

Απειροστικός Λογισμός II, εαρινό εξάμηνο 2019-20.

Απαντήσεις μερικών ασκήσεων.

Πρώτο φυλλάδιο, άσκηση 3.

- i. Δεν υπάρχει.
- ii.  $\frac{9}{e}$ .
- iii. 1.
- iv. 4.
- v. 0.
- vi. 0.
- vii. 0.
- viii.  $\frac{1}{2}$ .
- ix. 0.
- x. Δεν υπάρχει.
- xi. Δεν υπάρχει.
- xii. Δεν υπάρχει.
- xiii. Δεν υπάρχει.
- xiv. 0.
- xv.  $-4$ .
- xvi. 1.
- xvii. Δεν υπάρχει.
- xviii. Δεν υπάρχει.

Δεύτερο φυλλάδιο, άσκηση 1.

- i.  $\mathbb{R}^2$ . Συνεχής.
- ii.  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \mid x + y = 0\}$ . Συνεχής.
- iii.  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \mid xy = 0\}$ . Συνεχής.
- iv.  $\mathbb{R}^2$ . Συνεχής.
- v.  $\mathbb{R}^2$ . Συνεχής.
- vi.  $\mathbb{R}^2$ . Συνεχής.
- vii.  $\mathbb{R}^2$ . Συνεχής εκτός στο σημείο  $(0, 0)$ .
- viii.  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \mid x + y = -2\}$ . Συνεχής.
- ix.  $\mathbb{R}^3$ . Συνεχής.

- x.  $\mathbb{R}^3$ . Συνεχής.
- xi.  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z \geq 0\}$ . Συνεχής.
- xii.  $\mathbb{R}^3$ . Συνεχής.
- xiii.  $\mathbb{R}^3$ . Συνεχής.
- xiv.  $\mathbb{R}^3$ . Συνεχής εκτός στο σημείο  $(0, 0, 0)$ .

**Τρίτο φυλλάδιο, άσκηση 1.**

i.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1} - y \cos x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^y \log x - \sin x.$$

ii. Για  $(x, y) \neq (0, 0)$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Οι  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0), \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$  δεν υπάρχουν.

iii.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2z^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2yz^2, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2x^2y^2z.$$

iv. Για  $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Οι  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0, 0), \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0, 0), \frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 0)$  δεν υπάρχουν.

v.

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = a_j.$$

vi.

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = 2a_j x_j.$$

vii. Για  $(x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{x_j}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}}.$$

Οι  $\frac{\partial f}{\partial x_j}(0, \dots, 0)$  δεν υπάρχουν.

viii.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 1.$$

ix. Για  $(x, y) \neq (0, 0)$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^3}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^3}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

x. Για  $(x, y) \neq (0, 0)$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

xi. Για  $(x, y, z) \neq (0, 0, z)$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

xii. Για  $(x, y, z) \neq (0, 0, z)$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+z^2}.$$

xiii. Για  $(x, y, z) \neq (0, 0, z)$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

#### Τρίτο φυλλάδιο, άσκηση 4.

(i)  $4x + 12y + z = 22$ .

(ii)  $(2, 6, -36)$ .

#### Τρίτο φυλλάδιο, άσκηση 5.

Σύνολο εσωτερικών σημείων, σύνολο συννοριακών σημείων, ανοικτό ή κλειστό.

