Απειροστικός Λογισμός ΙΙ, εαρινό εξάμηνο 2019-20.

Δωδέκατο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Τα u, v δίνονται ως συναρτήσεις των x, y με τους τύπους:

$$\begin{aligned} u &= u(x,y) = x^2 - y^2 \\ v &= v(x,y) = 2xy \end{aligned}$$

   Αποδείξτε βάσει του θεωρήματος αντίστροφης συνάρτησης ότι τα x, y μπορούν να εκφραστούν ως συναρτήσεις $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης σε κάποια περιοχή του $(-1,0)$ και έτσι ώστε να είναι $x(-1,0) = 0$, $y(-1,0) = 1$. Βρείτε τύπους για τις $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$.

2. Τα u, v, w δίνονται ως συναρτήσεις των x, y, z με τους τύπους:

$$\begin{aligned} u &= u(x,y,z) = x + xyz \\ v &= v(x,y,z) = y + xy \\ w &= w(x,y,z) = 2x + z + 3z^2 \end{aligned}$$

   Αποδείξτε βάσει του θεωρήματος αντίστροφης συνάρτησης ότι τα x, y, z μπορούν να εκφραστούν ως συναρτήσεις $x = x(u,v,w)$, $y = y(u,v,w)$, $z = z(u,v,w)$ με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης σε κάποια περιοχή του $(0,0,0)$ και έτσι ώστε να είναι $x(0,0,0) = 0$, $y(0,0,0) = 0$, $z(0,0,0) = 0$. Βρείτε τύπους για τις $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial x}{\partial w}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial w}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial w}$.

3. Αν $z = z(x,y)$ και $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ και αν $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \neq 0$, αποδείξτε ότι

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial(z,v)}{\partial(x,y)} \Big/ \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial(u,z)}{\partial(x,y)} \Big/ \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}.$$