Απειροστικός Λογισμός ΙΙ, εαρινό εξάμηνο 2016-17.

Φυλλάδιο ασκήσεων επανάληψης.

1. Για καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις ελέγξτε βάσει του ορισμού της παραγωγισιμότητας αν είναι παραγωγίσιμη στο αντίστοιχο σημείο.

   i. $f(x,y,z) = x^2 + 3yz$ στο $(1,1,-1)$.

   ii. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+2y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ στο $(0,0)$.

   iii. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{\sqrt{x^2+2y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ στο $(0,0)$.

2. Αποδείξτε (όχι βάσει του ορισμού της παραγωγισιμότητας) ότι η $f(x,y) = x + \frac{1}{y}$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο (x_0,y_0) του πεδίου ορισμού της και βρείτε την καρτεσιανή εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στο γράφημά της στο $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$. Βρείτε, επίσης, το διάνυσμα $\nabla f(x_0,y_0)$ και την παράγωγο $Df(x_0,y_0)$. Τέλος, βρείτε ένα κάθετο διάνυσμα στο γράφημα της συνάρτησης στο σημείο $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$.

3. Αποδείξτε (όχι βάσει του ορισμού της παραγωγισιμότητας) ότι η $f(x,y,z) = \frac{1}{xyz}$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο (x_0,y_0,z_0) του πεδίου ορισμού της και βρείτε το διάνυσμα $\nabla f(x_0,y_0,z_0)$ και την παράγωγο $Df(x_0,y_0,z_0)$.

4. Αποδείξτε (όχι βάσει του ορισμού της παραγωγισιμότητας) ότι οι παρακάτω συναρτήσεις $\mathbf{f}$ είναι παραγωγίσιμες σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού τους και βρείτε τον πίνακα $D\mathbf{f}$ σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού τους.

   i. $\mathbf{f}(x,y) = (\sin(x/y^2), e^{y/x})$.

   ii. $\mathbf{f}(x,y) = (xe^y - \cos(xy), xy^2, e^{x-y})$.

   iii. $\mathbf{f}(x,y,z) = (xy^2z, x^2/y)$.

   iv. $\mathbf{f}(x,y,z) = ((yz)/x, x/(yz), xyz)$.

5. Βρείτε μέσω του κανόνα της αλυσίδας, δηλαδή μέσω του τύπου $D\mathbf{h} = D\mathbf{g}D\mathbf{f}$, τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης της σύνθεσης $\mathbf{h} = \mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ στις παρακάτω περιπτώσεις.

   i. $\mathbf{f}(x,y) = (x^2y, x+y^2)$, $\mathbf{g}(u,v) = (e^v u, uv)$.

   ii. $\mathbf{f}(x,y) = (xy, x+y)$, $\mathbf{g}(u,v) = (u+2v, u\sin v, uv)$.

   iii. $f(x,y) = x\sin y$, $\mathbf{g}(u) = (u^3, 2u+1, \sin u)$.

   iv. $\mathbf{f}(x,y,z) = (xy, y-z, e^x z)$, $\mathbf{g}(u,v,w) = (uv(u+w), uw)$.

   Σε κάθε περίπτωση βρείτε ανεξάρτητα από τα προηγούμενα την μερική παράγωγο $\frac{\partial h_2}{\partial y}$, όπου h_2 είναι η δεύτερη συντεταγμένη συνάρτηση της $\mathbf{h}$, και συγκρίνατε με την απάντηση από το προηγούμενο αποτέλεσμα.

6. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, όπου $A \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του A. Θεωρήστε την $h(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ και βρείτε τις $\frac{\partial h}{\partial r}$, $\frac{\partial h}{\partial \theta}$ συναρτήσει των $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$.

7. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, όπου $A \subseteq \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$, παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του A.

   [α] Θεωρήστε την $h(r,\theta,z) = f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$ και βρείτε τις $\frac{\partial h}{\partial r}$, $\frac{\partial h}{\partial \theta}$, $\frac{\partial h}{\partial z}$ συναρτήσει των $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$.

   [β] Θεωρήστε την $h(\rho,\theta,\phi) = f(\rho\cos\theta\sin\phi, \rho\sin\theta\sin\phi, \rho\cos\phi)$ και βρείτε τις $\frac{\partial h}{\partial \rho}$, $\frac{\partial h}{\partial \theta}$, $\frac{\partial h}{\partial \phi}$ συναρτήσει των $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$.

