

Απειροστικός Λογισμός II, εαρινό εξάμηνο 2016-17.

Δέκατο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Προσδιορίστε τα σημεία τοπικού ακροτάτου των παρακάτω συναρτήσεων.

- i. $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$.
- ii. $f(x, y) = x^2 - y^2 + xy$.
- iii. $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy$.
- iv. $f(x, y) = x^2 + y^2 + 3xy$.
- v. $f(x, y) = 3x^2 + 2xy + y^2 + 2x + y + 4$.
- vi. $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$.
- vii. $f(x, y) = y + x \sin y$.
- viii. $f(x, y) = (x - y)(xy - 1)$.
- ix. $f(x, y) = x \sin y$.
- x. $f(x, y) = 8y^3 + 12x^2 - 24xy$.
- xi. $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-x^2 - y^2}$.
- xii. $f(x, y) = 5ye^x - e^{5x} - y^5$.
- xiii. $f(x, y) = y^2 - x^3 - 3x^2$.
- xiv. $f(x, y) = (x - 1)^2 + (x - y)^2$.
- xv. $f(x, y) = x^2 + xy^2 + y^4$.
- xvi. $f(x, y) = (2 + \cos x) \sin y$.
- xvii. $f(x, y) = \frac{\sin x}{1 + y^2}$.
- xviii. $f(x, y) = y^2(\sin x - \frac{x}{2})$.
- xix. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy$.
- xx. $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz$.

2. Βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των παρακάτω συναρτήσεων.

- i. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ στο $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.
- ii. $f(x, y) = x^2 + 4xy + y^2$ στο $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.
- iii. $f(x, y) = \sin x + \cos y$ στο $\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 2\pi\}$.
- iv. $f(x, y) = xy$ στο $\{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$.
- v. $f(x, y) = xy(1 - x^2 - y^2)$ στο $\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.
- v. $f(x, y) = 1 + xy - 2x + y$ στο τρίγωνο με κορυφές $(-2, 1)$, $(-2, 5)$, $(2, 1)$.

3. Βρείτε τις τιμές της σταθεράς k για τις οποίες η συνάρτηση $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + kyz$ έχει το $(0, 0, 0)$ ως σημείο τοπικού ελαχίστου.

4. Θεωρήστε την συνάρτηση $f(x, y) = (y - 3x^2)(y - x^2)$. Αποδείξτε ότι το σημείο $(0, 0)$ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της f όταν την περιορίσουμε σε οποιαδήποτε ευθεία η οποία διέρχεται από το $(0, 0)$ αλλά ότι το $(0, 0)$ δεν είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της f . Σχεδιάστε το σύνολο των σημείων στα οποία η f έχει θετικές τιμές και το σύνολο των σημείων στα οποία η f έχει αρνητικές τιμές και εξηγήστε το προηγούμενο αποτέλεσμα.

5. Βρείτε το σημείο του επιπέδου με καρτεσιανή εξίσωση $2x - y + 2z = 20$ το οποίο βρίσκεται κοντύτερα στο σημείο $(0, 0, 0)$.

6. Αποδείξτε ότι ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με δεδομένο όγκο έχει ελάχιστο εμβαδό επιφανείας όταν είναι κύβος.
7. Ποιά τρίγωνα έχουν μέγιστο το γινόμενο των ημιτόνων των γωνιών τους;
8. Τρία σημεία στο επίπεδο σχηματίζουν οξυγώνιο τρίγωνο. Βρείτε το σημείο του επιπέδου του οποίου το άθροισμα των αποστάσεων από τα τρία σημεία είναι ελάχιστο.
9. *Η Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων.*

[α] Έστω διαφορετικοί ανά δύο αριθμοί x_1, \dots, x_n και αριθμοί y_1, \dots, y_n . Προσδιορίστε αριθμούς a, b έτσι ώστε το *τετραγωνικό σφάλμα*

$$\sum_{i=1}^n ((ax_i + b) - y_i)^2$$

να είναι ελάχιστο. Το άθροισμα αυτό εκφράζει το άθροισμα των τετραγώνων των κατακόρυφων αποστάσεων των σημείων (x_i, y_i) από την ευθεία με καρτεσιανή εξίσωση $y = ax + b$.

[β] Έστω διαφορετικά ανά δύο σημεία $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ και αριθμοί z_1, \dots, z_n . Προσδιορίστε αριθμούς a, b, c έτσι ώστε το *τετραγωνικό σφάλμα*

$$\sum_{i=1}^n ((ax_i + by_i + c) - z_i)^2$$

να είναι ελάχιστο. Το άθροισμα αυτό εκφράζει το άθροισμα των τετραγώνων των κατακόρυφων αποστάσεων των σημείων (x_i, y_i, z_i) από το επίπεδο με καρτεσιανή εξίσωση $z = ax + by + c$.

10. Έστω διαφορετικά ανά δύο σημεία $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$ στον \mathbb{R}^n . Αποδείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^m \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\|^2$$

έχει ελάχιστη τιμή στο σημείο $\mathbf{x} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \mathbf{x}_k$, το *κέντρο βάρους* των $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$.