Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ, χειμερινό εξάμηνο 2016-17.

Δέκατο φυλλάδιο ασκήσεων.

Οι ασκήσεις με (*) λύθηκαν στο δίωρο των ασκήσεων.

1. (*) Επαληθεύστε τον τύπο του Stokes για την συνάρτηση $\mathbf{f}(x,y,z)=(y^2,-x^2,z^2)$ στην επιφάνεια που ορίζεται από τις σχέσεις $x^2+y^2\leq 1$ και $x+y+z=3$.

2. Επαληθεύστε τον τύπο του Stokes για την συνάρτηση $\mathbf{f}(x,y,z)=(-y,x,z)$ στην επιφάνεια που ορίζεται από τις σχέσεις $x^2+y^2+z^2=1$ και $z\leq 0$.

3. Επαληθεύστε τον τύπο του Stokes για την συνάρτηση $\mathbf{f}(x,y,z)=(y,z,x)$ στην τετράπλευρη επιφάνεια που βρίσκεται στο επίπεδο με εξίσωση $2x+3y+z=5$ και έχει κορυφές τα σημεία $(-1,1,4)$, $(2,1,-2)$, $(2,3,-8)$ και $(-1,3,2)$.

4. (*) Υπολογίστε το $\oint_{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{f}\cdot d\boldsymbol{\sigma}$ για την συνάρτηση $\mathbf{f}(x,y,z)=(yz,xz,xy)$ όταν η $\boldsymbol{\sigma}$ είναι η κλειστή συνοριακή καμπύλη μιας επιφάνειας $\boldsymbol{\Sigma}$.

5. Υπολογίστε το $\oint_{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{f}\cdot d\boldsymbol{\sigma}$ για την συνάρτηση $\mathbf{f}(x,y,z)=(ye^z,xe^z,xye^z)$ όταν η $\boldsymbol{\sigma}$ είναι η κλειστή συνοριακή καμπύλη μιας επιφάνειας $\boldsymbol{\Sigma}$.

6. (*) Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Stokes, υπολογίστε το $\iint_{\boldsymbol{\Sigma}}(\nabla\times\mathbf{f})\cdot\mathbf{N}\,dA$ για την συνάρτηση $\mathbf{f}(x,y,z)=(x^3,-y^3,0)$ όταν η $\boldsymbol{\Sigma}$ είναι το ημισφαίριο που ορίζεται από τις σχέσεις $x^2+y^2+z^2=1$ και $x\geq 0$.

7. Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Stokes, υπολογίστε το $\iint_{\boldsymbol{\Sigma}}(\nabla\times\mathbf{f})\cdot\mathbf{N}\,dA$ για την συνάρτηση $\mathbf{f}(x,y,z)=(x^3,-z^3,0)$ όταν η $\boldsymbol{\Sigma}$ είναι το ημισφαίριο που ορίζεται από τις σχέσεις $x^2+y^2+z^2=1$ και $x\geq 0$ και τα διανύσματα $\mathbf{N}$ κατευθύνονται προς το σημείο $(0,0,0)$.

8. Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Stokes, υπολογίστε το $\iint_{\boldsymbol{\Sigma}}(\nabla\times\mathbf{f})\cdot d\boldsymbol{\Sigma}$ για την συνάρτηση $\mathbf{f}(x,y,z)=(y,-x,x^3y^2z)$ όταν η $\boldsymbol{\Sigma}$ είναι η επιφάνεια που ορίζεται από τις σχέσεις $x^2+y^2+3z^2=1$ και $z\leq 0$ και τα κάθετα διανύσματά της έχουν κατεύθυνση προς τα πάνω.

9. Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Stokes, υπολογίστε το $\iint_{\boldsymbol{\Sigma}}(\nabla\times\mathbf{f})\cdot\mathbf{N}\,dA$ για την συνάρτηση $\mathbf{f}(x,y,z)=(-y+xz+yz^2,x+xyz^3,x^2z^4)$ όταν η $\boldsymbol{\Sigma}$ είναι η ένωση της επιφάνειας που ορίζεται από τις σχέσεις $x^2+y^2=1$ και $0\leq z\leq 1$ και της επιφάνειας που ορίζεται από τις $x^2+y^2+(z-1)^2=1$ και $z\geq 1$ και τα κάθετα διανύσματα της $\boldsymbol{\Sigma}$ κατευθύνονται προς τον z-άξονα.

10. Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Stokes, υπολογίστε το $\int_{\boldsymbol{\sigma}}(-y^3\,dx+x^3\,dy-z^3\,dz)$ όταν η $\boldsymbol{\sigma}$ είναι η καμπύλη που ορίζεται από τις σχέσεις $x^2+y^2=1$ και $x+y+z=1$.

11. Αποδείξτε ότι $\iint_{\boldsymbol{\Sigma}}(\nabla\times\mathbf{f})\cdot d\boldsymbol{\Sigma}=0$ για την συνάρτηση $\mathbf{f}(x,y,z)=(1,1,1)\times\mathbf{g}(x,y,z)$ όταν η $\boldsymbol{\Sigma}$ είναι η επιφάνεια που ορίζεται από τις σχέσεις $x^2+y^2+z^2=1$ και $x+y+z\geq 1$.

12. Έστω $\boldsymbol{\Sigma}_1$ και $\boldsymbol{\Sigma}_2$ δύο επιφάνειες με την ίδια κλειστή συνοριακή καμπύλη $\boldsymbol{\sigma}$. Περιγράψτε την σχέση ανάμεσα στους προσανατολισμούς των δύο επιφανειών ώστε να ισχύει $\iint_{\boldsymbol{\Sigma}_1}(\nabla\times\mathbf{f})\cdot\mathbf{N}\,dA=\iint_{\boldsymbol{\Sigma}_2}(\nabla\times\mathbf{f})\cdot\mathbf{N}\,dA$ για κάθε $\mathbf{f}$.

13. Αν $\boldsymbol{\Sigma}$ είναι μια επιφάνεια και $\boldsymbol{\sigma}$ είναι η κλειστή συνοριακή της καμπύλη με την θετική φορά διαγραφής σε σχέση με την $\boldsymbol{\Sigma}$, αποδείξτε ότι $2\iint_{\boldsymbol{\Sigma}}\mathbf{v}\cdot\mathbf{N}\,dA=\oint_{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{v}\times\mathbf{f})\cdot\mathbf{T}\,dS$, όπου $\mathbf{f}(x,y,z)=(x,y,z)$ και $\mathbf{v}$ είναι ένα σταθερό διάνυσμα.

14. Αν $\boldsymbol{\Sigma}$ είναι μια επιφάνεια και $\boldsymbol{\sigma}$ είναι η κλειστή συνοριακή της καμπύλη με την θετική φορά διαγραφής σε σχέση με την $\boldsymbol{\Sigma}$, αποδείξτε ότι

$$\oint_{\boldsymbol{\sigma}}(f\,\nabla g)\cdot\mathbf{T}\,dS=\iint_{\boldsymbol{\Sigma}}(\nabla f\times\nabla g)\cdot\mathbf{N}\,dA,\qquad \oint_{\boldsymbol{\sigma}}(f\,\nabla g+g\,\nabla f)\cdot\mathbf{T}\,dS=0.$$

Απαντήσεις.

1. $0 = 0$.
2. $\pm 2\pi = \pm 2\pi$, ανάλογα με τους προσανατολισμούς.
3. $\pm 36 = \pm 36$, ανάλογα με τους προσανατολισμούς.
4. 0.
5. 0.
6. 0.
7. $-3\pi/4$.
8. -2π.
9. -2π.
10. $\pm 3\pi/2$, ανάλογα με τον προσανατολισμό της $\boldsymbol{\sigma}$.