8. Στις παρακάτω περιπτώσεις βρείτε τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης της συνάρτησης h συναρτήσει των μερικών παραγώγων των συναρτήσεων που εμπλέκονται στον ορισμό της. Υποθέστε ότι όλες οι συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες.

   i. $h(x, y) = f(u(x, \phi(x), \psi(x, y)), v(\phi(xy), u(x, y, \phi(xy))))$.
   ii. $h(x, y, z) = f(u(x, z, \phi(x, y)), v(\phi(x, z), \psi(yz)), w(x\phi(y, z)\psi(z)))$.

9. Βρείτε τις παραγώγους $D_{\mathbf{v}}f$ των παρακάτω συναρτήσεων f στα αντίστοιχα σημεία και στις αντίστοιχες κατευθύνσεις $\mathbf{v}$.

   i. $f(x, y) = \sin(xy)$, $(x_0, y_0) = (1, \pi)$, $\mathbf{v} = (1/2, \sqrt{3}/2)$.
   ii. $f(x, y, z) = xy^2z^3$, $(x_0, y_0, z_0) = (-1, 1, 1)$, $\mathbf{v} = (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$.

   Σε καθεμία από τις παραπάνω περιπτώσεις βρείτε τις κατευθύνσεις $\mathbf{v}$ (με $\|\mathbf{v}\| = 1$) ώστε η παράγωγος $D_{\mathbf{v}}f$ στο αντίστοιχο σημείο να είναι (α) μέγιστη θετική, (β) μέγιστη αρνητική, (γ) μηδενική.

10. Θεωρήστε την καμπύλη στον $\mathbb{R}^2$ με καρτεσιανή εξίσωση $x\sin(xy) = 1$. Βρείτε ένα κάθετο διάνυσμα προς αυτήν στο σημείο της $(1, \pi/2)$ καθώς και την καρτεσιανή εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας της στο ίδιο σημείο.

11. Θεωρήστε την επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ με καρτεσιανή εξίσωση $xy - xz + yz = 19$. Βρείτε ένα κάθετο διάνυσμα προς αυτήν στο σημείο της $(-1, 2, 7)$ καθώς και την καρτεσιανή εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της στο ίδιο σημείο.

12. Μια ισοσταθμική επιφάνεια μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης $f(x, y, z)$ έχει σε ένα σημείο της (x_0, y_0, z_0) εφαπτόμενο επίπεδο με καρτεσιανή εξίσωση $x - 2y + 2z = 5$ και $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0)$. Σε ποιές κατευθύνσεις $\mathbf{v}$ από το (x_0, y_0, z_0) είναι δυνατόν να έχει η συνάρτηση (α) μέγιστο στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής; (β) ελάχιστο στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής; (γ) μηδενικό στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής;

13. Έστω ότι για την 1-1 και παραγωγίσιμη καμπύλη $\boldsymbol{\sigma}(t) = (x(t), y(t))$ και την παραγωγίσιμη πραγματική συνάρτηση $f(x, y)$ ισχύει στο σημείο $\boldsymbol{\sigma}(t_0) = (x_0, y_0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)y'(t_0) = 0,$$

   καθώς και $\boldsymbol{\sigma}'(t_0) \neq (0, 0)$ και $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$. Τότε στο (x_0, y_0) ποιά είναι η σχετική θέση της $\boldsymbol{\sigma}$ και της ισοσταθμικής καμπύλης της f που περιέχει το σημείο (x_0, y_0);

14. Βρείτε τα σημεία της επιφάνειας με καρτεσιανή εξίσωση $xyz = 36$ στα οποία το εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας είναι παράλληλο στα διανύσματα $(3, 1, 0)$ και $(7, 1, 2)$.

15. (i) Έστω E το εφαπτόμενο επίπεδο στο γράφημα της $f(x, y) = x^2 + 3xy$ στο σημείο $(1, 1, 4)$. Σε ποιά σημεία της η επιφάνεια με καρτεσιανή εξίσωση $5x^2 + 3y^2 + z^2 = 9$ έχει εφαπτόμενο επίπεδο παράλληλο με το E;

   (ii) Έστω E το εφαπτόμενο επίπεδο στην επιφάνεια με καρτεσιανή εξίσωση $x^2+y^4+z^2 = 3$ στο σημείο $(1, 1, -1)$. Σε ποιά σημεία του το γράφημα της $f(x, y) = xy^2$ έχει εφαπτόμενο επίπεδο παράλληλο στο E;