- i.  $\{(x, y) \mid 3x + 2y > 1\}, \{(x, y) \mid 3x + 2y = 1\}$ , ανοικτό.
- ii.  $\{(x, y) \mid 3x + 2y > 1\}, \{(x, y) \mid 3x + 2y = 1\}$ , κλειστό.
- iii.  $\{(x, y) \mid \max\{|x|, |y|\} < 1\}, \{(x, y) \mid \max\{|x|, |y|\} = 1\}$ , ανοικτό.
- iv.  $\{(x, y) \mid \max\{|x|, |y|\} < 1\}, \{(x, y) \mid \max\{|x|, |y|\} = 1\}$ , κλειστό.
- v.  $\{(x, y) \mid \max\{|x|, |y|\} < 1\}, \{(x, y) \mid \max\{|x|, |y|\} = 1\}$ , ούτε ανοικτό ούτε κλειστό.
- vi.  $\{(x, y) \mid 2 < x^2 + y^2 < 4\}, \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 2 \text{ ή } 4\}$ , ανοικτό.
- vii.  $\{(x, y) \mid 2 < x^2 + y^2 < 4\}, \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 2 \text{ ή } 4\}$ , κλειστό.
- viii.  $\{(x, y) \mid 2 < x^2 + y^2 < 4\}, \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 2 \text{ ή } 4\}$ , ούτε ανοικτό ούτε κλειστό.
- ix.  $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 0\}, \{(0, 0)\}$ , ανοικτό.
- x.  $\{(x, y) \mid xy > 0\}, \{(x, y) \mid xy = 0\}$ , ανοικτό.
- xi.  $\{(x, y, z) \mid x + 2y + z < 1\}, \{(x, y, z) \mid x + 2y + z = 1\}$ , ανοικτό.
- xii.  $\{(x, y, z) \mid x + 2y + z < 1\}, \{(x, y, z) \mid x + 2y + z = 1\}$ , κλειστό.
- xiii.  $\{(x, y, z) \mid \max\{|x|, |y|, |z|\} < 1\}, \{(x, y, z) \mid \max\{|x|, |y|, |z|\} = 1\}$ , ανοικτό.
- xiv.  $\{(x, y, z) \mid \max\{|x|, |y|, |z|\} < 1\}, \{(x, y, z) \mid \max\{|x|, |y|, |z|\} = 1\}$ , κλειστό.
- xv.  $\{(x, y, z) \mid 2 < x^2 + y^2 + z^2 < 4\}, \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 2 \text{ ή } 4\}$ , ανοικτό.
- xvi.  $\{(x, y, z) \mid 2 < x^2 + y^2 + z^2 < 4\}, \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 2 \text{ ή } 4\}$ , κλειστό.
- xvii.  $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 > 0\}, \{(0, 0, 0)\}$ , ανοικτό.
- xviii.  $\{(x, y, z) \mid xyz > 0\}, \{(x, y, z) \mid xyz = 0\}$ , ανοικτό.

#### Τέταρτο φυλλάδιο, άσκηση 1.

i.

$$(2x, 2y), \quad [2x \quad 2y], \quad 2x_0x + 2y_0y - z = x_0^2 + y_0^2, \quad (2x_0, 2y_0, -1).$$

ii.

$$(1, \frac{1}{y^2}), \quad \left[1 \quad \frac{1}{y^2}\right], \quad x + \frac{y}{y_0^2} - z = \frac{2}{y_0}, \quad (1, \frac{1}{y_0^2}, -1).$$

iii.

$$\left( \frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}, \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \right), \quad \left[ \frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} \quad \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \right],$$
$$\frac{y_0(y_0^2-x_0^2)}{(x_0^2+y_0^2)^2} x + \frac{x_0(x_0^2-y_0^2)}{(x_0^2+y_0^2)^2} y - z = -\frac{x_0 y_0}{x_0^2+y_0^2}, \quad \left( \frac{y_0(y_0^2-x_0^2)}{(x_0^2+y_0^2)^2}, \frac{x_0(x_0^2-y_0^2)}{(x_0^2+y_0^2)^2}, -1 \right).$$

### Τέταρτο φυλλάδιο, άσκηση 2.

i.  $(2x, 2y, 2z), [2x \quad 2y \quad 2z].$

ii.  $(a, b, c), [a \quad b \quad c].$

iii.

$$\left( -\frac{2x}{(x^2+y^2+z^2)^2}, -\frac{2y}{(x^2+y^2+z^2)^2}, -\frac{2z}{(x^2+y^2+z^2)^2} \right),$$
$$\left[ -\frac{2x}{(x^2+y^2+z^2)^2} \quad -\frac{2y}{(x^2+y^2+z^2)^2} \quad -\frac{2z}{(x^2+y^2+z^2)^2} \right].$$

iv.

$$(2xe^{x^2+2y^2+3z^2}, 4ye^{x^2+2y^2+3z^2}, 6ze^{x^2+2y^2+3z^2}),$$
$$\left[ 2xe^{x^2+2y^2+3z^2} \quad 4ye^{x^2+2y^2+3z^2} \quad 6ze^{x^2+2y^2+3z^2} \right].$$

### Τέταρτο φυλλάδιο, άσκηση 3.

i.  $(2x_1, \dots, 2x_n), [2x_1 \quad \dots \quad 2x_n].$

ii.  $(a_1, \dots, a_n), [a_1 \quad \dots \quad a_n].$

iii.

$$\left( -\frac{2x_1}{(x_1^2+\dots+x_n^2)^2}, \dots, -\frac{2x_n}{(x_1^2+\dots+x_n^2)^2} \right), \quad \left[ -\frac{2x_1}{(x_1^2+\dots+x_n^2)^2} \quad \dots \quad -\frac{2x_n}{(x_1^2+\dots+x_n^2)^2} \right].$$

iv.

