Απειροστικός Λογισμός ΙΙ, εαρινό εξάμηνο 2016-17.

Πρώτο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Ποιά συνθήκη πρέπει να επιβληθεί στο σημείο (x, y, z) ώστε αυτό να παριστάνει: το γενικό σημείο του y-άξονα; το γενικό σημείο του xz-επιπέδου;

2. Πώς περιγράφουμε την ευθεία που παράγεται από το διάνυσμα $(-1, 3)$;

3. Παράγεται ευθεία από τα διανύσματα $(2, 7)$, $(1, -3)$; Τί παράγεται από αυτά τα διανύσματα;

4. Πώς περιγράφουμε την ευθεία που παράγεται από το διάνυσμα $(-1, 2, 2)$;

5. Πώς περιγράφουμε το επίπεδο που παράγεται από τα διανύσματα $(2, 7, 0)$, $(-1, 3, 5)$;

6. Παράγεται επίπεδο από τα διανύσματα $(1, -2, 4)$, $(-2, 4, -8)$; Τί παράγεται από αυτά τα διανύσματα;

7. Παράγεται επίπεδο από τα διανύσματα $(1, -2, 4)$, $(1, 1, 3)$, $(3, -3, 11)$;

8. Παράγεται επίπεδο από τα διανύσματα $(1, -2, 4)$, $(1, 1, 3)$, $(1, 4, 7)$; Τί παράγεται από αυτά τα διανύσματα;

9. Βρίσκονται τα σημεία $(2, 3, -4)$, $(2, 1, -1)$, $(2, 7, -10)$ πάνω στην ίδια ευθεία;

10. Βρίσκονται τα σημεία $(2, 3, -4)$, $(2, 0, -1)$, $(2, 7, -10)$, $(-2, 4, 15)$ πάνω στο ίδιο επίπεδο;

11. Έστω $\mathbf{u} = (-1, 2)$. Βρείτε τα διανύσματα $\mathbf{v}$ για τα οποία ισχύει $\|\mathbf{v}\| = 4$ και $\mathbf{v} \perp \mathbf{u}$.

12. Βρείτε τη γωνία ανάμεσα στα διανύσματα $\mathbf{u} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

13. Τα διανύσματα $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο με μήκος πλευράς ίσο με 1. Υπολογίστε το $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

14. Βρείτε με δύο τρόπους το εμβαδό του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν τα διανύσματα $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$ καθώς και τα διανύσματα $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

15. Βρείτε τον όγκο του παραλληλεπιπέδου που σχηματίζουν τα $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{w} = 2\mathbf{i} - \mathbf{k}$.

16. Πώς σχετίζονται τα μη-μηδενικά $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ στον $\mathbb{R}^2$ ή στον $\mathbb{R}^3$ αν $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$ ή αν $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$;

17. Έστω α, β, γ οι κυρτές γωνίες του μη-μηδενικού διανύσματος $\mathbf{u}$ στον $\mathbb{R}^3$ με τον x-άξονα, τον y-άξονα και τον z-άξονα αντιστοίχως. Αποδείξτε ότι
$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

18. Κάνοντας χρήση διανυσμάτων αποδείξτε ότι οι διαγώνιοι ενός ορθογώνιου παραλληλογράμμου τέμνονται κάθετα αν και μόνο αν το παραλληλόγραμμο είναι τετράγωνο.

19. [α] Αποδείξτε ότι $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ αν και μόνο αν τα $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ είναι συνευθειακά.

    [β] Έστω μη-συνευθειακά $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ και μη-συνευθειακά $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, όλα στον $\mathbb{R}^3$. Πώς σχετίζονται τα τέσσερα διανύσματα αν τα $\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2$, $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ είναι συνευθειακά;

20. Έστω $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 5\mathbf{k}$. Βρείτε τα διανύσματα $\mathbf{w}$ για τα οποία ισχύει $\|\mathbf{w}\| = 2$ και $\mathbf{w} \perp \mathbf{u}$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{v}$.

21. Ποιά είναι η γεωμετρική σχέση ανάμεσα στα μη-μηδενικά $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ αν $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \frac{1}{2}\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$;

22. Έστω μη-μηδενικά $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ στον $\mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$. Περιγράψτε γεωμετρικά τα $\mathbf{u}$ που είναι τέτοια ώστε
$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{w}, \qquad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|.$$
Γιατί βάζουμε από την αρχή τον περιορισμό $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$;

23. Λύστε την άσκηση 16 αν τα διανύσματα είναι στον $\mathbb{R}^n$.

24. Αποδείξτε αλγεβρικά την ταυτότητα του Lagrange
$$\Big(\sum_{j=1}^{n} x_j y_j\Big)^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \sum_{j=1}^{n} y_j^2 - \sum_{1\le k<m\le n} (x_k y_m - x_m y_k)^2$$
και βάσει αυτής αποδείξτε την ανισότητα του Cauchy $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \le \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$ για διανύσματα $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ στον $\mathbb{R}^n$.

25. Έστω $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ και $n \times n$ πίνακας A. Αποδείξτε ότι
$$(A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (A^{\mathrm{T}}\mathbf{y})$$
όπου A^{T} είναι ο ανάστροφος του A.

26. Έστω διανύσματα $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ στον $\mathbb{R}^n$ τα οποία είναι ανά δύο ορθογώνια και έχουν όλα μήκος ίσο με 1. Αν
$$\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \lambda_n \mathbf{x}_n$$
αποδείξτε ότι
$$\lambda_j = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}_j, \qquad j = 1, \dots, n.$$

27. Έστω $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ στον $\mathbb{R}^n$. Αν ισχύει $\mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{u}$ για κάθε $\mathbf{u}$ στον $\mathbb{R}^n$, αποδείξτε ότι $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

28. Έστω $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ στον $\mathbb{R}^3$. Αν ισχύει $\mathbf{x} \times \mathbf{u} = \mathbf{y} \times \mathbf{u}$ για κάθε $\mathbf{u}$ στον $\mathbb{R}^3$, αποδείξτε ότι $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

29. [α] Αποδείξτε ότι
$$(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2) \times \mathbf{u}_3 = (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_3)\mathbf{u}_2 - (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_3)\mathbf{u}_1,$$
$$\mathbf{u}_1 \times (\mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_3) = (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_3)\mathbf{u}_2 - (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_3.$$
[β] Αποδείξτε ότι
$$(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2) \times \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1 \times (\mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_3) \quad \text{αν και μόνο αν} \quad (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_3) \times \mathbf{u}_2 = \mathbf{0}.$$
[γ] Αποδείξτε την ταυτότητα του Jacobi:
$$(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2) \times \mathbf{u}_3 + (\mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_3) \times \mathbf{u}_1 + (\mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_1) \times \mathbf{u}_2 = \mathbf{0}.$$
[δ] Αποδείξτε ότι
$$(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{u}_3 = (\mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_3) \cdot \mathbf{u}_1 = (\mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{u}_2.$$
[ε] Αποδείξτε ότι
$$(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2) \cdot (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) = \det \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_2 \end{bmatrix}$$
Ποιό είναι το γεωμετρικό περιεχόμενο της τελευταίας ταυτότητας;