

Ανάλυση πολλών μεταβλητών.

Πρώτο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Έστω $a \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ και η ανοικτή μπάλα $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - a| < r\}$. Θεωρήστε $x \in B(a, r)$ και $s = r - |x - a|$. Παρατηρήστε ότι $s > 0$ και κατόπιν αποδείξτε ότι $B(x, s) \subseteq B(a, r)$. Αυτό σημαίνει ότι η ανοικτή μπάλα $B(a, r)$ είναι ανοικτό σύνολο.
2. Έστω $a \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ και η κλειστή μπάλα $\overline{B}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - a| \leq r\}$. Θεωρήστε $x \in \overline{B}(a, r)^c$ και $s = |x - a| - r$. Παρατηρήστε ότι $s > 0$ και κατόπιν αποδείξτε ότι $B(x, s) \subseteq \overline{B}(a, r)^c$. Αυτό σημαίνει ότι το $\overline{B}(a, r)^c$ είναι ανοικτό σύνολο και άρα η κλειστή μπάλα $\overline{B}(a, r)$ είναι κλειστό σύνολο.
3. Έστω $a \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ και η σφαίρα $S(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - a| = r\}$. Θεωρήστε $x \in S(a, r)$ και $s > 0$. Επίσης θεωρήστε το $y = a + t(x - a)$ με $t > 0$.
 - (i) Αποδείξτε ότι αν $t > 1$ και το t είναι αρκετά (πόσο;) κοντά στο 1 τότε $y \in B(x, s)$ και $y \in \overline{B}(a, r)^c$.
 - (ii) Αποδείξτε ότι αν $t < 1$ και το t είναι αρκετά (πόσο;) κοντά στο 1 τότε $y \in B(x, s)$ και $y \in B(a, r)$.Τα (i), (ii) μαζί σημαίνουν ότι η σφαίρα $S(a, r)$ είναι το σύνορο της ανοικτής μπάλας $B(a, r)$ και της κλειστής μπάλας $\overline{B}(a, r)$.
4. Έστω $A = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n) = \{(x_1, \dots, x_n) \mid a_j < x_j < b_j \text{ για } 1 \leq j \leq n\}$. Θεωρήστε $x \in A$. Αν $x = (x_1, \dots, x_n)$, πάρτε $r_j = \min\{x_j - a_j, b_j - x_j\}$ για $1 \leq j \leq n$. Παρατηρήστε ότι $r_j > 0$ και πάρτε $r = \min\{r_1, \dots, r_n\}$. Αποδείξτε ότι $B(x, r) \subseteq A$. Αυτό σημαίνει ότι το ανοικτό ορθ. παραλληλεπίπεδο A είναι ανοικτό σύνολο.
5. Έστω $A = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] = \{(x_1, \dots, x_n) \mid a_j \leq x_j \leq b_j \text{ για } 1 \leq j \leq n\}$. Θεωρήστε $x \in A^c$. Αν $x = (x_1, \dots, x_n)$, τότε υπάρχει j_0 με $1 \leq j_0 \leq n$ ώστε $x_{j_0} < a_{j_0}$ ή $x_{j_0} > b_{j_0}$. Στην πρώτη περίπτωση πάρτε $r = a_{j_0} - x_{j_0}$ και στην δεύτερη περίπτωση πάρτε $r = x_{j_0} - b_{j_0}$. Παρατηρήστε ότι $r > 0$ και αποδείξτε ότι $B(x, r) \subseteq A^c$. Αυτό σημαίνει ότι το κλειστό ορθ. παραλληλεπίπεδο A είναι κλειστό σύνολο.
6. Έστω $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$ και $t \in \mathbb{R}$. Το $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, a \rangle = t\}$ ονομάζεται **υπερεπίπεδο** στον $\mathbb{R}^n$. Τα $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, a \rangle \leq t\}$ και $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, a \rangle \geq t\}$ ονομάζονται **κλειστοί ημιχώροι** του $\mathbb{R}^n$. Τέλος, τα $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, a \rangle < t\}$ και $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, a \rangle > t\}$ ονομάζονται **ανοικτοί ημιχώροι** του $\mathbb{R}^n$.
 - (i) Θεωρήστε τον ανοικτό ημιχώρο $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, a \rangle < t\}$ και έστω $x \in A$. Παρατηρήστε ότι $t - \langle x, a \rangle > 0$ και πάρτε $r = \frac{t - \langle x, a \rangle}{|a|}$. Αποδείξτε ότι $B(x, r) \subseteq A$. (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την ανισότητα Cauchy για να δείτε ότι $\langle y, a \rangle - \langle x, a \rangle = \langle y - x, a \rangle < t - \langle x, a \rangle$ όταν $y \in B(x, r)$.) Αυτό σημαίνει ότι ο ανοικτός ημιχώρος A είναι ανοικτό σύνολο.
 - (ii) Παρατηρήστε ότι $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, a \rangle > t\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, -a \rangle < -t\}$ και άρα ότι ο ανοικτός ημιχώρος $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, a \rangle > t\}$ είναι ανοικτό σύνολο.
 - (iii) Από τα προηγούμενα συμπεράνατε ότι οι κλειστοί ημιχώροι $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, a \rangle \leq t\}$ και $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, a \rangle \geq t\}$ καθώς και το υπερεπίπεδο $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, a \rangle = t\}$ είναι κλειστά σύνολα.
 - (iv) Αποδείξτε ότι το υπερεπίπεδο $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, a \rangle = t\}$ είναι το σύνορο όλων των αντίστοιχων κλειστών και ανοικτών ημιχώρων.