$$\left( -\frac{x_1}{(x_1^2+\dots+x_n^2)^{3/2}}, \dots, -\frac{x_n}{(x_1^2+\dots+x_n^2)^{3/2}} \right), \quad \left[ -\frac{x_1}{(x_1^2+\dots+x_n^2)^{3/2}} \quad \dots \quad -\frac{x_n}{(x_1^2+\dots+x_n^2)^{3/2}} \right].$$

v.

$$(a_1 e^{a_1 x_1 + \dots + a_n x_n}, \dots, a_n e^{a_1 x_1 + \dots + a_n x_n}), \quad [a_1 e^{a_1 x_1 + \dots + a_n x_n} \quad \dots \quad a_n e^{a_1 x_1 + \dots + a_n x_n}].$$

### Τέταρτο φυλλάδιο, άσκηση 4.

i.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ii.

$$\begin{bmatrix} e^x & 0 \\ y \cos(xy) & x \cos(xy) \end{bmatrix}$$

iii.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ y & x \end{bmatrix}$$

iv.

$$\begin{bmatrix} \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} & \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} & \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{bmatrix}$$

v.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{bmatrix}$$

vi.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

vii.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & e^z \\ 2xy & x^2 & 0 \end{bmatrix}$$

viii.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

ix.

$$\begin{bmatrix} -\frac{yz}{x^2} & \frac{z}{x} & \frac{y}{x} \\ \frac{1}{yz} & -\frac{x}{y^2z} & -\frac{x}{yz^2} \end{bmatrix}$$

#### Τέταρτο φυλλάδιο, άσκηση 5.

i.  $2x + y - 3z = 7, (2, 1, -3).$

ii.  $6x + 10y + 8z = 36, (6, 10, 8).$

iii.  $x + y + z = 3, (1, 1, 1).$

iv.  $z = 0, (0, 0, 1).$

#### Τέταρτο φυλλάδιο, άσκηση 6.

$$2e^{2x_0+3y_0}x + 3e^{2x_0+3y_0}y - z = 2e^{2x_0+3y_0}x_0 + 3e^{2x_0+3y_0}y_0 - e^{2x_0+3y_0},$$
$$(2e^{2x_0+3y_0}, 3e^{2x_0+3y_0}), \quad e^{2x+3y} = e^{2x_0+3y_0}, \quad (2e^{2x_0+3y_0}, 3e^{2x_0+3y_0}).$$

#### Τέταρτο φυλλάδιο, άσκηση 7.

$$2x_0x + 2y_0y - z = x_0^2 + y_0^2, \quad (2x_0, 2y_0), \quad x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2, \quad (2x_0, 2y_0).$$

#### Τέταρτο φυλλάδιο, άσκηση 8.

$(4, 3).$

#### Πέμπτο φυλλάδιο, άσκηση 1.

i.

$$D\mathbf{h} = \begin{bmatrix} 4x^3(x+1)e^{x+y^2+2y} & 2x^4(y+1)e^{x+y^2+2y} \\ 4x^3y^2e^y & x^4y(y+2)e^y \end{bmatrix}$$

ii.

$$D\mathbf{h} = \begin{bmatrix} 2xy + y^3 & x^2 + 3xy^2 \\ 2xy^2 \sin(x+y^2) + x^2y^2 \cos(x+y^2) & 2x^2y \sin(x+y^2) + 2x^2y^3 \cos(x+y^2) \\ (2xy + y^3)e^{xy(x+y^2)} & (x^2 + 3xy^2)e^{xy(x+y^2)} \end{bmatrix}$$

iii.

$$D\mathbf{h} = \begin{bmatrix} 2e^{2x} \cos^2 y & -2e^{2x} \sin y \cos y \\ 2e^x \cos y & -2e^x \sin y \end{bmatrix}$$

iv.

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x} &= (y-z) \sin(x+y+\sin(xz)) + (x+y)(y-z) \cos(x+y+\sin(xz)) \\ &\quad + z(x+y)(y-z) \cos(xz) \cos(x+y+\sin(xz)), \\ \frac{\partial h}{\partial y} &= (x+2y-z) \sin(x+y+\sin(xz)) + (x+y)(y-z) \cos(x+y+\sin(xz)), \\ \frac{\partial h}{\partial z} &= -(x+y) \sin(x+y+\sin(xz)) + x(x+y)(y-z) \cos(xz) \cos(x+y+\sin(xz)). \end{aligned}$$

### Πέμπτο φυλλάδιο, άσκηση 2.

i.

