Απειροστικός Λογισμός ΙΙ, εαρινό εξάμηνο 2016-17.

Ενδέκατο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Χρησιμοποιώντας την μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange βρείτε τα τοπικά ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων με τους αντίστοιχους περιορισμούς. Υπάρχουν ολικά ακρότατα;

   i. $f(x,y) = 3x + 2y$ όταν $2x^2 + 3y^2 = 3$.
   ii. $f(x,y) = \cos(x^2 - y^2)$ όταν $x^2 + y^2 = 1$.
   iii. $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ όταν $x + y = 1$.
   iv. $f(x,y) = x - y$ όταν $x^2 - y^2 = 4$.
   v. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ όταν $xyz = 1$.
   vi. $f(x,y,z) = x + y + z$ όταν $x^2 + y^2 = 1$ και $x^2 + z^2 = 1$.
   vii. $f(x,y,z) = xy + yz$ όταν $xz = 1$.

2. Χρησιμοποιώντας και την μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή (αν υπάρχουν) των παρακάτω συναρτήσεων.

   i. $f(x,y) = x^2 + 3y^2$ στο $\{(x,y) \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$.
   ii. $f(x,y) = x^2 + 4xy + y^2$ στο $\{(x,y) \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$.
   iii. $f(x,y,z) = xyz$ στο $\{(x,y,z) \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.
   iv. $f(x,y,z) = x + yz$ στο $\{(x,y,z) \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.
   v. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ στο $\{(x,y,z) \,|\, z \geq x^2 + y^2 + 1\}$.
   vi. $f(x,y) = xy(1 - x^2 - y^2)$ στο τετράγωνο $\{(x,y) \,|\, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. (Οι κορυφές του τετραγώνου χρειάζονται ειδική μεταχείριση.)
   vii. $f(x,y) = 1 + xy - 2x + y$ στο τρίγωνο με κορυφές $(-2,1)$, $(-2,5)$, $(2,1)$. (Οι κορυφές του τριγώνου χρειάζονται ειδική μεταχείριση.)

   Στα επόμενα προβλήματα εργαστείτε με την μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange.

3. Βρείτε το σημείο του επιπέδου με καρτεσιανή εξίσωση $3x - 2y + 8z + 1 = 0$ το οποίο βρίσκεται κοντύτερα στο σημείο $(2,0,-1)$.

4. Βρείτε το σημείο της επιφάνειας με καρτεσιανή εξίσωση $z = 6xy + 7$ το οποίο βρίσκεται κοντύτερα στο σημείο $(0,0,0)$.

5. Αποδείξτε ότι ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με δεδομένο όγκο έχει ελάχιστο εμβαδό επιφανείας όταν είναι κύβος.

6. Ποιά τρίγωνα έχουν μέγιστο το γινόμενο των ημιτόνων των γωνιών τους;

7. Πότε n θετικοί αριθμοί με δεδομένο άθροισμα έχουν μέγιστο γινόμενο; Βάσει της απάντησής σας αποδείξτε την ανισότητα Αριθμητικού-Γεωμετρικού Μέσου του Cauchy:

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \qquad \text{για κάθε } x_1, \ldots, x_n > 0.$$

   Πότε αυτή η ανισότητα γίνεται ισότητα;

8. Θεωρήστε τον συμμετρικό $n \times n$ πίνακα A και την αντίστοιχη συμμετρική τετραγωνική μορφή $Q(\mathbf{x}) = (A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}$. Από το Θεώρημα Μέγιστης-Ελάχιστης Τιμής γνωρίζουμε ότι η Q έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στην μοναδιαία σφαίρα $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, \|\mathbf{x}\| = 1\}$. Βάσει αυτού αποδείξτε την ύπαρξη ιδιοτιμών του πίνακα A: υπάρχει αριθμός λ και $\mathbf{x} \in S$ ώστε να ισχύει $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.