Απειροστικός Λογισμός ΙΙ, εαρινό εξάμηνο 2019-20.

Δεύτερο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Ποιά είναι τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων; Είναι οι συναρτήσεις συνεχείς στα πεδία ορισμού τους; Αν όχι, σε ποιά σημεία των πεδίων ορισμού τους δεν είναι συνεχείς;

   i. $f(x,y) = e^x y^2$.

   ii. $f(x,y) = \frac{ye^x}{x+y}$.

   iii. $f(x,y) = \frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{xy}$.

   iv. $\mathbf{f}(x,y) = (xy^2, e^{x-y}, y\sin(x+y))$.

   v. $f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{xy(x+y)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

   vi. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{xy}, & xy \neq 0, \\ 1, & xy = 0. \end{cases}$

   vii. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{xy}-1}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

   viii. $\mathbf{f}(x,y) = \big(\frac{e^{x^2+y^2}}{x+y+2}, g(x,y)\big)$, όπου $g(x,y) = \begin{cases} \frac{1-\cos(x+y)}{(x+y)^2}, & x+y \neq 0, \\ 1/2, & x+y = 0. \end{cases}$

   ix. $f(x,y,z) = x^2\sin(yze^{x+z^2})$.

   x. $\mathbf{f}(x,y,z) = (x^3yz, \sin(x+z^2), e^{x\sin(yz)})$.

   xi. $\mathbf{f}(x,y,z) = (\sqrt{x+y+z}, \sin(xyz))$.

   xii. $f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{xy(x+z)}{x^2+y^2+z^2}, & (x,y,z) \neq (0,0,0), \\ 0, & (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$

   xiii. $f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{\sin(x+y+z)}{x+y+z}, & x+y+z \neq 0, \\ 1, & x+y+z = 0. \end{cases}$

   xiv. $f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{(x^2+y^2)z}{x^4+y^4+z^2}, & (x,y,z) \neq (0,0,0), \\ 0, & (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$

2. Βρείτε συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}^2$ εκτός από το σημείο $(0,0)$.

3. Βρείτε συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}^2$ εκτός από τα σημεία $(1,0)$ και $(0,1)$.

4. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$, και $\mathbf{f}, \mathbf{g} : A \to \mathbb{R}^m$. Αν οι $\mathbf{f}, \mathbf{g}$ είναι συνεχείς στο $\mathbf{x}_0$, αποδείξτε ότι η $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0$.
   (Το $\cdot$ σημαίνει εσωτερικό γινόμενο.)

5. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$, και $\mathbf{f}, \mathbf{g} : A \to \mathbb{R}^3$. Αν οι $\mathbf{f}, \mathbf{g}$ είναι συνεχείς στο $\mathbf{x}_0$, αποδείξτε ότι η $\mathbf{f} \times \mathbf{g} : A \to \mathbb{R}^3$ είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0$.
   (Το $\times$ σημαίνει εξωτερικό γινόμενο.)