   (iii) Έστω $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ ένα κάθετο διάνυσμα στο γράφημα της $f(x, y) = 3xy + y^2$ στο σημείο $(1, 1, 4)$. Σε ποιά σημεία της η επιφάνεια με καρτεσιανή εξίσωση $3x^2 + 5y^2 + z^2 = 9$ έχει κάθετο διάνυσμα παράλληλο με το $\mathbf{u}$;

   (iv) Έστω $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ ένα κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια με καρτεσιανή εξίσωση $x^4+y^2+z^2 =$

3 στο σημείο $(1, 1, -1)$. Σε ποιά σημεία του το γράφημα της $f(x, y) = x^2 y$ έχει κάθετο διάνυσμα παράλληλο στο **u**;

16. Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης των παρακάτω συναρτήσεων.

    i. $f(x, y) = e^{xy^2}$.
    ii. $f(x, y, z) = \sin^2(xy) + \cos(xz)$.

17. Στις παρακάτω περιπτώσεις υπολογίστε την $g''(t)$ συναρτήσει των μερικών παραγώγων μέχρι και δεύτερης τάξης της f.

    i. $g(t) = f(\sin(e^t), t^2 e^t)$.
    ii. $g(t) = f(te^t, t^2 + 1, t \sin t)$.

18. Στις παρακάτω περιπτώσεις υπολογίστε τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης της f συναρτήσει των μερικών παραγώγων μέχρι και δεύτερης τάξης των εμπλεκομένων στον τύπο της συναρτήσεων.

    i. $f(x, y, z) = g(u(x, y), v(y, z), w(y, z))$.
    iii. $f(x, y, z) = g(u(x), v(x, y), w(x, y, z))$.

19. Γράψτε το ανάπτυγμα Taylor δεύτερης τάξης των παρακάτω συναρτήσεων.

    i. $f(x, y) = \cos(3x - 2y) + \sin(2x + 3y)$ στο σημείο $(0, 0)$.
    ii. $f(x, y, z) = (1 + x)e^{y-2z}$ στο σημείο $(0, 0, 0)$.

20. Γράψτε τις παρακάτω τετραγωνικές μορφές στη μορφή $(A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}$ καθώς και στη μορφή $\mathbf{x}^\top A\mathbf{x}$ με κατάλληλο *συμμετρικό* πίνακα A και διάνυσμα **x**.

    i. $x^2 + 3xy - 2y^2$.
    ii. $-3x^2 + y^2 - z^2 + xy - 4xz + 5yz$.
    iii. $2x^2 - 3y^2 - z^2 + 2w^2 - 4xy + 5xz - 2xw + 3yz - 6yw + 8zw$.

    Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε πώς, αντιστρόφως, από τις $(A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}$ και $\mathbf{x}^\top A\mathbf{x}$ που βρήκατε προκύπτουν (με πράξεις) οι παραπάνω αντίστοιχες τετραγωνικές μορφές.

21. Ανάλογα με την τιμή του $k \in \mathbb{R}$ προσδιορίστε τα σημεία τοπικού ακροτάτου της $f(x, y) = x^2 + y^2 + kxy$. Κατατάξτε τα σημεία σε σημεία γνήσιου ή μη-γνήσιου τοπικού ή ολικού ακροτάτου.

22. Ανάλογα με την τιμή του $k \in \mathbb{R}$ προσδιορίστε τα σημεία τοπικού ακροτάτου της $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + kxy + kyz + kxz$. Κατατάξτε τα σημεία σε σημεία γνήσιου ή μη-γνήσιου τοπικού ή ολικού ακροτάτου.

23. Προσδιορίστε τα σημεία τοπικού ακροτάτου των παρακάτω συναρτήσεων και κατατάξτε τα σε σημεία γνήσιου ή μη-γνήσιου τοπικού ή ολικού ακροτάτου.

    i. $f(x, y) = 3 - xy + x^2 + y^2 + x^3 - x^2 y + y^3$.
    ii. $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-x^2 - 2y^2}$.
    iii. $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.
    iv. $f(x, y, z) = \sin(x^2 + y^2 + z^2)$.

