1. Έστω E το εφαπτόμενο επίπεδο στο γράφημα της $f(x,y) = x^2 + 3xy$ στο σημείο $(1,1,4)$. Σε ποιά σημεία της η επιφάνεια με καρτεσιανή εξίσωση $5x^2 + 3y^2 + z^2 = 9$ έχει μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα το οποίο είναι κάθετο στο E;
$\pm(1,1,-1)$. [$\pm(1,0,2)$, $\pm(1,0,-2)$, $\pm(0,0,3)$]

1. Έστω E το εφαπτόμενο επίπεδο στην επιφάνεια με καρτεσιανή εξίσωση $x^2 + y^4 + z^2 = 3$ στο σημείο $(1,1,-1)$. Σε ποιά σημεία του το γράφημα της $f(x,y) = xy^2$ έχει μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα το οποίο είναι κάθετο στο E;
$\pm(1,1,1)$. [$\pm(1,0,0)$, $\pm(0,1,0)$, $\pm(1,2,4)$]

1. Έστω **u** το κάθετο διάνυσμα στο γράφημα της $f(x,y) = 3xy + y^2$ στο σημείο $(1,1,4)$. Σε ποιά σημεία της η επιφάνεια με καρτεσιανή εξίσωση $3x^2 + 5y^2 + z^2 = 9$ έχει εφαπτόμενο επίπεδο κάθετο στο **u**;
$\pm(1,1,-1)$. [$\pm(0,1,2)$, $\pm(0,1,-2)$, $\pm(0,0,3)$]

1. Έστω **u** το κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια με καρτεσιανή εξίσωση $x^4 + y^2 + z^2 = 3$ στο σημείο $(1,1,-1)$. Σε ποιά σημεία του το γράφημα της $f(x,y) = x^2y$ έχει εφαπτόμενο επίπεδο κάθετο στο **u**;
$\pm(1,1,1)$. [$\pm(0,1,0)$, $\pm(1,0,0)$, $\pm(2,1,4)$]

2. Μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x,y,z)$ έχει $\nabla f(x_0,y_0,z_0) \neq (0,0,0)$ και μηδενικό στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής από το (x_0,y_0,z_0) στην κατεύθυνση $(1/3,-2/3,2/3)$. Ποιά θα μπορούσε να είναι η καρτεσιανή εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της ισοσταθμικής επιφάνειας της συνάρτησης στο σημείο (x_0,y_0,z_0);
$2(x-x_0)-1(y-y_0)-2(z-z_0)=0$.
$[(x-x_0)+(y-y_0)-3(z-z_0)=0, 4(x-x_0)+3(z-z_0)=0, (x-x_0)-2(y-y_0)-(z-z_0)=0]$

2. Μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x,y,z)$ έχει $\nabla f(x_0,y_0,z_0) \neq (0,0,0)$ και μηδενικό στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής από το (x_0,y_0,z_0) στην κατεύθυνση $(2/3,-1/3,-2/3)$. Ποιά θα μπορούσε να είναι η καρτεσιανή εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της ισοσταθμικής επιφάνειας της συνάρτησης στο σημείο (x_0,y_0,z_0);
$(x-x_0)+2(y-y_0)=0$.
$[(x-x_0)+3(y-y_0)-(z-z_0)=0, (x-x_0)+(y-y_0)+2(z-z_0)=0, (x-x_0)-(y-y_0)+2(z-z_0)=0.]$

2. Μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x,y,z)$ έχει $\nabla f(x_0,y_0,z_0) \neq (0,0,0)$ και μηδενικό στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής από το (x_0,y_0,z_0) στην κατεύθυνση $(-2/3,-1/3,2/3)$. Ποιά θα μπορούσε να είναι η καρτεσιανή εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της ισοσταθμικής επιφάνειας της συνάρτησης στο σημείο (x_0,y_0,z_0);
$3(x-x_0)-2(y-y_0)+2(z-z_0)=0$.
$[(x-x_0)+(y-y_0)-(z-z_0)=0, 2(x-x_0)+(y-y_0)+(z-z_0)=0, (x-x_0)-2(y-y_0)+(z-z_0)=0.]$

2. Μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x,y,z)$ έχει $\nabla f(x_0,y_0,z_0) \neq (0,0,0)$ και μηδενικό στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής από το (x_0,y_0,z_0) στην κατεύθυνση $(1/3,2/3,2/3)$. Ποιά θα μπορούσε να είναι η καρτεσιανή εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της ισοσταθμικής επιφάνειας της συνάρτησης στο σημείο (x_0,y_0,z_0);
$4(x-x_0)-(y-y_0)-(z-z_0)=0$.
$[(x-x_0)+(y-y_0)+(z-z_0)=0, 2(x-x_0)-(y-y_0)-2(z-z_0)=0, (x-x_0)-(y-y_0)+(z-z_0)=0.]$

3. Θεωρούμε την $g(x,y) = f(u(xy), v(x,y))$, όπου οι συναρτήσεις f, u, v είναι πραγματικές και παραγωγίσιμες. Η $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)$ είναι ίση με
$x\frac{\partial f}{\partial u}(u(xy), v(x,y))u'(xy) + \frac{\partial f}{\partial v}(u(xy), v(x,y))\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)$.
[$y\frac{\partial f}{\partial u}(u(xy), v(x,y))u'(xy) + \frac{\partial f}{\partial v}(u(xy), v(x,y))v'(x,y)$,
$xy\frac{\partial f}{\partial u}(u(xy), v(x,y))u'(xy) + \frac{\partial f}{\partial v}(u(xy), v(x,y))\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$,
$\frac{\partial f}{\partial u}(u(xy), v(x,y))\frac{\partial u}{\partial y}(xy) + \frac{\partial f}{\partial v}(u(xy), v(x,y))\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)$.]

3. Θεωρούμε την $g(x,y) = f(u(x,y), v(xy^2))$, όπου οι συναρτήσεις f, u, v είναι πραγματικές και παραγωγίσιμες. Η $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)$ είναι ίση με
$\frac{\partial f}{\partial u}(u(x,y), v(xy^2))\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + 2xy\frac{\partial f}{\partial v}(u(x,y), v(xy^2))v'(xy^2)$.
[$xy\frac{\partial f}{\partial u}(u(x,y), v(xy^2))\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial v}(u(x,y), v(xy^2))v'(xy^2)$,
$\frac{\partial f}{\partial u}(u(x,y), v(xy^2))u'(x,y) + 2xy\frac{\partial f}{\partial v}(u(x,y), v(xy^2))\frac{\partial v}{\partial y}(xy^2)$,
$xy\frac{\partial f}{\partial u}(u(x,y), v(xy^2))\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial v}(u(x,y), v(xy^2))\frac{\partial v}{\partial y}(xy^2)$.]

3. Θεωρούμε την $g(x,y) = f(u(x^2+y), v(x,y))$, όπου οι συναρτήσεις f, u, v είναι πραγματικές και παραγωγίσιμες. Η $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$ είναι ίση με
$2x\frac{\partial f}{\partial u}(u(x^2+y), v(x,y))u'(x^2+y) + \frac{\partial f}{\partial v}(u(x^2+y), v(x,y))\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$.
[$x^2\frac{\partial f}{\partial u}(u(x^2+y), v(x,y))u'(x^2+y) + x\frac{\partial f}{\partial v}(u(x^2+y), v(x,y))\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)$,
$2x\frac{\partial f}{\partial u}(u(x^2+y), v(x,y))\frac{\partial u}{\partial x}(x^2+y) + \frac{\partial f}{\partial v}(u(x^2+y), v(x,y))v'(x,y)$,
$x\frac{\partial f}{\partial u}(u(x^2+y), v(x,y))u'(x^2+y) + \frac{\partial f}{\partial v}(u(x^2+y), v(x,y))v'(x,y)$.]

