Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ, χειμερινό εξάμηνο 2016-17.

Ενδέκατο φυλλάδιο ασκήσεων.

Οι ασκήσεις με (*) λύθηκαν στο δίωρο των ασκήσεων.

1. Επαληθεύστε τον τύπο του Gauss για τον κύβο $\Omega = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ και την $\mathbf{f}(x,y,z) = (x,y,z)$.

2. Επαληθεύστε τον τύπο του Gauss για την μοναδιαία μπάλα με κέντρο το $(0,0,0)$ και την $\mathbf{f}(x,y,z) = (-y,x,z)$.

3. (*) Μέσω του τύπου του Gauss, υπολογίστε το $\oiint_{\mathbf{\Sigma}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{N}\, dA$, όπου $\mathbf{\Sigma}$ είναι η μοναδιαία σφαίρα με κέντρο το $(0,0,0)$ και $\mathbf{f}(x,y,z) = (2x, y^2, z^2)$ και τα κάθετα διανύσματα $\mathbf{N}$ απομακρύνονται από το κέντρο της σφαίρας.

4. (*) Μέσω του τύπου του Gauss, υπολογίστε το $\oiint_{\mathbf{\Sigma}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{N}\, dA$, όπου $\mathbf{\Sigma}$ είναι η κλειστή συνοριακή επιφάνεια του χωρίου που ορίζεται από τις $x^2 + y^2 \leq 1$ και $-1 \leq z \leq 1$ και $\mathbf{f}(x,y,z) = (xy^2, x^2y, y)$ και τα κάθετα διανύσματα $\mathbf{N}$ κατευθύνονται προς το εξωτερικό του χωρίου.

5. (*) Μέσω του τύπου του Gauss, υπολογίστε το $\oiint_{\mathbf{\Sigma}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{N}\, dA$, όπου $\mathbf{\Sigma}$ είναι η κλειστή συνοριακή επιφάνεια του χωρίου που ορίζεται από τις $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$ και $x \geq 0$ και $\mathbf{f}(x,y,z) = (y, z, xz)$ και τα κάθετα διανύσματα $\mathbf{N}$ κατευθύνονται προς το εσωτερικό του χωρίου.

6. (*) Μέσω του τύπου του Gauss, υπολογίστε το $\iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{f}\, dV$, όπου Ω είναι η μοναδιαία μπάλα με κέντρο το $(0,0,0)$ και $\mathbf{f}(x,y,z) = (y(x^2+y^2+z^2)^2, -x(x^2+y^2+z^2)^2, 1-(x^2+y^2+z^2)^3)$.

7. Μέσω του τύπου του Gauss, υπολογίστε το $\oiint_{\mathbf{\Sigma}} (x^2 + y + z)\, dA$, όπου $\mathbf{\Sigma}$ είναι η μοναδιαία σφαίρα με κέντρο το $(0,0,0)$.

8. Μέσω του τύπου του Gauss, υπολογίστε το $\oiint_{\mathbf{\Sigma}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{N}\, dA$, όπου $\mathbf{\Sigma}$ είναι η κλειστή συνοριακή επιφάνεια του κύβου $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ και $\mathbf{f}(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$ και τα κάθετα διανύσματα $\mathbf{N}$ κατευθύνονται προς το εξωτερικό του κύβου.

9. Μέσω του τύπου του Gauss, υπολογίστε το $\oiint_{\mathbf{\Sigma}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{N}\, dA$, όπου $\mathbf{\Sigma}$ είναι η κλειστή συνοριακή επιφάνεια της πυραμίδας με κορυφές τα $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ και $(1,1,0)$ και $\mathbf{f}(x,y,z) = (x^2y, 3y^2z, 9xz^2)$ και τα κάθετα διανύσματα $\mathbf{N}$ κατευθύνονται προς το εσωτερικό της πυραμίδας.

10. Μέσω του τύπου του Gauss, υπολογίστε το $\oiint_{\mathbf{\Sigma}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{N}\, dA$, όπου $\mathbf{\Sigma}$ είναι η κλειστή συνοριακή επιφάνεια του φραγμένου χωρίου που ορίζεται από τις επιφάνειες με εξισώσεις $x = y^2$, $x = 9$, $z = 0$ και $x = z$ και $\mathbf{f}(x,y,z) = (3x - 5y, 4z - 2y, 8yz)$ και τα κάθετα διανύσματα $\mathbf{N}$ κατευθύνονται προς το εξωτερικό του χωρίου.

11. Με τις κατάλληλες υποθέσεις, αποδείξτε ότι

$$\iiint_{\Omega} (\nabla\phi) \cdot \mathbf{f}\, dV = \oiint_{\mathbf{\Sigma}} \phi\, \mathbf{f} \cdot \mathbf{N}\, dA - \iiint_{\Omega} \phi\, \nabla \cdot \mathbf{f}\, dV.$$

12. Με τις κατάλληλες υποθέσεις, αποδείξτε τις **ταυτότητες του Green**:

$$\oiint_{\mathbf{\Sigma}} \phi\, \nabla\psi \cdot \mathbf{N}\, dA = \iiint_{\Omega} (\phi\, \Delta\psi + \nabla\phi \cdot \nabla\psi)\, dV.$$

$$\oiint_{\mathbf{\Sigma}} (\phi\, \nabla\psi - \psi\, \nabla\phi) \cdot \mathbf{N}\, dA = \iiint_{\Omega} (\phi\, \Delta\psi - \psi\Delta\phi)\, dV.$$

Απαντήσεις.

1. $3 = 3$.
2. $4\pi/3 = 4\pi/3$.
3. $8\pi/3$.
4. π.
5. $-4/15$.
6. 0.
7. $4\pi/3$.
8. 3.
9. -1.1.
10. $-100959/35$.