

Απειροστικός Λογισμός II, εαρινό εξάμηνο 2019-20.

Πρώτο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων. Επίσης, για καθεμία από αυτές περιγράψτε γεωμετρικά την επιφάνεια/γράφημά της, τις ισοσταθμικές καμπύλες της και τις τομές της με τα επίπεδα που είναι παράλληλα στο yz -επίπεδο και στο xz -επίπεδο.

- i. $f(x, y) = x - y + 2$.
- ii. $f(x, y) = x^2 + 2y^2$.
- iii. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- iv. $f(x, y) = x^2 - y^2$.
- v. $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$.
- vi. $f(x, y) = xy$.
- vii. $f(x, y) = x/y$.
- viii. $f(x, y) = 1/(x^2 + y^2)$.
- ix. $f(x, y) = x^3 - y$.
- x. $f(x, y) = y - 2 \log x$.
- xi. $f(x, y) = x^2 + xy$.
- xii. $f(x, y) = |y|$.
- xiii. $f(x, y) = |x| + |y|$.
- xiv. $f(x, y) = \max\{|x|, |y|\}$.
- xv. $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$.
- xvi. $f(x, y) = \log(x/y)$.

2. Βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων. Επίσης, για καθεμία από αυτές περιγράψτε γεωμετρικά τις ισοσταθμικές επιφάνειές της.

- i. $f(x, y, z) = x - y + 3z$.
- ii. $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 4z^2$.
- iii. $f(x, y, z) = 3 - x^2 - y^2 - z^2$.
- iv. $f(x, y, z) = x^2 + y^2$.
- v. $f(x, y, z) = 1/(x^2 + y^2 + z^2)$.
- vi. $f(x, y, z) = 1/(x^2 + y^2)$.
- vii. $f(x, y, z) = |x| + |y| + |z|$.
- viii. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
- ix. $f(x, y, z) = 1 - x^2 - y^2$.
- x. $f(x, y, z) = 1/(xyz)$.
- xi. $f(x, y, z) = \max\{|x|, |y|, |z|\}$.

3. Βρείτε τα παρακάτω όρια αν υπάρχουν. Αν κάποιο όριο δεν υπάρχει, δικαιολογήστε. Αρχίστε αφού προσδιορίσετε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων.

- i. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^y - y + 2)$.
- ii. $\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,3)} e^x y^2$.
- iii. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} e^x$.

- iv. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{xy}$.
- v. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{x}$.
- vi. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$.
- vii. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{xy} - 1}{y}$.
- viii. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(xy)}{x^2 y^2}$.
- ix. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2 + 1}$.
- x. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x-y)^2}{x^2 + y^2}$.
- xi. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{x^2 + y^6}$.
- xii. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\cos x - 1 + x^2/2}{x^4 + y^4}$.
- xiii. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x - \sin x + y}{x^3 + 6y}$.
- xiv. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2)^{1/2} \log(x^2 + y^2)$.
- xv. $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (-1,2,2)} \frac{x^2 yz}{x^2 - y}$.
- xvi. $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{\sin(x+y+z)}{x+y+z}$.
- xvii. $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^2 + y^2 - z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$.
- xviii. $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{(x^2 + y^2)z}{x^4 + y^4 + z^2}$.

4. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$, και $\mathbf{f}, \mathbf{g} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$. Αν υπάρχουν τα όρια $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{g}(\mathbf{x})$ στον \mathbb{R}^m , αποδείξτε ότι υπάρχει και το όριο $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x})$ στο \mathbb{R} , και

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{g}(\mathbf{x}).$$

(Το \cdot σημαίνει εσωτερικό γινόμενο.)

5. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$, και $\mathbf{f}, \mathbf{g} : A \rightarrow \mathbb{R}^3$. Αν υπάρχουν τα όρια $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{g}(\mathbf{x})$ στον \mathbb{R}^3 , αποδείξτε ότι υπάρχει και το όριο $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \times \mathbf{g}(\mathbf{x})$ στον \mathbb{R}^3 , και

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \times \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \times \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{g}(\mathbf{x}).$$

(Το \times σημαίνει εξωτερικό γινόμενο.)