**Απειροστικός Λογισμός Ι, χειμερινό εξάμηνο 2019-20.**

**Όγδοο φυλλάδιο ασκήσεων.**

1. Παρατηρήστε ότι τα όρια
$$\lim_{x\to 1}\tfrac{\log x}{x-1},\qquad \lim_{x\to 0}\tfrac{e^x-1}{x},\qquad \lim_{x\to 1}\tfrac{x^a-1}{x-1}$$
είναι γνωστές παράγωγοι συγκεκριμένων συναρτήσεων σε συγκεκριμένα σημεία και *ως τέτοιες* υπολογίστε τα. Βάσει των ορίων αυτών αποδείξτε ότι
$$\lim_{x\to 1}\tfrac{\log x}{x^a-1}=\tfrac{1}{a},\quad \lim_{x\to 1}\tfrac{x^a-x^b}{x-1}=a-b,\quad \lim_{x\to 0}\tfrac{a^x-b^x}{x}=\log\tfrac{a}{b},\quad \lim_{x\to 0}\tfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}=a-b.$$

2. Έστω $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ και $0<\xi<+\infty$. Αν η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $\xi$ αποδείξτε ότι:
$$\lim_{x\to\xi}\big(\tfrac{f(x)}{f(\xi)}\big)^{1/(x-\xi)}=e^{f'(\xi)/f(\xi)},\qquad \lim_{x\to\xi}\big(\tfrac{f(x)}{f(\xi)}\big)^{1/(\log x-\log\xi)}=e^{\xi f'(\xi)/f(\xi)}.$$

3. Έστω $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$, $a<\xi<b$ και έστω ότι ισχύει $f(x)>0$ για κάθε $x\in(a,b)$. Αν οι $f,g$ είναι παραγωγίσιμες στο $\xi$ αποδείξτε ότι και η $f^g:(a,b)\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\xi$ και υπολογίστε την παράγωγό της στο $\xi$.
Υπολογίστε τις παραγώγους των
$$x^x\quad \text{στο } (0,+\infty),\qquad (x^2+1)^{\sin x}\quad \text{στο } \mathbb{R},\qquad |x-1|^{x-2}|x-2|^{x-1}\quad \text{στο } \mathbb{R}\setminus\{1,2\}.$$

4. Έστω $a<b$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi$ ώστε
(i) $a<\xi<b$ και $e^b-e^a=(b-a)e^\xi$.
(ii) $a<\xi<b$ και $\cos b-\cos a=-(e^b-e^a)e^{-\xi}\sin\xi$.
(iii) $a<\xi<b$ και $e^b-e^a=(\arctan b-\arctan a)(1+\xi^2)e^\xi$.

5. Μπορεί η εξίσωση $x^3-12x=c$ να έχει δύο διαφορετικές λύσεις στο διάστημα $[-2,2]$; στο $(-\infty,-2]$; στο $[2,+\infty)$;

6. (i) Αποδείξτε ότι η εξίσωση $x^3/3=\sin x-x\cos x$ έχει ακριβώς μία λύση.
(ii) Αποδείξτε ότι η εξίσωση $x^3/6=\sin x-x\cos x$ έχει ακριβώς τρεις λύσεις.

7. Θεωρήστε την $y=2\sqrt[3]{x^2}-1=2|x|^{2/3}-1$ και παρατηρήστε ότι έχει την ίδια τιμή 1 στα σημεία 1 και $-1$. Το συμπέρασμα του θεωρήματος του Rolle είναι ότι υπάρχει $\xi\in(-1,1)$ στο οποίο μηδενίζεται η παράγωγος της συνάρτησης. Υπάρχει τέτοιο $\xi$ και ποιό είναι το πρόβλημα;

8. Πόσες λύσεις έχει η εξίσωση $e^x=1$; η εξίσωση $e^x=1+x$; η εξίσωση $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}$;
Γενικεύστε με επαγωγή: πόσες λύσεις έχει η εξίσωση $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$;

9. Έστω $f$ συνεχής στο $[-1,3]$, $f(3)=-7$ και έστω ότι ισχύει $f'(x)\ge -2$ στο $(-1,3)$.
(i) Αποδείξτε ότι $f(-1)\le 1$.
(ii) Αν υποθέσουμε επιπλέον ότι $f(-1)=1$, αποδείξτε ότι ισχύει $f(x)=-2x-1$ στο $[-1,3]$.