3. Θεωρούμε την $g(x,y) = f(u(x,y), v(x^2y))$, όπου οι συναρτήσεις f, u, v είναι πραγματικές και παραγωγίσιμες. Η $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$ είναι ίση με
$\frac{\partial f}{\partial u}(u(x,y), v(x^2y))\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + 2xy\frac{\partial f}{\partial v}(u(x,y), v(x^2y))v'(x^2y)$.
[$\frac{\partial f}{\partial u}(u(x,y), v(x^2y))\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + 2xy\frac{\partial f}{\partial v}(u(x,y), v(x^2y))\frac{\partial v}{\partial x}(x^2y)$,
$xy\frac{\partial f}{\partial u}(u(x,y), v(x^2y))\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial v}(u(x,y), v(x^2y))v'(x^2y)$,
$\frac{\partial f}{\partial u}(u(x,y), v(x^2y))u'(x,y) + 2xy\frac{\partial f}{\partial v}(u(x,y), v(x^2y))v'(x^2y)$.]

4. Έστω ότι η παραγωγίσιμη καμπύλη $\boldsymbol{\sigma}(t) = (x(t), y(t))$ εφάπτεται με την ισοσταθμική καμπύλη της παραγωγίσιμης πραγματικής συνάρτησης $f(x, y)$ στο σημείο $\boldsymbol{\sigma}(t_0) = (x_0, y_0)$. Τότε:
$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)y'(t_0) = 0.$
[$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)y'(t_0) > 0,$
$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)y'(t_0) < 0,$
$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)y'(t_0) = \pm 1.$]

4. Έστω ότι η παραγωγίσιμη καμπύλη $\boldsymbol{\sigma}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ περιέχεται στην ισοσταθμική επιφάνεια της παραγωγίσιμης πραγματικής συνάρτησης $f(x, y, z)$ στο σημείο $\boldsymbol{\sigma}(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$. Τότε:
$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)y'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)z'(t_0) = 0.$
[$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)y'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)z'(t_0) > 0,$
$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)y'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)z'(t_0) < 0,$
$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)y'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)z'(t_0) = \pm 1.$]

4. Έστω ότι η παραγωγίσιμη καμπύλη $\boldsymbol{\sigma}(t) = (x(t), y(t))$ ταυτίζεται με την ισοσταθμική καμπύλη της παραγωγίσιμης πραγματικής συνάρτησης $f(x, y)$ στο σημείο $\boldsymbol{\sigma}(t_0) = (x_0, y_0)$. Τότε:
$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)y'(t_0) = 0.$
[$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)y'(t_0) > 0,$
$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)y'(t_0) < 0,$
$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)y'(t_0) = \pm 1.$]

4. Έστω ότι η παραγωγίσιμη καμπύλη $\boldsymbol{\sigma}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ εφάπτεται με την ισοσταθμική επιφάνεια της παραγωγίσιμης πραγματικής συνάρτησης $f(x, y, z)$ στο σημείο $\boldsymbol{\sigma}(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$. Τότε:
$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)y'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)z'(t_0) = 0.$
[$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)y'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)z'(t_0) > 0,$
$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)y'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)z'(t_0) < 0,$
$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)y'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)z'(t_0) = \pm 1.$]

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ

Τελικό διαγώνισμα, 16/6/2017.

Θέμα ανάπτυξης.
Η απόδειξή σας πρέπει να είναι σύντομη και σαφής.

Αριθμός μητρώου: *Ονοματεπώνυμο*:

Θέμα. Αποδείξτε βάσει του ορισμού της παραγωγισιμότητας ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x, y, z) = 4x^2 - y^2 + xy + z^2$$

είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0, 0)$.

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ

Τελικό διαγώνισμα, 16/6/2017.