24. Εξηγήστε γιατί οι παρακάτω συναρτήσεις υπό τις αντίστοιχες δοσμένες συνθήκες έχουν ή όχι σημεία ολικού ακροτάτου. Στην περίπτωση που έχουν σημεία ολικού ακροτάτου, προσδιορίστε τα χρησιμοποιώντας την μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange.

i. $f(x,y) = xy + e^{xy}$ όταν $x^2 + y^2 = 1$.

ii. $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$ όταν $x + y = 1$.

iii. $f(x,y) = 2x - y$ όταν $x^2 - y^2 = 9$ και $x > 0$.

iv. $f(x,y,z) = xyz$ όταν $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

v. $f(x,y,z) = x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2$ όταν $x + y + z = 4$.

vi. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ όταν $z = xy + 1$.

v. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ όταν $xyz = 1$ και $x, y, z > 0$.

vi. $f(x,y,z) = x - y + 2z$ όταν $x^2 + y^2 = 4$ και $x^2 + z^2 = 1$.

25. Αφού εξηγήσετε γιατί οι παρακάτω συναρτήσεις έχουν μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο αντίστοιχο σύνολο A, προσδιορίστε αυτές τις τιμές. Στο σύνορο του A εργαστείτε με δύο τρόπους: (α) χρησιμοποποιήστε κατάλληλες παραμετρικοποιήσεις ώστε να αναγάγετε το πρόβλημα σε πρόβλημα μίας μεταβλητής, (β) χρησιμοποιήστε την μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange.

    i. $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ στο $A = \{(x,y) \,|\, x^2 + y^2/4 \le 1\}$.

    ii. $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$ στο $A = \{(x,y) \,|\, 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$.

    iii. $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y$ στο τρίγωνο A (εσωτερικά και συνοριακά σημεία) με κορυφές $(0,0)$, $(0,3)$, $(2,0)$.

26. Αφού εξηγήσετε γιατί οι παρακάτω συναρτήσεις έχουν μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο αντίστοιχο σύνολο A, προσδιορίστε αυτές τις τιμές. Στο σύνορο του A εργαστείτε με δύο τρόπους: (α) χρησιμοποποιήστε κατάλληλες παραμετρικοποιήσεις ώστε να αναγάγετε το πρόβλημα σε πρόβλημα μίας λιγότερης μεταβλητής, (β) χρησιμοποιήστε την μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange.

    i. $f(x,y,z) = xy + yz + zx$ στο $A = \{(x,y,z) \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$.

    ii. $f(x,y,z) = x + y + z$ στο $A = \{(x,y,z) \,|\, 0 \le z \le 1 - x^2 - y^2\}$.

    iii. $f(x,y) = x^2 + y^2 + z^2$ στον κύβο $A = \{(x,y,z) \,|\, 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1\}$.

27. Βρείτε το σημείο της κωνικής επιφάνειας με καρτεσιανή εξίσωση $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ το οποίο βρίσκεται κοντύτερα στο σημείο $(1,1,0)$. Υπάρχει τέτοιο σημείο; Γιατί; Κάντε το ίδιο αν αντί του $(1,1,0)$ θεωρήσουμε το σημείο $(1,0,-2)$.

28. Στις παρακάτω περιπτώσεις υπολογίστε τις Ιακωβιανές ορίζουσες $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ ή $\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$.

    i. $u = ax + by$, $v = cx + dy$.

    ii. $u = e^x \cos y$, $v = e^x \sin y$.

    iii. $u = ax + by + cz$, $v = dx + ey + fz$, $w = gx + hy + kz$.

    iv. $u = x^2 + y^2 - z^2$, $v = 2xy - z^2$, $w = xyz$.

29. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας, υπολογίστε την Ιακωβιανή ορίζουσα $\frac{\partial(w,z)}{\partial(x,y)}$ όταν $w = (u^2 + v^2)^{1/2}$, $z = \mathrm{Arctan}(v/u)$ και $u = e^x \cos y$, $v = e^x \sin y$ στο σύνολο $\{(x,y) \,|\, -\pi/2 < y < \pi/2\}$.

30. Αν $w = w(u,v)$, $z = z(u,v)$ και $u = u(x)$, $v = v(y)$, αποδείξτε ότι

$$\frac{\partial(w,z)}{\partial(x,y)} = \frac{du}{dx}\,\frac{dv}{dy}\,\frac{\partial(w,z)}{\partial(u,v)}.$$

31. Αν $z = z(x, y)$ και $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ και αν $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \neq 0$, αποδείξτε ότι

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial(z, v)}{\partial(x, y)} \Big/ \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial(u, z)}{\partial(x, y)} \Big/ \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}.$$

32. Εξετάστε βάσει του Θεωρήματος Πεπλεγμένης Συνάρτησης αν η εξίσωση $e^{xy-1} = 2xy - 1$ μπορεί να λυθεί ως προς το y ως συνάρτηση $y = y(x)$ με συνεχή πρώτη παράγωγο σε κάποια περιοχή του $x_0 = 2$ και έτσι ώστε να είναι $y_0 = y(2) = 1/2$. Στην περίπτωση που υπάρχει λύση, βρείτε τύπο για την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ της λύσης συναρτήσει των x, y κοντά στα $x_0 = 2$, $y_0 = 1/2$.

