

Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ, χειμερινό εξάμηνο 2016-17.

Τρίτο φυλλάδιο ασκήσεων.

Οι ασκήσεις με (*) λύθηκαν στο δίωρο των ασκήσεων.

1. Υπολογίστε το $\iiint_R x^2 dx dy dz$, όπου $R = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.
2. Υπολογίστε το $\iiint_R e^{-xy} dy dx dz$, όπου $R = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.
3. (*) Γράψτε το $\int_0^1 \left(\int_0^x \left(\int_0^y f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$ ως τριπλό ολοκλήρωμα σε συγκεκριμένο χωρίο D στον \mathbb{R}^3 , σχεδιάστε το D και γράψτε πέντε ακόμη διαφορετικές μορφές του τριπλού ολοκληρώματος ως διαδοχή τριών απλών ολοκληρωμάτων.
4. Γράψτε το $\int_0^2 \left(\int_0^3 \left(\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y, z) dy \right) dx \right) dz$ ως τριπλό ολοκλήρωμα σε συγκεκριμένο χωρίο D στον \mathbb{R}^3 , σχεδιάστε το D και γράψτε πέντε ακόμη διαφορετικές μορφές του τριπλού ολοκληρώματος ως διαδοχή τριών απλών ολοκληρωμάτων.
5. Γράψτε το $\int_0^1 \left(\int_{1-x}^1 \left(\int_x^1 f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$ ως τριπλό ολοκλήρωμα σε συγκεκριμένο χωρίο D στον \mathbb{R}^3 , σχεδιάστε το D και γράψτε πέντε ακόμη διαφορετικές μορφές του τριπλού ολοκληρώματος ως διαδοχή τριών απλών ολοκληρωμάτων.
6. (*) Σχεδιάστε το χωρίο $D = \{(x, y, z) \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq z \leq 4\}$ και υπολογίστε το $\iiint_D x^2 dx dy dz$.
7. Σχεδιάστε το χωρίο $D = \{(x, y, z) \mid 1/2 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ και υπολογίστε το $\iiint_D z dx dy dz$.
8. Σχεδιάστε το χωρίο $D = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq x\}$ και υπολογίστε το $\iiint_D \sin x dx dy dz$.
9. Σχεδιάστε το χωρίο $D = \{(x, y, z) \mid z \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$ και υπολογίστε το $\iiint_D x^2 dx dy dz$.
10. Σχεδιάστε το χωρίο $D = \{(x, y, z) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ και υπολογίστε το $\iiint_D z dx dy dz$.
11. Σχεδιάστε την πυραμίδα D με κορυφές $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 1, 0)$ και $(0, 0, 1)$ και υπολογίστε το $\iiint_D (1 - z^2) dx dy dz$.
12. Σχεδιάστε το φραγμένο χωρίο D που ορίζεται από το παραβολοειδές με εξίσωση $z = 2x^2 + y^2$ και από τον κύλινδρο με εξίσωση $z = 8 - y^2$ και υπολογίστε τον όγκο του.
13. Σχεδιάστε το φραγμένο χωρίο D που ορίζεται από τις επιφάνειες με εξισώσεις $z = 0$, $x^2 + 2y^2 = 2$ και $x + y + 2z = 2$ και υπολογίστε τον όγκο του.
14. Σχεδιάστε το φραγμένο χωρίο D που βρίσκεται ανάμεσα στο παραβολοειδές με εξίσωση $z = x^2 + y^2$ και στον κώνο με εξίσωση $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ και υπολογίστε τον όγκο του.
15. Σχεδιάστε το φραγμένο χωρίο D που ορίζεται από τα επίπεδα με εξισώσεις $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 4$ και $z = x + y + 1$ και υπολογίστε τον όγκο του.
16. Σχεδιάστε το φραγμένο χωρίο D που ορίζεται από τους κυλίνδρους με εξισώσεις $x^2 + y^2 = a^2$ και $x^2 + z^2 = a^2$ και υπολογίστε τον όγκο του.

Απαντήσεις.

1. $1/3$
2. e^{-1}
3. $\int_0^1 \left(\int_0^x \left(\int_z^x f(x, y, z) dy \right) dz \right) dx, \int_0^1 \left(\int_y^1 \left(\int_0^y f(x, y, z) dz \right) dx \right) dy,$
 $\int_0^1 \left(\int_0^y \left(\int_y^1 f(x, y, z) dx \right) dz \right) dy, \int_0^1 \left(\int_z^1 \left(\int_z^x f(x, y, z) dy \right) dx \right) dz,$
 $\int_0^1 \left(\int_z^1 \left(\int_y^1 f(x, y, z) dx \right) dy \right) dz$
4. $\int_0^2 \left(\int_{-3}^3 \left(\int_0^{\sqrt{9-y^2}} f(x, y, z) dx \right) dy \right) dz, \int_0^3 \left(\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \left(\int_0^2 f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx,$
 $\int_0^3 \left(\int_0^2 \left(\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y, z) dy \right) dz \right) dx, \int_{-3}^3 \left(\int_0^{\sqrt{9-y^2}} \left(\int_0^2 f(x, y, z) dz \right) dx \right) dy,$
 $\int_{-3}^3 \left(\int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{9-y^2}} f(x, y, z) dx \right) dz \right) dy$
5. $\int_0^1 \left(\int_x^1 \left(\int_{1-x}^1 f(x, y, z) dy \right) dz \right) dx, \int_0^1 \left(\int_{1-y}^1 \left(\int_x^1 f(x, y, z) dz \right) dx \right) dy,$
 $\int_0^1 \left(\int_{1-y}^1 \left(\int_{1-y}^z f(x, y, z) dx \right) dz \right) dy, \int_0^1 \left(\int_0^z \left(\int_{1-x}^1 f(x, y, z) dy \right) dx \right) dz,$
 $\int_0^1 \left(\int_{1-z}^1 \left(\int_{1-y}^z f(x, y, z) dx \right) dy \right) dz$
6. $4\pi/3$
7. $9\pi/32$
8. π
9. $(64 - 33\sqrt{3})\pi/15$
10. $2/3$
11. $1/30$
12. 16π
13. $\pi\sqrt{2}$
14. $\pi/6$
15. $88/3$
16. $16a^3/3$