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}.$$

ii.

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}.$$

iii.

$$\frac{dh}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{dv}{dx}.$$

iv.

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{dw}{dx}, \quad \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z}.$$

### Πέμπτο φυλλάδιο, άσκηση 3.

$$\frac{\partial h}{\partial r} = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial h}{\partial \theta} = -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}.$$

### Πέμπτο φυλλάδιο, άσκηση 4.

(i)

$$\frac{\partial h}{\partial r} = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial h}{\partial \theta} = -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

(ii)

$$\frac{\partial h}{\partial \rho} = \cos \theta \sin \phi \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \sin \phi \frac{\partial f}{\partial y} + \cos \phi \frac{\partial f}{\partial z}, \quad \frac{\partial h}{\partial \theta} = -\rho \sin \theta \sin \phi \frac{\partial f}{\partial x} + \rho \cos \theta \sin \phi \frac{\partial f}{\partial y},$$

$$\frac{\partial h}{\partial \phi} = \rho \cos \theta \cos \phi \frac{\partial f}{\partial x} + \rho \sin \theta \cos \phi \frac{\partial f}{\partial y} - \rho \sin \phi \frac{\partial f}{\partial z}.$$

### Έκτο φυλλάδιο, άσκηση 1.

- i. Έλλειψη στο  $xy$ -επίπεδο με κέντρο  $(0, 0)$  και ημιάξονες 1 και 3.
- ii. Κύκλος στο  $xy$ -επίπεδο με κέντρο  $(0, 0)$  και ακτίνα 1.
- iii. Ευθ. τμήμα στο  $xy$ -επίπεδο με άκρα  $(0, -3)$  και  $(2, -2)$ .
- iv. Ευθεία στον  $xyz$ -χώρο η οποία περιέχει το σημείο  $(-1, 2, 0)$  και είναι παράλληλη στο διάνυσμα  $(2, 1, 1)$ .
- v. Υπερβολή στο  $xy$ -επίπεδο με καρτεσιανή εξίσωση  $xy = 1, x > 0$ .
- vi. Το γράφημα στο  $xy$ -επίπεδο της  $f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$ .
- vii. Κύκλος στον  $xyz$ -χώρο με κέντρο  $(1, 0, 0)$  και ακτίνα 1 πάνω στο επίπεδο με καρτεσιανή εξίσωση  $x = 1$ .

viii. Έλικά στον  $xyz$ -χώρο πάνω στην κυλινδρική επιφάνεια με καρτεσιανή εξίσωση  $x^2 + y^2 = 1$ .

**Έκτο φυλλάδιο, άσκηση 2.**

i.  $\sigma(t) = (t, -3t + 2, 2t + 1), t \in \mathbb{R}$ .

ii.  $\sigma(t) = (3 + 4 \cos t, -1 + 4 \sin t), t \in \mathbb{R}$ .

iii.  $\sigma(t) = (t, t^2), t \in \mathbb{R}$ .

iv.  $\sigma(t) = (4 \cos t, 3 \sin t), t \in \mathbb{R}$ .

v.  $\sigma(t) = (1 + 3 \cos t, 1, 3 + 3 \sin t), t \in \mathbb{R}$ .

**Έκτο φυλλάδιο, άσκηση 3.**

i.

$$(0, -3), \quad x = -1, \quad (x, y) = (-1, -3t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

ii.

$$\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \sqrt{3}x + y = 2, \quad (x, y) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{t}{2}, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}t}{2}\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

iii.

$$(2, 1), \quad x - 2y = 6, \quad (x, y) = \left(1 + 2t, -\frac{5}{2} + t\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

iv.

$$(2, 1, 1), \quad x - 2z = -1, \quad y - z = 2, \quad (x, y, z) = (2t - 1, t + 2, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

v.

$$\left(1, -\frac{1}{4}\right), \quad x + 4y = 4, \quad (x, y) = \left(t + 2, -\frac{t}{4} + \frac{1}{2}\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

vi.

$$(1, 3), \quad 3x - y = 2, \quad (x, y) = (t + 1, 3t + 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

vii.

$$\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad x = 1, \quad y + z = \sqrt{2}, \quad (x, y, z) = \left(1, \frac{1-t}{\sqrt{2}}, \frac{1+t}{\sqrt{2}}\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

viii.

$$(0, -1, 1), \quad x = -1, \quad y + z = \pi, \quad (x, y, z) = (-1, -t, t + \pi), \quad t \in \mathbb{R}.$$

**Έκτο φυλλάδιο, άσκηση 4.**

i.  $(3 \cos(2t), -\sin t + 3 \cos t)$ .

ii.  $(\sin(2t), \cos(2t), -\sin(2t))$ .

iii.  $(1, 4)$ .

iv.  $(3, 2t + 2)$ .

v.  $(1, 0, -\frac{2}{t^3})$ .

vi.  $(2t, 3t^2)$ .

vii.  $(\sin t, \cos(2t))$ .

viii.  $(1, -\sin t, \cos t)$ .

