Απειροστικός Λογισμός ΙΙ, εαρινό εξάμηνο 2016-17.

Δωδέκατο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Στις παρακάτω περιπτώσεις εξετάστε βάσει του Θεωρήματος Πεπλεγμένης Συνάρτησης αν η αντίστοιχη εξίσωση μπορεί να λυθεί ως προς το y ως συνάρτηση $y = y(x)$ με συνεχή πρώτη παράγωγο σε κάποια περιοχή του x_0 και έτσι ώστε να είναι $y(x_0) = y_0$. Αν γίνεται, εξετάστε το ίδιο ερώτημα και με στοιχειώδεις μεθόδους (π.χ. βρίσκοντας τον ακριβή τύπο της $y = y(x)$ και το μέγιστο διάστημα στο οποίο αυτή είναι ορισμένη). Στην περίπτωση που υπάρχει λύση, βρείτε τύπο για την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ της λύσης κοντά στο x_0 συναρτήσει των x, y.

   i. $x^2 - y^2 = 0$ με $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.
   ii. $\sin(x + y) = 1$ με $x_0 = \pi/4$, $y_0 = \pi/4$.
   iii. $x^2 + y^2 = y$ με $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.
   iv. $xy + \log(xy) = 1$ με $x_0 = 1$, $y_0 = 1$.
   v. $x^5 + y^5 = 3 - xy$ με $x_0 = 1$, $y_0 = 1$.

2. Αποδείξτε βάσει του Θεωρήματος Πεπλεγμένης Συνάρτησης ότι οι παρακάτω εξισώσεις μπορούν να λυθούν ως προς το z ως συνάρτηση $z = z(x, y)$ με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης σε κάποια περιοχή του (x_0, y_0) και έτσι ώστε να είναι $z(x_0, y_0) = z_0$. Βρείτε τύπο για τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ της λύσης κοντά στο (x_0, y_0) συναρτήσει των x, y, z. Αν γίνεται, βρείτε τον ακριβή τύπο της $z = z(x, y)$ και το μέγιστο σύνολο στο οποίο αυτή είναι ορισμένη.

   i. $xy \log(x^3 - z) = x + y$ με $(x_0, y_0) = (1, -1)$, $z_0 = 0$.
   ii. $x + y + z = \sin(xyz)$ με $(x_0, y_0) = (1, 0)$, $z_0 = -1$.
   iii. $xye^{xz+yz} = -z^3$ με $(x_0, y_0) = (-1, 1)$, $z_0 = 1$.

3. Αποδείξτε βάσει του Θεωρήματος Πεπλεγμένης Συνάρτησης ότι το παρακάτω σύστημα δύο εξισώσεων μπορεί να λυθεί ως προς τα u, v ως συναρτήσεις $u = u(x)$, $v = v(x)$ με συνεχείς παραγώγους πρώτης τάξης σε κάποια περιοχή του 2 και έτσι ώστε να είναι $u(2) = -1$, $v(2) = 3$. Βρείτε τύπο για τις παραγώγους $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dx}$ κοντά στο 2 συναρτήσει των x, u, v.

$$x^2 + uv = 1$$
$$x^2 + u^2 - v^2 = -4$$

4. Αποδείξτε βάσει του Θεωρήματος Πεπλεγμένης Συνάρτησης ότι το παρακάτω σύστημα δύο εξισώσεων μπορεί να λυθεί ως προς τα u, v ως συναρτήσεις $u = u(x)$, $v = v(x)$ με συνεχείς παραγώγους πρώτης τάξης σε κάποια περιοχή του 1 και έτσι ώστε να είναι $u(1) = \pi$, $v(1) = \pi/2$. Βρείτε τύπο για τις παραγώγους $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dx}$ κοντά στο 1 συναρτήσει των x, u, v.

$$\cos u + x \sin v = 0$$
$$\sin u - \cos(xv) = 0$$

5. Αποδείξτε βάσει του Θεωρήματος Πεπλεγμένης Συνάρτησης ότι το παρακάτω σύστημα δύο εξισώσεων μπορεί να λυθεί ως προς τα u, v ως συναρτήσεις $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης σε κάποια περιοχή του $(1, 1)$ και έτσι ώστε να είναι $u(1, 1) = 1$, $v(1, 1) = 1$. Βρείτε τύπο για τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης των u, v κοντά στο $(1, 1)$ συναρτήσει των x, y, u, v.