33. Εξετάστε βάσει του Θεωρήματος Πεπλεγμένης Συνάρτησης αν η εξίσωση $e^{xyz} = x + y + z$ μπορεί να λυθεί ως προς το z ως συνάρτηση $z = z(x, y)$ με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης σε κάποια περιοχή του $(x_0, y_0) = (1, 0)$ και έτσι ώστε να είναι $z_0 = z(1, 0) = 0$. Στην περίπτωση που υπάρχει λύση, βρείτε τύπο για τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ της λύσης συναρτήσει των x, y, z κοντά στα $x_0 = 1, y_0 = 0, z_0 = 0$.

34. Εξετάστε βάσει του Θεωρήματος Πεπλεγμένης Συνάρτησης αν το παρακάτω σύστημα δύο εξισώσεων μπορεί να λυθεί ως προς τα u, v ως συναρτήσεις $u = u(x)$, $v = v(x)$ με συνεχείς παραγώγους πρώτης τάξης σε κάποια περιοχή του $x_0 = 0$ και έτσι ώστε να είναι $u_0 = u(0) = 1$, $v_0 = v(0) = 1$. Βρείτε τύπο για τις παραγώγους $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dx}$ συναρτήσει των x, u, v κοντά στα $x_0 = 0, u_0 = 1, v_0 = 1$.

$$e^{xv} + x + u = 2, \qquad v + xe^{u} = 1.$$

35. Εξετάστε βάσει του Θεωρήματος Πεπλεγμένης Συνάρτησης αν το παρακάτω σύστημα δύο εξισώσεων μπορεί να λυθεί ως προς τα u, v ως συναρτήσεις $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$ με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης σε κάποια περιοχή του $(x_0, y_0, z_0) = (1, -1, 0)$ και έτσι ώστε να είναι $u_0 = u(1, -1, 0) = 1$, $v_0 = v(1, -1, 0) = 0$. Βρείτε τύπο για τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης των u, v συναρτήσει των x, y, z, u, v κοντά στα $x_0 = 1, y_0 = -1, z_0 = 0, u_0 = 1, v_0 = 0$.

$$xyu^2 + zv^2 + xe^{zu} = 0, \qquad (x + z)u + e^{xv} = 2.$$

36. Εξετάστε βάσει του Θεωρήματος Πεπλεγμένης Συνάρτησης αν το παρακάτω σύστημα τριών εξισώσεων μπορεί να λυθεί ως προς τα u, v, w ως συναρτήσεις $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, $w = w(x, y)$ με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης σε κάποια περιοχή του σημείου $(x_0, y_0) = (1, 0)$ και έτσι ώστε να είναι $u_0 = u(0, 0) = -1$, $v_0 = v(0, 0) = 0$, $w_0 = w(0, 0) = 0$. Βρείτε τύπο για τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης των u, v, w συναρτήσει των x, y, u, v, w κοντά στα $x_0 = 1, y_0 = 0, u_0 = -1, v_0 = 0, w_0 = 0$.

$$x + 2y + u^2 + e^{v} + w = 3, \qquad xy + uv + w^2 = 0, \qquad xu + yv + e^{xw} = 0.$$

37. Τα u, v, w δίνονται ως συναρτήσεις των x, y, z με τους τύπους:

$$u = u(x, y, z) = xyz, \quad v = v(x, y, z) = y^2 + xz, \quad w = w(x, y, z) = xz^2 + yz.$$

Αποδείξτε βάσει του Θεωρήματος Αντίστροφης Συνάρτησης ότι τα x, y, z μπορούν να εκφραστούν ως συναρτήσεις $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης σε κάποια περιοχή του $(u_0, v_0, w_0) = (1, 2, 2)$ και έτσι ώστε να είναι $x_0 = x(1, 2, 2) = 1$, $y_0 = y(1, 2, 2) = 1$, $z_0 = z(1, 2, 2) = 1$. Βρείτε τύπο για τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης των x, y, z ως προς τις u, v, w συναρτήσει των x, y, z κοντά στα $x_0 = 1, y_0 = 1, z_0 = 1$ καθώς και τύπο για την Ιακωβιανή ορίζουσα $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$.