**Έκτο φυλλάδιο, άσκηση 5.**

- i.  $-1, \quad (\alpha) (0, -1) \quad (\beta) (0, 1) \quad (\gamma) (\pm 1, 0).$
- ii.  $\frac{4+3\sqrt{3}}{2} e^2, \quad (\alpha) \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) \quad (\beta) \left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right) \quad (\gamma) \left(\pm \frac{3}{5}, \mp \frac{4}{5}\right).$
- iii.  $0, \quad (\alpha) \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right) \quad (\beta) \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$   
 $(\gamma) (v_1, v_2, v_3) \quad \mu \varepsilon v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1 \quad \kappa \alpha \iota v_1 - v_2 + 2v_3 = 0.$
- iv.  $-4, \quad (\alpha) (0, -1, 0) \quad (\beta) (0, 1, 0) \quad (\gamma) (v_1, 0, v_3) \quad \mu \varepsilon v_1^2 + v_3^2 = 1.$
- v.  $2\|\mathbf{x}\|, \quad (\alpha) \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \quad (\beta) -\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \quad (\gamma) \mathbf{v} \quad \mu \varepsilon \|\mathbf{v}\| = 1 \quad \kappa \alpha \iota \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = 0.$
- vi.  $-\frac{1}{\|\mathbf{x}\|^2}, \quad (\alpha) -\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \quad (\beta) \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \quad (\gamma) \mathbf{v} \quad \mu \varepsilon \|\mathbf{v}\| = 1 \quad \kappa \alpha \iota \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = 0.$
- vii.  $\frac{2(x_1|x_1|+\dots+x_n|x_n|)}{\|\mathbf{x}\|}, \quad (\alpha) \left(\frac{|x_1|}{\|\mathbf{x}\|}, \dots, \frac{|x_n|}{\|\mathbf{x}\|}\right) \quad (\beta) \left(-\frac{|x_1|}{\|\mathbf{x}\|}, \dots, -\frac{|x_n|}{\|\mathbf{x}\|}\right)$   
 $(\gamma) (v_1, \dots, v_n) \quad \mu \varepsilon v_1^2 + \dots + v_n^2 = 1 \quad \kappa \alpha \iota v_1|x_1| + \dots + v_n|x_n| = 0.$

### Εβδομο φυλλάδιο, άσκηση 1.

- i.  $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2.$   
 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$   
 $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 0, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = 2, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = 0.$
- ii.  $\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 \cos(xy^2), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy \cos(xy^2).$   
 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -y^4 \sin(xy^2), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2y \cos(xy^2) - 2xy^3 \sin(xy^2),$   
 $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x \cos(xy^2) - 4x^2 y^2 \sin(xy^2).$   
 $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = -y^6 \cos(xy^2), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = -4y^3 \sin(xy^2) - 2xy^5 \cos(xy^2),$   
 $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = 2 \cos(xy^2) - 10xy^2 \sin(xy^2) - 4x^2 y^4 \cos(xy^2),$   
 $\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = -12x^2 y \sin(xy^2) - 8x^3 y^3 \cos(xy^2).$
- v.  $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 2px_i(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{p-1}.$   
 $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 2p(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{p-1} + 4p(p-1)x_i^2(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{p-2},$   
 $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = 4p(p-1)x_i x_j (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{p-1}.$   
 $\frac{\partial^3 f}{\partial x_i^3} = 12p(p-1)x_i(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{p-2} + 8p(p-1)(p-2)x_i^3(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{p-3},$   
 $\frac{\partial^3 f}{\partial x_i^2 \partial x_j} = 4p(p-1)x_j(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{p-2} + 8p(p-1)(p-2)x_i^2 x_j (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{p-3},$   
 $\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} = 8p(p-1)^2 x_i x_j x_k (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{p-2}.$



**Έβδομο φυλλάδιο, άσκηση 2.**

i.

$$g''(t) = (\sin t + t \cos t)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2e^t (\sin t + t \cos t) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + e^{2t} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + (2 \cos t - t \sin t) \frac{\partial f}{\partial x} + e^t \frac{\partial f}{\partial y}.$$

ii.

