Απειροστικός Λογισμός ΙΙ, εαρινό εξάμηνο 2019-20.

Ενδέκατο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Χρησιμοποιώντας την μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή (αν υπάρχουν) των παρακάτω συναρτήσεων.

   i. $h(x,y,z) = x + y + z$ όταν $x^2 + y^2 = 1$ και $x^2 + z^2 = 1$.

   ii. $h(x,y,z) = x + y + z$ στο $\{(x,y,z) \,|\, x^2 + y^2 = 2, x + z = 1\}$.

2. Αποδείξτε (βάσει του θεωρήματος πεπλεγμένης συνάρτησης) ότι το παρακάτω σύστημα δύο εξισώσεων μπορεί να λυθεί ως προς τα u, v ως συναρτήσεις $u = f_1(x)$, $v = f_2(x)$ με συνεχείς παραγώγους πρώτης τάξης σε κάποια περιοχή του 2 και έτσι ώστε να είναι $f_1(2) = -1$, $f_2(2) = 3$. Βρείτε τύπο για τις παραγώγους $\frac{df_1}{dx}$, $\frac{df_2}{dx}$ κοντά στο 2 συναρτήσει των $x, f_1(x), f_2(x)$.

$$x^2 + uv = 1$$
$$x^2 + u^2 - v^2 = -4$$

3. Αποδείξτε ότι το παρακάτω σύστημα δύο εξισώσεων μπορεί να λυθεί ως προς τα u, v ως συναρτήσεις $u = f_1(x)$, $v = f_2(x)$ με συνεχείς παραγώγους πρώτης τάξης σε κάποια περιοχή του 1 και έτσι ώστε να είναι $f_1(1) = \pi$, $f_2(1) = 2\pi$. Βρείτε τύπο για τις παραγώγους $\frac{df_1}{dx}$, $\frac{df_2}{dx}$ κοντά στο 1 συναρτήσει των $x, f_1(x), f_2(x)$.

$$\cos u + x \sin v = -1$$
$$\sin u - \cos(xv) = -1$$

4. Αποδείξτε ότι το παρακάτω σύστημα δύο εξισώσεων μπορεί να λυθεί ως προς τα u, v ως συναρτήσεις $u = f_1(x,y)$, $v = f_2(x,y)$ με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης σε κάποια περιοχή του $(1,1)$ και έτσι ώστε να είναι $f_1(1,1) = 1$, $f_2(1,1) = 1$. Βρείτε τύπο για τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης των f_1, f_2 κοντά στο $(1,1)$ συναρτήσει των $x, y, f_1(x,y), f_2(x,y)$.

$$x^5 v^2 + 2y^3 u = 3$$
$$3yu - xuv^3 = 2$$

5. Αποδείξτε ότι το παρακάτω σύστημα τριών εξισώσεων μπορεί να λυθεί ως προς u, v, w ως συναρτήσεις $u = f_1(x,y,z)$, $v = f_2(x,y,z)$, $w = f_3(x,y,z)$ με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης σε κάποια περιοχή του $(0,0,0)$ και έτσι ώστε να είναι $f_1(0,0,0) = 0$, $f_2(0,0,0) = 0$, $f_3(0,0,0) = -2$. Βρείτε τύπο για τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης των f_1, f_2, f_3 κοντά στο $(0,0,0)$ συναρτήσει των $x, y, z, f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z)$.

$$3x + 2y + z^2 + u + v^2 = 0$$
$$4x + 3y + z + u^2 + v + w + 2 = 0$$
$$x + z + w + u^2 + 2 = 0$$

6. Στις παρακάτω περιπτώσεις υπολογίστε τις Ιακωβιανές ορίζουσες $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$.

   i. $u = ax + by$, $v = cx + dy$.

   ii. $u = \log\sqrt{x^2 + y^2}$, $v = \arctan(y/x)$.

   iii. $u = e^x \cos y$, $v = e^x \sin y$.

iv. $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$.

7. Υπολογίστε την Ιακωβιανή ορίζουσα $\frac{\partial(w,z)}{\partial(x,y)}$ όταν $w = e^u \cos v$, $z = e^u \sin v$ και $u = x/(x^2 + y^2)$, $v = -y/(x^2 + y^2)$.
Υπόδειξη. Εφαρμόστε τον κανόνα αλυσίδας και τον γνωστό τύπο για την ορίζουσα γινομένου πινάκων.

8. Αν $w = w(u, v)$, $z = z(u, v)$ και $u = u(x)$, $v = v(y)$, αποδείξτε ότι

$$\frac{\partial(w,z)}{\partial(x,y)} = \frac{du}{dx}\frac{dv}{dy}\frac{\partial(w,z)}{\partial(u,v)}.$$