

Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ, χειμερινό εξάμηνο 2016-17.

Δωδέκατο φυλλάδιο ασκήσεων.

Οι ασκήσεις με (*) λύθηκαν στο δίωρο των ασκήσεων.

- (*) Δείτε αν το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{f}(x, y) = (x^2 + y^2, 2xy)$ είναι συντηρητικό και, αν ναι, βρείτε ένα πεδίο δυναμικού ϕ για το \mathbf{f} .
- (*) Δείτε αν το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{f}(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ είναι συντηρητικό και, αν ναι, βρείτε ένα πεδίο δυναμικού ϕ για το \mathbf{f} .
- (*) Δείτε αν το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{f}(x, y, z) = (y, z \cos(yz) + x, y \cos(yz))$ είναι συντηρητικό και, αν ναι, βρείτε ένα πεδίο δυναμικού ϕ για το \mathbf{f} .
- (*) Δείτε αν το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{f}(x, y, z) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$ είναι συντηρητικό και, αν ναι, βρείτε ένα πεδίο δυναμικού ϕ για το \mathbf{f} .
- Δείτε ποιά από τα παρακάτω διανυσματικά πεδία είναι συντηρητικά και, ανάλογα, βρείτε αντίστοιχα πεδία δυναμικού.
 - $\mathbf{f}(x, y) = (x, y)$.
 - $\mathbf{f}(x, y) = (xy, xy)$.
 - $\mathbf{f}(x, y) = (\cos(xy) - xy \sin(xy), -x^2 \sin(xy))$.
 - $\mathbf{f}(x, y) = (x \sqrt{x^2 y^2 + 1}, y \sqrt{x^2 y^2 + 1})$.
 - $\mathbf{f}(x, y) = (2x \cos y + \cos y, -x^2 \sin y - x \sin y)$.
- Δείτε ποιά από τα παρακάτω διανυσματικά πεδία είναι συντηρητικά και, ανάλογα, βρείτε αντίστοιχα πεδία δυναμικού.
 - $\mathbf{f}(x, y, z) = (4xz - x, -4yz, z - 2y)$.
 - $\mathbf{f}(x, y, z) = (e^x \sin y, e^x \cos y, z^2)$.
 - $\mathbf{f}(x, y, z) = (\log(z^2 + 1) + y^2, 2xy, \frac{2xz}{z^2+1})$.
 - $\mathbf{f}(x, y, z) = (x^2 + x \sin z, y \cos z - 2xy, \cos z + \sin z)$.
- Υπολογίστε το $\int_{\sigma} \mathbf{f} \cdot d\sigma$, όπου $\mathbf{f}(x, y, z) = (2xyz + \sin x, x^2 z, x^2 y)$ και σ είναι οποιαδήποτε καμπύλη με αρχικό άκρο το $(0, 0, 0)$ και τελικό άκρο το $(\pi, 0, 1)$. Εξαρτάται το αποτέλεσμα από την καμπύλη;
- Είναι το πεδίο δυνάμεων $\mathbf{f}(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{\|(x, y, z)\|^3}$ συντηρητικό; Αν ναι, βρείτε ένα πεδίο δυναμικού ϕ για το \mathbf{f} . Υπολογίστε το έργο που παράγεται από την δύναμη \mathbf{f} για να μετακινήσει ένα σωματίδιο (i) από το σημείο $(1, 0, 0)$ στο σημείο $(1, 0, 0)$, (ii) από το $(1, 0, 0)$ στο $(0, 0, -1)$, (iii) από το $(1, 0, 0)$ στο $(2, 2, 1)$ και (iv) από το $(1, 0, 0)$ στο άπειρο.
- Είναι το πεδίο δυνάμεων $\mathbf{f}(x, y) = \frac{(x, y)}{\|(x, y)\|^2}$ συντηρητικό; Αν ναι, βρείτε ένα πεδίο δυναμικού ϕ για το \mathbf{f} . Υπολογίστε το έργο που παράγεται από την δύναμη \mathbf{f} για να μετακινήσει ένα σωματίδιο (i) από το σημείο $(1, 0)$ στο σημείο $(1, 0)$, (ii) από το $(1, 0)$ στο $(0, -1)$, (iii) από το $(1, 0)$ στο $(3, 4)$ και (iv) από το $(1, 0)$ στο άπειρο.
- Υποθέτουμε ότι $\nabla \phi(x, y, z) = (2xyze^{x^2}, ze^{x^2}, ye^{x^2})$. Αν $\phi(0, 0, 0) = 5$, βρείτε το $\phi(1, 1, 2)$.
- Έστω καμπύλη σ πάνω στην επιφάνεια με εξίσωση $x^2 + y^2 + z = 2\pi$, με σταθερή κλίση και με άκρα $(\sqrt{2\pi}, 0, 0)$ και $(0, 0, 2\pi)$. Σε κάθε σημείο (x, y, z) της καμπύλης ασκείται δύναμη $\mathbf{f}(x, y, z) = (z^2, 3y^2, 2xz)$. Πόσο έργο παράγει η δύναμη κατά μήκος της καμπύλης;

12. Αποδείξτε ότι δύο οποιαδήποτε πεδία δυναμικού για το ίδιο διανυσματικό πεδίο σε ανοικτό συνεκτικό χωρίο διαφέρουν κατά σταθερά.

Απαντήσεις.

1. Ναι. $\phi(x) = x^3/3 + xy^2 + c$.
2. Όχι.
3. Ναι. $\phi(x) = xy + \sin(yz) + c$.
4. Όχι.
5.
 - i. Ναι. $\phi(x, y) = (x^2 + y^2)/2 + c$.
 - ii. Όχι.
 - iii. Ναι. $\phi(x, y) = x \cos(xy) + c$.
 - iv. Όχι.
 - v. Ναι. $\phi(x, y) = x^2 \cos y + x \cos y + c$.
6.
 - i. Όχι.
 - ii. Ναι. $\phi(x, y, z) = e^x \sin y + z^3/3 + c$.
 - iii. Ναι. $\phi(x, y, z) = x \log(z^2 + 1) + xy^2 + c$.
 - iv. Όχι.
7. 2.
8. Ναι. $\phi(x, y, z) = \frac{1}{\|(x, y, z)\|} + c$. (i) 0, (ii) 0, (iii) $-2/3$, (iv) -1 .
9. Ναι. $\phi(x, y, z) = \log \|(x, y, z)\| + c$. (i) 0, (ii) 0, (iii) $\log 5$, (iv) $+\infty$.
10. $2e + 5$.
11. 0.