10. (i) Αν η $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $|f'(x)|\le\frac{1}{x}$ για κάθε $x>0$ αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty}(f(x+\sqrt{x})-f(x))=0$.
(ii) Αν η $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0$ αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x))=0$.

11. Βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα σημεία τοπικού και ολικού ακροτάτου των

$$x^2 - x - 1, \quad x^3 - 15x^2 + 72x + 7, \quad \tfrac{x^2-2x+3}{x^2+2x+3}, \quad \tfrac{\sqrt{x}}{x+4}, \quad x^2 e^{-x}, \quad \sin x - \cos x,$$

$$\tfrac{\sin(3x)}{3} - \cos x, \quad x + \sin x, \quad x + |\sin x|, \quad \tfrac{\log x}{x}, \quad |x| e^{-|x-1|}, \quad \arctan x - \log(1 + x^2).$$

12. Βρείτε τα σημεία τοπικού ακροτάτου των παρακάτω συναρτήσεων στα αντίστοιχα διαστήματα.
(i) $(x-1)|x|$ στο $[-1, 3]$.
(ii) $|x^2 - 3x + 2|$ στο $[-3, 10]$.
(iii) $\frac{\log^2 x}{x}$ στο $[1, 3]$.
(iv) $x + \frac{1}{x}$ στο $[\frac{1}{3}, 3]$.
(v) $e^x \sin x$ στο $[0, 2\pi]$.

13. Βρείτε την τιμή του $a > 0$ για την οποία η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $a \log x + 2a - x$ στο διάστημα $(0, +\infty)$ είναι η ελάχιστη δυνατή.

14. Αποδείξτε ότι
(i) $\frac{2}{\pi} x < \sin x < x$ για κάθε $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.
(ii) $\log \frac{1+x}{1-x} > 2x + \frac{2x^3}{3}$ για κάθε $x \in (0, 1)$.
(iii) $\log \frac{1+x}{1-x} < 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{2}$ για κάθε $x \in (0, \frac{1}{2}]$.
(iv) $e^{x/(x+1)} < 1 + x$ για κάθε $x > -1$.
(v) $x > \arctan x > x - \frac{x^3}{3}$ για κάθε $x > 0$.

15. Αποδείξτε ότι $(x+1)^a \geq ax + 1$ για κάθε $x \geq -1$ και κάθε $a \geq 1$ και ότι η ισότητα ισχύει μόνο αν $x = 0$ ή $a = 1$. Η ανισότητα αυτή είναι γενίκευση της ανισότητας του Bernoulli.

16. Έστω οποιαδήποτε ευθεία $l$ του $xy$-επιπέδου με εξίσωση $ax + by = c$, όπου ένα τουλάχιστον από τα $a, b$ είναι $\neq 0$, και οποιοδήποτε σημείο $M = (x_0, y_0)$ του ίδιου επιπέδου. Η απόσταση του $M$ από την $l$ είναι η ελάχιστη απόσταση από το $M$ προς οποιοδήποτε σημείο της $l$. Αποδείξτε ότι η απόσταση του $M$ από την $l$ δίνεται από τον τύπο

$$\tfrac{|ax_0 + by_0 - c|}{(a^2+b^2)^{1/2}}.$$

17. Λυγίζουμε μία λεπτή ευθεία ράβδο μήκους $l$ ώστε να σχηματισθεί ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Σε ποιά σημεία της πρέπει να λυγίσουμε την ράβδο ώστε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο να έχει μέγιστο εμβαδό;

18. Έστω ορθός κυκλικός κώνος με ύψος $h$ και ακτίνα βάσης $r$. Ποιός είναι ο κύλινδρος ο οποίος περιέχεται στον κώνο με μία βάση του πάνω στην βάση του κώνου και έχει τον μέγιστο όγκο;