$$\begin{aligned} g''(t) &= 4t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (e^t + te^t)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 4t^2 \cos^2(t^2) \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\ &\quad + 4t(e^t + te^t) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 8t^2 \cos(t^2) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + 4t(e^t + te^t) \cos(t^2) \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ &\quad + 2 \frac{\partial f}{\partial x} + (2e^t + te^t) \frac{\partial f}{\partial y} + (2 \cos(t^2) - 4t^2 \sin(t^2)) \frac{\partial f}{\partial z}. \end{aligned}$$

**Έβδομο φυλλάδιο, άσκηση 3.**

i.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + 2 \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned}$$

**Έβδομο φυλλάδιο, άσκηση 4.**

i.

$$[x \ y] \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

ii.

$$[x \ y] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

iii.

$$[x \ y \ z] \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

iv.

$$[x \ y \ z] \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

v.

$$[x \ y] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

vi.

$$[x \ y \ z] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

vii.

$$[x \ y \ z \ w] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 3 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

**Έβδομο φυλλάδιο, άσκηση 5.**

- i.  $3x + 2y$ .
- ii.  $y + xy$ .
- iii.  $-1 + \frac{\pi^2}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{2}(y - \pi)^2 + \pi(x - 1)(y - \pi)$ .
- iv.  $x + y - x^2 - y^2 - 2xy$ .
- v.  $1 + x + y + z + xy + xz + yz$ .
- vi.  $x + xy + xz$ .

**Όγδοο φυλλάδιο, άσκηση 1.**

- i. Σημείο ολικού ελαχίστου:  $(0, 0)$ .
- ii. Κανένα.
- iii. Σημείο ολικού ελαχίστου:  $(x, y)$  με  $x + y = 0$ .
- iv. Κανένα.
- v. Σημείο ολικού ελαχίστου:  $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$ .
- vi. Σημεία ολικού μεγίστου:  $(x, y)$  με  $x^2 + y^2 = k\pi$ ,  $k$  άρτιος. Σημεία ολικού ελαχίστου:  $(x, y)$  με  $x^2 + y^2 = k\pi$ ,  $k$  περιττός.
- vii. Κανένα.
- viii. Κανένα.
- ix. Κανένα.
- x. Σημείο τοπικού ελαχίστου:  $(1, 1)$ .
- xi. Σημείο ολικού ελαχίστου:  $(0, 0)$ . Σημεία ολικού μεγίστου:  $(0, \pm 1)$ .
- xii. Σημείο τοπικού μεγίστου:  $(0, 1)$ .
- xiii. Σημείο τοπικού ελαχίστου:  $(-2, 0)$ .
- xiv. Σημείο ολικού ελαχίστου:  $(1, 1)$ .
- xv. Σημείο ολικού ελαχίστου:  $(0, 0)$ .
- xvi. Σημεία ολικού μεγίστου:  $(k\pi, m\pi + \frac{\pi}{2})$ ,  $k$  άρτιος,  $m$  άρτιος. Σημεία ολικού ελαχίστου:  $(k\pi, m\pi + \frac{\pi}{2})$ ,  $k$  άρτιος,  $m$  περιττός.
- xvii. Σημεία ολικού μεγίστου:  $(k\pi + \frac{\pi}{2}, 0)$ ,  $k$  άρτιος. Σημεία ολικού ελαχίστου:  $(k\pi + \frac{\pi}{2}, 0)$ ,  $k$  περιττός.
- xviii. Σημεία ολικού μεγίστου:  $(x, 0)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- xix. Σημείο ολικού ελαχίστου:  $(0, 0, 0)$ .
- xx. Σημεία τοπικού ελαχίστου:  $(1, 1, 1)$ ,  $(1, -1, -1)$ ,  $(-1, 1, -1)$ ,  $(-1, -1, 1)$ .

**Όγδοο φυλλάδιο, άσκηση 2.**

- i. Μέγιστη τιμή:  $\frac{3}{2}$ . Ελάχιστη τιμή:  $0$ .

- ii. Μέγιστη τιμή: 3. Ελάχιστη τιμή:  $-1$ .
- iii. Μέγιστη τιμή: 2. Ελάχιστη τιμή:  $-2$ .
- iv. Μέγιστη τιμή: 1. Ελάχιστη τιμή:  $-1$ .
- v. Μέγιστη τιμή:  $\frac{1}{8}$ . Ελάχιστη τιμή:  $-1$ .
- vi. Μέγιστη τιμή: 4. Ελάχιστη τιμή: 0.