Θέμα ανάπτυξης.
Η απόδειξή σας πρέπει να είναι σύντομη και σαφής.

Αριθμός μητρώου: *Ονοματεπώνυμο*:

Θέμα. Αποδείξτε βάσει του ορισμού της παραγωγισιμότητας ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + xz + 2yz$$

είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0, 0)$.

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ

Τελικό διαγώνισμα, 16/6/2017.

Θέμα ανάπτυξης.
Η απόδειξή σας πρέπει να είναι σύντομη και σαφής.

Αριθμός μητρώου: *Ονοματεπώνυμο*:

Θέμα. Αποδείξτε βάσει του ορισμού της παραγωγισιμότητας ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x, y, z) = 3x^2 + z^2 - xy + 2xz$$

είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0, 0)$.

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ
Τελικό διαγώνισμα, 16/6/2017.

Θέμα ανάπτυξης.
Η απόδειξή σας πρέπει να είναι σύντομη και σαφής.

Αριθμός μητρώου: *Ονοματεπώνυμο*:

Θέμα. Αποδείξτε βάσει του ορισμού της παραγωγισιμότητας ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x, y, z) = x^2 - 3y^2 + 2xy + xz$$

είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0, 0)$.

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ

Τελικό διαγώνισμα, 16/6/2017.

Θέμα ανάπτυξης.
Η απόδειξή σας πρέπει να είναι σύντομη και σαφής.

Αριθμός μητρώου: *Ονοματεπώνυμο*:

Θέμα. Αποδείξτε βάσει του ορισμού της παραγωγισιμότητας ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x, y, z) = 2x^2 - y^2 + 3z^2 + yz$$

είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0, 0)$.

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ

Τελικό διαγώνισμα, 16/6/2017.

Θέμα ανάπτυξης.
Η απόδειξή σας πρέπει να είναι σύντομη και σαφής.

Αριθμός μητρώου: *Ονοματεπώνυμο*:

Θέμα. Αποδείξτε βάσει του ορισμού της παραγωγισιμότητας ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x, y, z) = y^2 - 3z^2 + 2xy + 3xz$$

είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0, 0)$.

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ

Τελικό διαγώνισμα, 16/6/2017.

Θέμα ανάπτυξης.
Η απόδειξή σας πρέπει να είναι σύντομη και σαφής.

Αριθμός μητρώου: *Ονοματεπώνυμο*:

Θέμα. Αποδείξτε βάσει του ορισμού της παραγωγισιμότητας ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x, y, z) = 2x^2 - y^2 - z^2 + 3xz$$

είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0, 0)$.

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ

Τελικό διαγώνισμα, 16/6/2017.

Θέμα ανάπτυξης.
Η απόδειξή σας πρέπει να είναι σύντομη και σαφής.

Αριθμός μητρώου: *Ονοματεπώνυμο*:

Θέμα. Αποδείξτε βάσει του ορισμού της παραγωγισιμότητας ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x, y, z) = 3y^2 - xy + xz + 3yz$$

είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0, 0)$.

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ

Τελικό διαγώνισμα, 16/6/2017.

Θέμα ανάπτυξης.
Η απόδειξή σας πρέπει να είναι σύντομη και σαφής.

Αριθμός μητρώου: *Ονοματεπώνυμο*:

Θέμα. Αποδείξτε βάσει του ορισμού της παραγωγισιμότητας ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x, y, z) = 4x^2 + y^2 - z^2 - 2xz$$

είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0, 0)$.

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ

Τελικό διαγώνισμα, 16/6/2017.

Θέμα ανάπτυξης.
Η απόδειξή σας πρέπει να είναι σύντομη και σαφής.

Αριθμός μητρώου: *Ονοματεπώνυμο*:

Θέμα. Αποδείξτε βάσει του ορισμού της παραγωγισιμότητας ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - xy + 4yz$$

είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0, 0)$.