$$x^5v^2 + 2y^3u = 3$$
$$3yu - xuv^3 = 2$$

6. Αποδείξτε βάσει του Θεωρήματος Πεπλεγμένης Συνάρτησης ότι το παρακάτω σύστημα τριών εξισώσεων μπορεί να λυθεί ως προς τα u, v, w ως συναρτήσεις $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$, $w = w(x, y, z)$ με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης σε κάποια περιοχή του $(0, 0, 0)$ και έτσι ώστε να είναι $u(0, 0, 0) = 0$, $v(0, 0, 0) = 0$, $w(0, 0, 0) = -2$. Βρείτε τύπο για τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης των u, v, w κοντά στο $(0, 0, 0)$ συναρτήσει των x, y, z, u, v, w.

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z^2 + u + v^2 &= 0 \\ 4x + 3y + z + u^2 + v + w + 2 &= 0 \\ x + z + w + u^2 + 2 &= 0 \end{aligned}$$

7. Τα u, v δίνονται ως συναρτήσεις των x, y με τους τύπους:

$$\begin{aligned} u &= u(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2) \\ v &= v(x, y) = xy/(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

Αποδείξτε βάσει του Θεωρήματος Αντίστροφης Συνάρτησης ότι τα x, y μπορούν να εκφραστούν ως συναρτήσεις $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης σε κάποια περιοχή του $(-1, 0)$ και έτσι ώστε να είναι $x(-1, 0) = 0$, $y(-1, 0) = 1$.

8. Τα u, v, w δίνονται ως συναρτήσεις των x, y, z με τους τύπους:

$$\begin{aligned} u &= u(x, y, z) = x + xyz \\ v &= v(x, y, z) = y + xy \\ w &= w(x, y, z) = 2x + z + 3z^2 \end{aligned}$$

Αποδείξτε βάσει του Θεωρήματος Αντίστροφης Συνάρτησης ότι τα x, y, z μπορούν να εκφραστούν ως συναρτήσεις $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης σε κάποια περιοχή του $(0, 0, 0)$ και έτσι ώστε να είναι $x(0, 0, 0) = 0$, $y(0, 0, 0) = 0$, $z(0, 0, 0) = 0$.

9. Στις παρακάτω περιπτώσεις υπολογίστε τις Ιακωβιανές ορίζουσες $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$.

   i. $u = ax + by$, $v = cx + dy$.
   ii. $u = \log \sqrt{x^2 + y^2}$, $v = \arctan(y/x)$.
   iii. $u = e^x \cos y$, $v = e^x \sin y$.
   iv. $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$.

10. Υπολογίστε την Ιακωβιανή ορίζουσα $\frac{\partial(w,z)}{\partial(x,y)}$ όταν $w = e^u \cos v$, $z = e^u \sin v$ και $u = x/(x^2 + y^2)$, $v = -y/(x^2 + y^2)$.

11. Αν $w = w(u, v)$, $z = z(u, v)$ και $u = u(x)$, $v = v(y)$, αποδείξτε ότι

$$\frac{\partial(w, z)}{\partial(x, y)} = \frac{du}{dx}\frac{dv}{dy}\frac{\partial(w, z)}{\partial(u, v)}.$$

12. Αν $z = z(x, y)$ και $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ και αν $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \neq 0$, αποδείξτε ότι

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial(z, v)}{\partial(x, y)} \Big/ \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial(u, z)}{\partial(x, y)} \Big/ \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}.$$

13. Έστω συνάρτηση $F : A \to \mathbb{R}$, όπου A είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$, με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης σε ολόκληρο το A και έστω ότι η εξίσωση $F(x, y, z) = 0$ μπορεί να λυθεί ως προς καθεμία από τις τρεις μεταβλητές συναρτήσει των δύο άλλων: $z = z(x, y)$, $y = y(x, z)$, $x = x(y, z)$. Αν όλες οι συναρτήσεις έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης, αποδείξτε ότι ισχύει

$$\frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z} = -1$$

σε κάθε σημείο του A.