7. Αποδείξτε ότι, αν σε ένα ανοικτό σύνολο στον $\mathbb{R}^n$ επισυνάψουμε τα συνοριακά του σημεία, τότε το σύνολο το οποίο προκύπτει είναι κλειστό. Αποδείξτε ότι, αν από ένα κλειστό σύνολο στον $\mathbb{R}^n$ αφαιρέσουμε τα συνοριακά του σημεία, τότε το σύνολο το οποίο προκύπτει είναι ανοικτό.

8. Αποδείξαμε ότι, αν το $K \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι συμπαγές, το $F \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι κλειστό και $K \cap F = \emptyset$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|x - y| \geq \delta$ για κάθε $x \in K$ και $y \in F$. Ποιό θα μπορούσε να είναι το δ στις παρακάτω συγκεκριμένες περιπτώσεις;
- (i) Το K είναι μία κλειστή μπάλα και το F μία άλλη κλειστή μπάλα.
 - (ii) Το K είναι μία κλειστή μπάλα και το F είναι η επιφάνεια μίας μπάλας ομόκεντρης με την προηγούμενη αλλά με μεγαλύτερη ακτίνα.
 - (iii) Το K είναι μία κλειστή μπάλα και το F ένας κλειστός ημιχώρος.

9. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ με τύπο

$$f(x_1, x_2, x_3) = \left(\sin(e^{x_1+x_2^2} + x_1x_3), \frac{\cos(x_1x_3)}{x_1^2+x_2^2+1} \right)$$

είναι συνεχής.

10. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2} & \text{αν } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{αν } (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases}$$

δεν είναι συνεχής στο $(0, 0)$.

11. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1x_2^2}{x_1^2+x_2^2} & \text{αν } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{αν } (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases}$$

είναι συνεχής στο $(0, 0)$.

12. Έστω $a, b > 0$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \frac{|x_1+\dots+x_n|^a}{(x_1^2+\dots+x_n^2)^{b/2}} & \text{αν } (x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0) \\ 0 & \text{αν } (x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0) \end{cases}$$

είναι συνεχής στο $(0, \dots, 0)$ αν και μόνο αν $a > b$.