

Απειροστικός Λογισμός I, χειμερινό εξάμηνο 2019-20.

Τελικό διαγώνισμα. Τμήμα Α.

Οι απαντήσεις σας πρέπει να είναι αιτιολογημένες, σαφείς, σωστά διατυπωμένες και σύντομες. Το διαγώνισμα διαρκεί τρεις ώρες.

1. Στον ορισμό της συνέχειας της συνάρτησης $\frac{x+3}{x+1}$ στο 0, ποιο είναι το μεγαλύτερο κατάλληλο δ για το $\epsilon = 1/2$;

2. Βρείτε τα όρια ακολουθιών:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n^2+1} \left[\frac{n^2+1}{n+1} \right], \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{3n} \right)^{n+2}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n \tan \frac{\pi}{n}.$$

3. Βρείτε τα όρια συναρτήσεων:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x) \sin \frac{1}{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{\sin x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x},$$
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\cos x + \sin x) \tan \frac{1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right).$$

4. Θεωρήστε την συνάρτηση

$$f(x) = \frac{\log x}{x}.$$

Βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της, τα διαστήματα κυρτότητας και κοιλότητάς της, τα σημεία (τοπικού) ακροτάτου της, τα σημεία καμψής της και τις ασύμπτωτες ευθείες (κάθε είδους) στο γράφημά της. Σχεδιάστε το γράφημά της. Ειδικότερα, στα σημεία (τοπικού) ακροτάτου και στα σημεία καμψής σχεδιάστε τις εφαπτόμενες ευθείες στο γράφημα ώστε να φαίνεται ότι πρόκειται για σημεία ακροτάτου και σημεία καμψής.

5. Μελετήστε την ακολουθία (x_n) ως προς την ύπαρξη και την τιμή του ορίου της αν γνωρίζετε ότι $1 < x_1 < 3$ και ότι ισχύει

$$4x_{n+1} = x_n^2 + 3$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

6. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx, \quad \int \arctan x dx, \quad \int \frac{1}{x^2(x^2+1)} dx.$$

7. Υπολογίστε τις τιμές των γενικευμένων ολοκληρωμάτων:

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx, \quad \int_1^{+\infty} \frac{\log x}{(x+1)^2} dx.$$

8. Εφαρμόστε το ολοκληρωτικό κριτήριο στην πρώτη, το κριτήριο λόγου στην δεύτερη και το κριτήριο ρίζας στην τρίτη από τις σειρές:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2+1}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k (k!)^2}{(2k)!}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k 3^k}{(\sqrt[k]{k+1})^k}.$$

Ποιές από αυτές συγκλίνουν;

9. Βρείτε τα διαστήματα σύγκλισης (χωρίς να παραβλέψετε τα άκρα τους) των δυναμοσειρών:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k k}{k^2+1} x^k, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2+1} x^k.$$

Καλή επιτυχία!

Μ. Παπαδημητράκης.