{x\to 2}(2x+4)=8,\quad \lim_{x\to 1}\tfrac{1}{x+1}=\tfrac{1}{2},\quad \lim_{x\to 1}x^2=1,\quad \lim_{x\to 2}\log x=\log 2,\quad \lim_{x\to 0}e^x=1,$$

$$\lim_{x\to 1+}\tfrac{1}{1-x}=-\infty,\quad \lim_{x\to +\infty}e^x=+\infty,\quad \lim_{x\to 0+}\log x=-\infty,\quad \lim_{x\to -\infty}\tfrac{x-3}{2x+1}=\tfrac{1}{2}.$$

3. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x\to\pm\infty}\tfrac{x^4-x+1}{-3x^4+x^2}=-\tfrac{1}{3},\quad \lim_{x\to\pm\infty}\tfrac{1-x^8}{1+2x^2}=-\infty,\quad \lim_{x\to\pm\infty}\tfrac{-2x+x^5}{1-x^2}=\mp\infty,$$

$$\lim_{x\to 1}\tfrac{x^{12}-1}{x^2-1}=6,\quad \lim_{x\to 1\pm}\tfrac{x^4-x^3-3x^2+5x-2}{x^4+x^3-4x^2+x+1}=-\tfrac{1}{5},\quad \lim_{x\to 1\pm}\tfrac{x^3-x^2-x+1}{x^5-3x^4+6x^3-10x^2+9x-3}=\pm\infty,$$

$$\lim_{x\to 1\pm}\tfrac{1}{x^{-2}-1}=\mp\infty,\quad \lim_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=\tfrac{1}{2},\quad \lim_{x\to +\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=\tfrac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to +\infty}x\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-2\sqrt{x}+\sqrt{x-1})=-\tfrac{1}{4},\quad \lim_{x\to 64}(2x^{4/3}+x^{-1/6})=\tfrac{1025}{2},$$

$$\lim_{x\to +\infty}\tfrac{x^{7/8}-3x^{-2}+2x^{6/5}-4}{x^{6/5}-2x^{9/8}+2}=2,\quad \lim_{x\to +\infty}\tfrac{x^{3/2}-2x^{6/5}+1}{x+4x^{4/3}+2}=+\infty,\quad \lim_{x\to +\infty}\tfrac{x^{7/4}-x^{1/3}}{x^2+3x^{15/8}}=0,$$

$$\lim_{x\to 0}\big(\tfrac{2}{\sqrt[3]{x}}-\tfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\big)=-\infty,\quad \lim_{x\to +\infty}(e^x-e^{2x}+2)=-\infty,\quad \lim_{x\to +\infty}\tfrac{e^{2x}+e^x+1}{e^x-2e^{2x}+2}=-\tfrac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to +\infty}(\log^2 x-\log x)=+\infty,\quad \lim_{x\to 0+}(2\log^2 x-3\log x)=+\infty,$$

$$\lim_{x\to +\infty}\tfrac{1+2\log^2 x}{2+\log^3 x}=0,\quad \lim_{x\to 0+}\tfrac{1+2\log^2 x}{2+\log^3 x}=0,\quad \lim_{x\to 0\pm}\tfrac{1}{1-e^x}=\mp\infty,\quad \lim_{x\to 0}\tfrac{e^{3x}-1}{e^x-1}=3,$$

$$\lim_{x\to 0+}\tfrac{\log(7x)}{\log(2x)}=1,\quad \lim_{x\to 1\pm}\big(\tfrac{4}{\log^2 x}-\tfrac{1}{\log^3 x}\big)=\mp\infty,\quad \lim_{x\to 7-}[x]=6,\quad \lim_{x\to 7+}[x]=7,$$

$$\lim_{x\to 7{,}5}[x]=7,\quad \lim_{x\to -\infty}[1/x]=-1,\quad \lim_{x\to +\infty}[1/x]=0,\quad \lim_{x\to -\infty}x[1/x]=-\infty,$$

