Απειροστικός Λογισμός ΙΙ, εαρινό εξάμηνο 2019-20.

Ένατο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Στις παρακάτω περιπτώσεις εξετάστε, βάσει του θεωρήματος πεπλεγμένης συνάρτησης, αν η αντίστοιχη εξίσωση μπορεί να λυθεί ως προς το y ως συνάρτηση $y = f(x)$ με συνεχή πρώτη παράγωγο σε κάποιο ανοικτό διάστημα το οποίο περιέχει το x_0 και έτσι ώστε να είναι $y_0 = f(x_0)$. Αν γίνεται, εξετάστε το ίδιο ερώτημα και με στοιχειώδεις μεθόδους (π.χ. βρίσκοντας τον ακριβή τύπο της $y = f(x)$ και το μέγιστο διάστημα στο οποίο αυτή είναι ορισμένη). Στην περίπτωση κατά την οποία υπάρχει λύση, βρείτε τύπο για την παράγωγο $\frac{df}{dx}$ της λύσης κοντά στο x_0 συναρτήσει των $x, f(x)$.

   i. $x^2 - y^2 = 0$ με $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.
   ii. $x^2 + y^2 = y$ με $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.
   iii. $x^5 + y^5 = 3 - xy$ με $x_0 = 1$, $y_0 = 1$.
   iv. $xy + \log(xy) = 1$ με $x_0 = 1$, $y_0 = 1$.
   v. $\sin(x + y) = 1$ με $x_0 = \pi/4$, $y_0 = \pi/4$.

2. Αποδείξτε, βάσει του θεωρήματος πεπλεγμένης συνάρτησης, ότι οι παρακάτω εξισώσεις μπορούν να λυθούν ως προς το z ως συνάρτηση $z = f(x, y)$ με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης σε κάποιο ανοικτό ορθογώνιο το οποίο περιέχει το (x_0, y_0) και έτσι ώστε να είναι $z_0 = f(x_0, y_0)$. Βρείτε τύπο για τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ της λύσης κοντά στο (x_0, y_0) συναρτήσει των $x, y, f(x, y)$. Αν γίνεται, βρείτε τον ακριβή τύπο της $z = f(x, y)$ και το μέγιστο σύνολο στο οποίο αυτή είναι ορισμένη.

   i. $xy\log(x^3 - z) = x + y$ με $(x_0, y_0) = (1, -1)$, $z_0 = 0$.
   ii. $x + y + z = \sin(xyz)$ με $(x_0, y_0) = (1, 0)$, $z_0 = -1$.
   iii. $xye^{xz+yz} = -z^3$ με $(x_0, y_0) = (-1, 1)$, $z_0 = 1$.