

Απειροστικός Λογισμός II, εαρινό εξάμηνο 2019-20.

Τρίτο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Βρείτε τις μερικές παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων. (Στις τελευταίες έξι συναρτήσεις χρησιμοποιούνται οι πολικές ή οι σφαιρικές συντεταγμένες, αλλά εσείς πρέπει να παραγωγίσετε ως προς τις καρτεσιανές συντεταγμένες.)

- i. $f(x, y) = x^y - y \sin x$.
- ii. $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{1/2}$.
- iii. $f(x, y, z) = x^2 y^2 z^2$.
- iv. $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$.
- v. $f(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$.
- vi. $f(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1^2 + \dots + a_n x_n^2$.
- vii. $f(x_1, \dots, x_n) = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$.
- viii. $f(x, y) = r \sin \theta$.
- ix. $f(x, y) = r \sin \theta \cos \theta$.
- x. $f(x, y) = \theta$.
- xi. $f(x, y, z) = \rho^2 \sin \theta \cos \theta \sin^2 \phi$.
- xii. $f(x, y, z) = \phi$.
- xiii. $f(x, y, z) = \theta$.

2. Αποδείξτε, βάσει του ορισμού, ότι όλες οι παρακάτω συναρτήσεις, εκτός της πέμπτης, είναι παραγωγίσιμες στα αντίστοιχα σημεία.

- i. $f(x, y) = xy$, στο $(2, -1)$.
- ii. $f(x, y) = x^2 + y^2$, στο $(1, -2)$.
- iii. $f(x, y) = \frac{x}{y}$, στο $(1, 1)$.
- iv. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, στο $(1, -1, 1)$.
- v. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$ στο $(0, 0)$.
- vi. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$ στο $(0, 0)$.
- vii. $f(x, y, z) = \begin{cases} xy \log(x^2 + y^2 + z^2), & (x, y, z) \neq (0, 0, 0), \\ 0, & (x, y, z) = (0, 0, 0), \end{cases}$ στο $(0, 0, 0)$.

3. Αφού αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \quad g(x, y) = x^2 y + 2xy^2 - x^2 - 6xy - 2y^2 + 6x + 7y - 5$$

είναι παραγωγίσιμες στο σημείο $(1, 1)$, αποδείξτε ότι τα γραφήματά τους εφάπτονται στο σημείο $(1, 1, 2)$.

4. (i) Αποδείξτε, βάσει του ορισμού, ότι η συνάρτηση $f(x, y) = 8 - 2x^2 - 3y^2$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $(1, 2)$, και βρείτε την καρτεσιανή εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου l στο γράφημά της στο σημείο $(1, 2, -6)$.
(ii) Αποδείξτε, βάσει του ορισμού, ότι η συνάρτηση $g(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο (x_0, y_0) , και βρείτε σε ποιο σημείο του το γράφημά της έχει εφαπτόμενο επίπεδο παράλληλο στο l .

5. Σχεδιάστε τα παρακάτω σύνολα A και βρείτε τα εσωτερικά και τα συνοριακά σημεία τους. Πείτε αν τα σύνολα αυτά είναι ανοικτά ή όχι.

- i. $A = \{(x, y) \mid 3x + 2y > 1\}$.
- ii. $A = \{(x, y) \mid 3x + 2y \geq 1\}$.
- iii. $A = \{(x, y) \mid -1 < x < 1, -1 < y < 1\}$.
- iv. $A = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$.
- v. $A = \{(x, y) \mid -1 < x < 1, -1 \leq y \leq 1\}$.
- vi. $A = \{(x, y) \mid 2 < x^2 + y^2 < 4\}$.
- vii. $A = \{(x, y) \mid 2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.
- viii. $A = \{(x, y) \mid 2 < x^2 + y^2 \leq 4\}$.
- ix. $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 0\}$.
- x. $A = \{(x, y) \mid xy > 0\}$.
- xi. $A = \{(x, y, z) \mid x + 2y + z < 1\}$.
- xii. $A = \{(x, y, z) \mid x + 2y + z \leq 1\}$.
- xiii. $A = \{(x, y, z) \mid -1 < x < 1, -1 < y < 1, -1 < z < 1\}$.
- xiv. $A = \{(x, y, z) \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1\}$.
- xv. $A = \{(x, y, z) \mid 2 < x^2 + y^2 + z^2 < 4\}$.
- xvi. $A = \{(x, y, z) \mid 2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$.
- xvii. $A = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 > 0\}$.
- xviii. $A = \{(x, y, z) \mid xyz > 0\}$.