$$\lim_{x\to +\infty}x[1/x]=0,\quad \lim_{x\to\pm\infty}[x]=\pm\infty,\quad \lim_{x\to\pm\infty}\tfrac{[3x]}{x}=2,\quad \lim_{x\to +\infty}\tfrac{[x]}{x^2}=0,$$

$$\lim_{x\to 0\pm}\big[\tfrac{1}{x}\big]=\pm\infty,\quad \lim_{x\to 0\pm}x\big[\tfrac{1}{x}\big]=1,\quad \lim_{x\to 0}\tfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}=\tfrac{1}{2},\quad \lim_{x\to 0}x\cot x=1.$$

4. (i) Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x\to 0+}x^a\sin x=\begin{cases}0 & \text{αν } a>-1\\ 1 & \text{αν } a=-1\\ +\infty & \text{αν } a<-1\end{cases}$$

(ii) Αν $a>0$ αποδείξτε ότι $\lim_{x\to 0+}x^a\sin\frac{1}{x}=0$.

5. Έστω $f:(3,+\infty)\to\mathbb{R}$ και $f(x)\neq -1$ για κάθε $x>3$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to 3} f(x)=1$ αν και μόνο αν $\lim_{x\to 3}\frac{2}{f(x)+1}=1$.

6. Αν $(x-1)f(x)\geq 1$ για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,2)$ βρείτε τα πλευρικά όρια της f στο 1.

7. (i) Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x)=+\infty$ και ότι η g είναι κάτω φραγμένη κοντά στο ξ. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to\xi}(f(x)+g(x))=+\infty$.
(ii) Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x)=+\infty$ ή $-\infty$ και ότι η g έχει θετικό κάτω φράγμα κοντά στο ξ. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to\xi}(f(x)g(x))=+\infty$ ή $-\infty$, αντιστοίχως.

8. (i) Δώστε παράδειγμα όπου υπάρχει το όριο $\lim_{x\to\xi}(f(x)+g(x))$ αλλά δεν υπάρχουν τα όρια $\lim_{x\to\xi} f(x)$, $\lim_{x\to\xi} g(x)$.
(ii) Δώστε παράδειγμα όπου υπάρχει το όριο $\lim_{x\to\xi} f(x)g(x)$ αλλά δεν υπάρχουν τα όρια $\lim_{x\to\xi} f(x)$, $\lim_{x\to\xi} g(x)$.

9. (i) Αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{1}{4}<\frac{3x^7-1}{3x^4+2x-1}<\frac{3}{4}$ κοντά στο 1.
(ii) Αποδείξτε ότι ισχύει $1-10^{-5}<\frac{x^4+26x^3+5x^2+x-4}{x^4-2x^2+x-1}<1+10^{-5}$ κοντά στο $-\infty$.

10. Έστω a,b,c με $a>0$.
Βρείτε A,B συναρτήσει των a,b,c ώστε $\lim_{x\to+\infty}\big(\sqrt{ax^2+bx+c}-Ax-B\big)=0$.
Με τα A,B τα οποία βρήκατε αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty} x\big(\sqrt{ax^2+bx+c}-Ax-B\big)=\frac{4ac-b^2}{8a\sqrt{a}}$.

11. Αν ισχύει $|a\sin x+b\sin 3x+c\sin 8x|\leq|\sin x|$ για κάθε x αποδείξτε ότι $|a+3b+8c|\leq 1$.

12. Έστω ότι η f είναι ορισμένη στην ένωση $(-1,0)\cup(0,1)$.
(i) Αν $\lim_{x\to 0}\big(f(x)+\frac{1}{f(x)}\big)=2$ αποδείξτε ότι $\lim_{x\to 0} f(x)=1$.
(ii) Αν $\lim_{x\to 0}\big(f(x)+\frac{1}{|f(x)|}\big)=0$ αποδείξτε ότι $\lim_{x\to 0} f(x)=-1$.