

Απειροστικός Λογισμός Ι, χειμερινό εξάμηνο 2019-20.

Έκτο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Βρείτε τα a, b ώστε η συνάρτηση $\begin{cases} x^2 + ax + b & \text{αν } x < 1 \\ bx + 1 & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$ να έχει παράγωγο στο 1.
2. Βρείτε τα a, b ώστε η συνάρτηση $\begin{cases} 2x^2 + x + 1 & \text{αν } x \leq 0 \\ ax + b & \text{αν } x > 0 \end{cases}$ να έχει παράγωγο στο 0.
Κάντε το ίδιο για την $\begin{cases} 2x^2 + x + 1 & \text{αν } x < 0 \\ ax + b & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$
3. Βρείτε b, c ώστε η εφαπτόμενη ευθεία του γραφήματος της $x^2 + bx + c$ στο σημείο $(1, 1)$ να είναι η $y = x$.
4. Βρείτε την σχέση ανάμεσα στα a, b η οποία είναι ισοδύναμη με το να εφάπτονται σε κάποιο κοινό τους σημείο τα γραφήματα των συναρτήσεων $ax^2 + 3$ και $x^2 + bx + 1$.
5. Σε ποιά σημεία του το γράφημα της $x^{1/3}$ έχει εφαπτόμενη ευθεία κάθετη στην ευθεία $y = -\frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$; στην ευθεία $y = \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$; στην ευθεία $x = 4$; στην ευθεία $y = 1$;
6. Αποδείξτε ότι αν πάρουμε οποιαδήποτε ευθεία εφαπτόμενη στην καμπύλη $xy = a$ ($a > 0$) το ευθύγραμμο τμήμα της το οποίο αποκόπτεται από τον x -άξονα και τον y -άξονα διχοτομείται από το σημείο επαφής (της εφαπτόμενης ευθείας με την καμπύλη). Μπορείτε να θεωρήσετε οποιαδήποτε από τις x, y ως ανεξάρτητη μεταβλητή.
7. (i) Βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας σε κάθε σημείο της καμπύλης $y^6 = x^5$. Η λύση είναι απλούστερη αν θεωρήσετε την y ως ανεξάρτητη μεταβλητή και την x ως εξαρτημένη μεταβλητή. Αν θεωρήσετε την x ως ανεξάρτητη μεταβλητή τότε πρέπει να θεωρήσετε την καμπύλη ως ένωση των γραφημάτων των $y = x^{5/6}$ και $y = -x^{5/6}$ στο διάστημα $[0, +\infty)$ και να προσέξετε ιδιαίτερος το σημείο $(0, 0)$ της καμπύλης.
(ii) Να επαναλάβετε τα προηγούμενα για την καμπύλη $y^4 = x^5$. Μήπως τώρα υπάρχει κάποιο πρόβλημα με την εφαπτόμενη ευθεία στο σημείο $(0, 0)$;
8. Θεωρήστε την συνάρτηση $\begin{cases} x^a \sin(1/x) & \text{αν } x > 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$
Αποδείξτε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ αν και μόνο αν $a > 0$, και ότι είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ αν και μόνο αν $a > 1$.