

Απειροστικός Λογισμός II, εαρινό εξάμηνο 2016-17.

Όγδοο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Περιγράψτε την τροχιά καθεμιάς από τις παρακάτω καμπύλες.
 - i. $\sigma(t) = (\cos t, 3 \sin t), 0 \leq t \leq 2\pi$.
 - ii. $\sigma(t) = (\sin t, \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$.
 - iii. $\sigma(t) = (2t, t - 3), 0 \leq t \leq 1$.
 - iv. $\sigma(t) = (2t - 1, t + 2, t), t \in \mathbb{R}$.
 - v. $\sigma(t) = (t, 1/t), t > 0$.
 - vi. $\sigma(t) = (t, t^3), t \in \mathbb{R}$.
 - vii. $\sigma(t) = (1, \cos t, \sin t), 0 \leq t \leq 2\pi$.
 - viii. $\sigma(t) = (\cos t, \sin t, t), t \in \mathbb{R}$.
2. Για καθένα από τα παρακάτω σχήματα βρείτε καμπύλη έτσι ώστε το σχήμα να είναι η τροχιά της καμπύλης. Με άλλα λόγια, παραμετροποιήστε καθένα από τα παρακάτω σχήματα.
 - i. Η ευθεία η οποία διέρχεται από τα σημεία $(1, -1, 3), (0, 2, 1)$.
 - ii. Ο κύκλος με κέντρο το $(3, -1)$ και ακτίνα 4.
 - iii. Το γράφημα της συνάρτησης $f(x) = x^2$.
 - iv. Η έλλειψη με καρτεσιανή εξίσωση $(x/4)^2 + (y/3)^2 = 1$.
 - v. Ο κύκλος με κέντρο το $(1, 1, 3)$ και ακτίνα 3 ο οποίος βρίσκεται πάνω σε επίπεδο παράλληλο στο xz -επίπεδο.
3. Για καθεμία από τις καμπύλες της άσκησης 1 βρείτε εφαπτόμενο διάνυσμα καθώς και την καρτεσιανή εξίσωση και την παραμετρική εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στα παρακάτω αντίστοιχα σημεία.
 - i. $(-1, 0)$.
 - ii. $(\sqrt{3}/2, 1/2)$.
 - iii. $(1, -5/2)$.
 - iv. $(-1, 2, 0)$.
 - v. $(2, 1/2)$.
 - vi. $(1, 1)$.
 - vii. $(1, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.
 - viii. $(-1, 0, \pi)$.
4. Για καθεμία από τις καμπύλες της άσκησης 1 βρείτε εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης $\mathbf{f} \circ \sigma$ στο γενικό σημείο της, όπου η αντίστοιχη \mathbf{f} περιγράφεται παρακάτω.
 - i. $\mathbf{f}(x, y) = (xy, x + y)$.
 - ii. $\mathbf{f}(x, y) = (x^2, xy, y^2)$.
 - iii. $\mathbf{f}(x, y) = (x - y, x + 2y)$.
 - iv. $\mathbf{f}(x, y, z) = (x + y, yz)$.
 - v. $\mathbf{f}(x, y) = (x, xy, y^2)$.
 - vi. $\mathbf{f}(x, y) = (x^2, y)$.
 - vii. $\mathbf{f}(x, y, z) = (x - y, xyz)$.

viii. $\mathbf{f}(x, y, z) = (z, x, y)$.

5. Βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων \mathbf{f} στα αντίστοιχα σημεία και στις αντίστοιχες κατευθύνσεις \mathbf{v} .

i. $f(x, y) = xy$, $(-1, 0)$, $\mathbf{v} = (0, 1)$.

ii. $f(x, y) = ye^{xy}$, $(1, 2)$, $\mathbf{v} = (1/2, \sqrt{3}/2)$.

iii. $f(x, y, z) = xy + z^2$, $(-1, 1, 1)$, $\mathbf{v} = (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$.

iv. $f(x, y, z) = \sin(xyz^2)$, $(-1, 0, 2)$, $\mathbf{v} = (0, 1, 0)$.

v. $f(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2$, γενικό $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{v} = \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$.

vi. $f(x_1, \dots, x_n) = 1/\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$, γενικό $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{v} = \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$.

vii. $f(x_1, \dots, x_n) = x_1 \cdots x_n$, γενικό $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{v} = \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$.

Σε καθεμία από τις παραπάνω περιπτώσεις βρείτε την κατεύθυνση \mathbf{v} (με $\|\mathbf{v}\| = 1$) ώστε η παράγωγος της f στο αντίστοιχο σημείο στην κατεύθυνση \mathbf{v} να είναι (α) μέγιστη θετική, (β) μέγιστη αρνητική, (γ) μηδενική.

6. Για καθεμία από τις παρακάτω καμπύλες βρείτε ένα κάθετο διάνυσμα σ' αυτήν στο αντίστοιχο σημείο και γράψτε την καρτεσιανή εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στην καμπύλη στο ίδιο σημείο.

i. $3x + 2y = 5$, $(1, 1)$.

ii. $x^2 + y^2 = 16$, $(4, 0)$.

iii. $(x/2)^2 + (y/3)^2 = 1$, $(\sqrt{2}, -3/\sqrt{2})$.

iv. $y = x^3$, $(2, 8)$.

v. $x = y^2$, $(1, -1)$.

vi. $x^2 - y^3 = 4$, $(2, 0)$.

7. Για καθεμία από τις παρακάτω επιφάνειες βρείτε ένα κάθετο διάνυσμα σ' αυτήν στο αντίστοιχο σημείο και γράψτε την καρτεσιανή εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στην επιφάνεια στο ίδιο σημείο.

i. $3x + 2y - 5z = -10$, $(1, 1, 3)$.

ii. $x^2 + y^2 + z^2 = 6$, $(1, 1, 2)$.

iii. $(x/2)^2 + (y/3)^2 + (z/2)^2 = 1$, $(2, 0, 0)$.

iv. $z = x^3 + y^2$, $(1, 1, 2)$.

v. $x^2 + y^2 - z^2 = -2$, $(1, -1, 2)$.

vi. $xyz = 4$, $(1, 2, 2)$.

8. Βρείτε τα δύο σημεία του υπερβολοειδούς με καρτεσιανή εξίσωση

$$x^2 + 4y^2 - z^2 = 4$$

σε καθένα από τα οποία το εφαπτόμενο επίπεδο στο υπερβολοειδές είναι παράλληλο στο επίπεδο με καρτεσιανή εξίσωση $2x + 2y + z = 5$.

9. Βρείτε τα σημεία της καμπύλης με καρτεσιανή εξίσωση

$$x^3 - 2y^2 = 4$$

σε καθένα από τα οποία η εφαπτόμενη ευθεία στην καμπύλη είναι παράλληλη στην ευθεία με καρτεσιανή εξίσωση $3x + 4y = 2$.