**Όγδοο φυλλάδιο, άσκηση 3.**

$$-2 \leq k \leq 2.$$

**Όγδοο φυλλάδιο, άσκηση 5.**

$$\left(\frac{40}{9}, -\frac{20}{9}, \frac{40}{9}\right).$$

**Όγδοο φυλλάδιο, άσκηση 7.**

Τα ισόπλευρα.

**Ένατο φυλλάδιο, άσκηση 1.**

- i. Όχι.
- ii. Ναι.

$$f(x) = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}, \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}.$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{2x}{1-2f(x)}.$$

- iii. Ναι.

$$\frac{df}{dx} = -\frac{5x^4+f(x)}{x+5f(x)^4}.$$

- iv. Ναι.

$$\frac{df}{dx} = -\frac{f(x)}{x}.$$

- v. Ναι.

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - x, \quad -\infty < x < +\infty.$$

$$\frac{df}{dx} = -1.$$

**Ένατο φυλλάδιο, άσκηση 2.**

- i. Ναι.

$$f(x, y) = x^3 - e^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}, \quad \{(x, y) \mid x > 0, y < 0\}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + x - \frac{f(x)}{x^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^3 - f(x)}{y^2}.$$

- ii. Ναι.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{yf(x)\cos(xyf(x))-1}{1-xy\cos(xyf(x))}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{xf(x)\cos(xyf(x))-1}{1-xy\cos(xyf(x))}.$$

- iii. Ναι.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{ye^{(x+y)f(x)}}{xy(x+y)e^{(x+y)f(x)}+3f(x)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{xe^{(x+y)f(x)}}{xy(x+y)e^{(x+y)f(x)}+3f(x)^2}.$$

**Δέκατο φυλλάδιο, άσκηση 1.**

- i.  $(3, 2), 3x + 2y = 5$ .
- ii.  $(1, 0), x = 4$ .
- iii.  $(3, -2), 3x - 2y = 6\sqrt{2}$ .

iv.  $(12, -1), 12x - y = 16.$

v.  $(1, 2), x + 2y = -1.$

vi.  $(1, 0), x = 2.$

**Δέκατο φυλλάδιο, άσκηση 2.**

i.  $(3, 2, -5), 3x + 2y - 5z = -10.$

ii.  $(1, 1, 2), x + y + 2z = 6.$

iii.  $(1, 0, 0), x = 2.$

iv.  $(3, -2, -1), 3x - 2y - z = 3.$

v.  $(1, -1, -2), x - y - 2z = -2.$

vi.  $(2, 1, 1), 2x + y + z = 6.$

**Δέκατο φυλλάδιο, άσκηση 3.**

$\pm(2, \frac{1}{2}, -1).$

**Δέκατο φυλλάδιο, άσκηση 4.**

Κανένα.

**Δέκατο φυλλάδιο, άσκηση 5.**

i. Σημείο ολικού μεγίστου:  $(\frac{9\sqrt{2}}{2\sqrt{35}}, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{35}}).$  Σημείο ολικού ελαχίστου:  $(-\frac{9\sqrt{2}}{2\sqrt{35}}, -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{35}}).$

ii. Σημεία ολικού μεγίστου:  $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}), (\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}).$  Σημεία ολικού ελαχίστου:  $(\pm 1, 0), (0, \pm 1).$

iii. Σημείο ολικού μεγίστου:  $(1, 0).$  Σημείο ολικού ελαχίστου:  $(0, 1).$

iv. Κανένα.

v. Σημεία ολικού ελαχίστου:  $(1, 1, 1), (1, -1, -1), (-1, 1, -1), (-1, -1, 1).$

vi. Κανένα.

**Δέκατο φυλλάδιο, άσκηση 6.**

i. Μέγιστη τιμή: 3. Ελάχιστη τιμή: 0.

iii. Μέγιστη τιμή:  $\frac{1}{3\sqrt{3}}.$  Ελάχιστη τιμή:  $-\frac{1}{3\sqrt{3}}.$

iv. Μέγιστη τιμή: 1. Ελάχιστη τιμή: -1.

v. Ελάχιστη τιμή: 1.

**Δέκατο φυλλάδιο, άσκηση 7.**

$(\frac{157}{77}, -\frac{2}{77}, -\frac{69}{77}).$

**Δέκατο φυλλάδιο, άσκηση 8.**

$(\frac{\sqrt{41}}{6}, -\frac{\sqrt{41}}{6}, \frac{1}{6}), (-\frac{\sqrt{41}}{6}, \frac{\sqrt{41}}{6}, \frac{1}{6}).$

**Ενδέκατο φυλλάδιο, άσκηση 1.**

i. Μέγιστη τιμή:  $\sqrt{5}.$  Ελάχιστη τιμή:  $-\sqrt{5}.$

ii. Μέγιστη τιμή:  $1 + \sqrt{2}$ . Ελάχιστη τιμή:  $1 - \sqrt{2}$ .

