

Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ, χειμερινό εξάμηνο 2016-17.

Δέκατο τρίτο φυλλάδιο ασκήσεων.

Οι ασκήσεις με (*) λύθηκαν στα δίωρα των ασκήσεων.

1. (*) Υπολογίστε το $\iint_{\Sigma} z \, dA$ στο κάτω ημισφαίριο της μοναδιαίας σφαίρας κέντρου $(1, 1, 2)$
2. (*) Υπολογίστε το $\iint_{\Sigma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{\Sigma}$ στο μέρος του επιπέδου με εξίσωση $x + y + z = 3$ που βρίσκεται μέσα στον κύλινδρο με εξίσωση $(x - 1)^2 + z^2 = 4$, όταν $\mathbf{f}(x, y, z) = (z, x, y)$.
3. (*) Υπολογίστε το $\iint_{\Sigma} (x \, dy \wedge dz + z \, dz \wedge dx + y \, dx \wedge dy)$ στην επιφάνεια που ορίζεται από τις $y^2 + (z - 2)^2 = 4$, $1 \leq x \leq 3$ και έχει προσανατολισμό τέτοιο ώστε τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα σ' αυτήν να κατευθύνονται μακριά από τον άξονα συμμετρίας της.
4. (*) Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Green, υπολογίστε το $\oint_{\sigma_1} y \, dx + \oint_{\sigma_2} y \, dx + \oint_{\sigma_3} y \, dx$, όπου $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ είναι οι κλειστές συντοκικές καμπύλες του χωρίου στο xy -επίπεδο, το οποίο προκύπτει αν από τον δίσκο κέντρου $(3, 1)$ και ακτίνας 4 αφαιρεθούν οι μοναδιαίοι δίσκοι κέντρων $(1, 2)$ και $(2, -1)$. Οι καμπύλες πρέπει να έχουν την θετική φορά περιστροφής σε σχέση με το χωρίο.
5. (*) Υπολογίστε το $\oint_{\sigma} \mathbf{f} \cdot d\sigma$, όπου $\mathbf{f}(x, y) = (x^2, 3xy)$ και σ είναι η κλειστή πολυγωνική γραμμή με διαδοχικές κορυφές $(-1, 3), (1, 1), (7, 1), (2, 3), (-1, 3)$.
6. Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Stokes, υπολογίστε το $\iint_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{f}) \cdot \mathbf{N} \, dA$ για την συνάρτηση $\mathbf{f}(x, y, z) = (xyz, -z + xy, y + xz)$ όταν η Σ είναι η ένωση της επιφάνειας που ορίζεται από τις $y^2 + z^2 = 1$, $0 \leq x \leq 1$ και της επιφάνειας που ορίζεται από τις $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \geq 1$, και τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα της Σ κατευθύνονται προς τον x -άξονα.
7. (*) Επαληθεύστε τον τύπο του Stokes για την συνάρτηση $\mathbf{f}(x, y, z) = (-y^2, x^2, -z^2)$ στην επιφάνεια που ορίζεται από τις $x^2 + z^2 \leq 1$, $x + y + z = 1$.
8. Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Gauss, υπολογίστε το $\iiint_{\Sigma} (x^4 + y^4 + z^4) \, dA$ στην μοναδιαία σφαίρα κέντρου $(0, 0, 0)$.
9. (*) Επαληθεύστε τον τύπο του Gauss με το $\iiint_{\Sigma} \mathbf{f} \cdot \mathbf{N} \, dA$, με $\mathbf{f}(x, y, z) = (y, x, z)$ και Σ είναι η κλειστή συντοκική επιφάνεια του τετραέδρου με κορυφές $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$.
10. Υπολογίστε το $\int_{\sigma} \mathbf{f} \cdot d\sigma$, με $\mathbf{f}(x, y, z) = (e^x \sin y, e^x \cos y, z^2)$ και όπου σ είναι καμπύλη με αρχή το $(0, 0, 1)$ και τέλος το $(0, \pi, 0)$.
11. (i) Υπάρχει αριθμητική συνάρτηση ϕ ώστε να είναι $\nabla\phi(x, y, z) = (x, y^2z, xy)$ για κάθε (x, y, z) ;
(ii) Υποθέτουμε ότι η αριθμητική συνάρτηση ϕ ικανοποιεί την $\nabla\phi(x, y, z) = (x, y^2z, y^3/3 + z^2)$ για κάθε (x, y, z) καθώς και την $\phi(0, 0, 0) = 3$. Βρείτε το $\phi(-1, 2, 0)$.

Απαντήσεις.

1. 3π .
2. $\pm 12\pi$, ανάλογα με τον προσανατολισμό.
3. 0.
4. -14π .
5. 51.
6. -2π .
7. $\pm 3\pi/2 = \pm 3\pi/2$, ανάλογα με τους προσανατολισμούς.
8. $\pm 12\pi/5$, ανάλογα με τον προσανατολισμό.
9. $\pm 1/6$, ανάλογα με τον προσανατολισμό.
10. $-1/3$.
11. (i) Όχι. (ii) $7/2$.