Απειροστικός Λογισμός ΙΙ, εαρινό εξάμηνο 2019-20.

Δέκατο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Για καθεμία από τις παρακάτω καμπύλες βρείτε ένα κάθετο διάνυσμα σ' αυτήν στο αντίστοιχο σημείο και γράψτε την καρτεσιανή εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στην καμπύλη στο ίδιο σημείο.

   i. $3x + 2y = 5$, $(1, 1)$.
   ii. $x^2 + y^2 = 16$, $(4, 0)$.
   iii. $(x/2)^2 + (y/3)^2 = 1$, $(\sqrt{2}, -3/\sqrt{2})$.
   iv. $y = x^3$, $(2, 8)$.
   v. $x = y^2$, $(1, -1)$.
   vi. $x^2 - y^3 = 4$, $(2, 0)$.

2. Για καθεμία από τις παρακάτω επιφάνειες βρείτε ένα κάθετο διάνυσμα σ' αυτήν στο αντίστοιχο σημείο και γράψτε την καρτεσιανή εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στην επιφάνεια στο ίδιο σημείο.

   i. $3x + 2y - 5z = -10$, $(1, 1, 3)$.
   ii. $x^2 + y^2 + z^2 = 6$, $(1, 1, 2)$.
   iii. $(x/2)^2 + (y/3)^2 + (z/2)^2 = 1$, $(2, 0, 0)$.
   iv. $z = x^3 + y^2$, $(1, 1, 2)$.
   v. $x^2 + y^2 - z^2 = -2$, $(1, -1, 2)$.
   vi. $xyz = 4$, $(1, 2, 2)$.

3. Βρείτε τα δύο σημεία του υπερβολοειδούς με καρτεσιανή εξίσωση

$$x^2 + 4y^2 - z^2 = 4$$

   σε καθένα από τα οποία το εφαπτόμενο επίπεδο στο υπερβολοειδές είναι παράλληλο στο επίπεδο με καρτεσιανή εξίσωση $2x + 2y + z = 5$.

4. Βρείτε τα σημεία της καμπύλης με καρτεσιανή εξίσωση

$$x^3 - 2y^2 = 4$$

   σε καθένα από τα οποία η εφαπτόμενη ευθεία στην καμπύλη είναι παράλληλη στην ευθεία με καρτεσιανή εξίσωση $3x + 4y = 2$.

5. Χρησιμοποιώντας την μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange βρείτε τα τοπικά ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων με τους αντίστοιχους περιορισμούς. Υπάρχουν ολικά ακρότατα;

   i. $f(x, y) = 3x + 2y$ όταν $2x^2 + 3y^2 = 3$.
   ii. $f(x, y) = \cos(x^2 - y^2)$ όταν $x^2 + y^2 = 1$.
   iii. $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ όταν $x + y = 1$.
   iv. $f(x, y) = x - y$ όταν $x^2 - y^2 = 4$.
   v. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ όταν $xyz = 1$.
   vi. $f(x, y, z) = xy + yz$ όταν $xz = 1$.

6. Χρησιμοποιώντας και την μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή (αν υπάρχουν) των παρακάτω συναρτήσεων.

   i. $f(x, y) = x^2 + 3y^2$ στο $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.
   ii. $f(x, y) = x^2 + 4xy + y^2$ στο $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.
   iii. $f(x, y, z) = xyz$ στο $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.
   iv. $f(x, y, z) = x + yz$ στο $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.
   v. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ στο $\{(x, y, z) \mid z \geq x^2 + y^2 + 1\}$.
   vi. $f(x, y) = xy(1 - x^2 - y^2)$ στο τετράγωνο $\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. (Οι κορυφές του τετραγώνου χρειάζονται ειδική μεταχείριση.)
   vii. $f(x, y) = 1 + xy - 2x + y$ στο τρίγωνο με κορυφές $(-2, 1)$, $(-2, 5)$, $(2, 1)$. (Οι κορυφές του τριγώνου χρειάζονται ειδική μεταχείριση.)

7. Βρείτε το σημείο του επιπέδου με καρτεσιανή εξίσωση $3x - 2y + 8z + 1 = 0$ το οποίο βρίσκεται κοντύτερα στο σημείο $(2, 0, -1)$.

8. Βρείτε το σημείο της επιφάνειας με καρτεσιανή εξίσωση $z = 6xy + 7$ το οποίο βρίσκεται κοντύτερα στο σημείο $(0, 0, 0)$.

9. Αποδείξτε ότι ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με δεδομένο όγκο έχει ελάχιστο εμβαδό επιφανείας όταν είναι κύβος.

10. Ποιά τρίγωνα έχουν μέγιστο το γινόμενο των ημιτόνων των γωνιών τους;

11. Πότε n θετικοί αριθμοί με δεδομένο άθροισμα έχουν μέγιστο γινόμενο; Βάσει της απάντησής σας αποδείξτε την ανισότητα Αριθμητικού-Γεωμετρικού Μέσου του Cauchy:

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \tfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \quad \text{για κάθε } x_1, \ldots, x_n > 0.$$

    Πότε αυτή η ανισότητα γίνεται ισότητα;