**Ενδέκατο φυλλάδιο, άσκηση 2.**

$$\frac{df_1}{dx} = \frac{-xf_1(x) - 2xf_2(x)}{f_1(x)^2 + f_2(x)^2}, \quad \frac{df_2}{dx} = \frac{-2xf_1(x) + xf_2(x)}{f_1(x)^2 + f_2(x)^2}.$$

**Ενδέκατο φυλλάδιο, άσκηση 3.**

$$\frac{df_1}{dx} = \frac{\sin(f_2(x)) \sin(xf_2(x)) - f_2(x) \cos(f_2(x)) \sin(xf_2(x))}{\sin(f_1(x)) \sin(xf_2(x)) + \cos(f_1(x)) \cos(f_2(x))},$$

$$\frac{df_2}{dx} = \frac{-f_2(x) \sin(f_1(x)) \sin(xf_2(x)) - \cos(f_1(x)) \sin(f_2(x))}{x \sin(f_1(x)) \sin(xf_2(x)) + x \cos(f_1(x)) \cos(f_2(x))}.$$

**Ενδέκατο φυλλάδιο, άσκηση 4.**

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{-13x^4 f_1(x,y) f_2(x,y)^3}{6y^3 f_1(x,y) f_2(x,y) + 6x^4 y - 2x^5 f_2(x,y)^3}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{-2y^3 f_1(x,y) f_2(x,y)^2 - 15x^4 y f_2(x,y) + 5x^5 f_2(x,y)^4}{6xy^3 f_1(x,y) f_2(x,y) + 6x^5 y - 2x^6 f_2(x,y)^3},$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{9y^2 f_1(x,y)^2 f_2(x,y) + 3x^4 f_1(x,y)}{-3y^3 f_1(x,y) f_2(x,y) - 3x^4 y + x^5 f_2(x,y)^3}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{6y^3 f_1(x,y) - 3xy^2 f_1(x,y) f_2(x,y)^3}{-3xy^3 f_1(x,y) f_2(x,y)^2 - 3x^5 y f_2(x,y) + x^6 f_2(x,y)^4}.$$

**Ενδέκατο φυλλάδιο, άσκηση 5.**

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 6f_2(x, y, z) - 3, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = -3, \quad \frac{\partial f_3}{\partial x} = 6f_1(x, y, z) - 12f_1(x, y, z)f_2(x, y, z) - 1,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = 6f_2(x, y, z) - 2, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = -3, \quad \frac{\partial f_3}{\partial y} = 4f_1(x, y, z) - 12f_1(x, y, z)f_2(x, y, z),$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial z} = -2z, \quad \frac{\partial f_2}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial f_3}{\partial z} = 4zf_1(x, y, z) - 1.$$

**Ενδέκατο φυλλάδιο, άσκηση 6.**

i.  $ad - bc$ .

ii.  $\frac{1}{x^2 + y^2}$ .

iii.  $e^{2x}$ .

iv.  $4(x^2 + y^2)$ .

**Ενδέκατο φυλλάδιο, άσκηση 7.**

$$\frac{1}{(x^2 + y^2)^2} e^{\frac{2x}{x^2 + y^2}}.$$

**Δωδέκατο φυλλάδιο, άσκηση 1.**

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{x}{2(x^2 + y^2)}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{y}{2(x^2 + y^2)}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{y}{2(x^2 + y^2)}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{x}{2(x^2 + y^2)}.$$

**Δωδέκατο φυλλάδιο, άσκηση 2.**

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{(1+x)(1+6z)}{\Delta}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{-xz(1+6z)}{\Delta}, \quad \frac{\partial x}{\partial w} = \frac{-xy(1+x)}{\Delta},$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{-y(1+6z)}{\Delta}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{(1+yz)(1+6z) - 2xy}{\Delta}, \quad \frac{\partial y}{\partial w} = \frac{xy^2}{\Delta},$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{-2(1+x)}{\Delta}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{2xz}{\Delta}, \quad \frac{\partial z}{\partial w} = \frac{(1+x)(1+yz) - xyz}{\Delta},$$

όπου

$$\Delta = 1 + x + 6z - 2xy + 6xz + yz - 2x^2y + 6yz^2.$$