Ανάλυση πολλών μεταβλητών.

Δεύτερο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Ποιά από τα παρακάτω σύνολα είναι συμπαγή; Μία κλειστή μπάλα, μία ανοικτή μπάλα, ένα ανοικτό ορθ. παραλληλεπίπεδο, ένα ευθ. τμήμα (στον $\mathbb{R}^n$), μία ευθεία (στον $\mathbb{R}^n$), ένας κλειστός ημιχώρος, η τομή ενός κλειστού ημιχώρου με μία κλειστή μπάλα.

2. Θεωρώντας τα παρακάτω σύνολα ως αντίστροφες εικόνες κατάλληλων ανοικτών ή κλειστών συνόλων μέσω κατάλληλων συνεχών συναρτήσεων, αποδείξτε ότι αυτά είναι ανοικτά ή κλειστά.
(i) Οι μπάλες $B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, |x-a| < r\}$ και $\overline{B}(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, |x-a| \le r\}$ και η σφαίρα $S(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, |x-a| = r\}$.
(ii) Οι ημιχώροι $\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \langle x,a\rangle < t\}$, $\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \langle x,a\rangle > t\}$, $\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \langle x,a\rangle \le t\}$ και $\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \langle x,a\rangle \ge t\}$ και το υπερεπίπεδο $\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \langle x,a\rangle = t\}$. Βάσει αυτών αποδείξτε ότι είναι ανοικτά ή κλειστά τα ορθ. παραλληλεπίπεδα $(a_1,b_1)\times\cdots\times(a_n,b_n)$ και $[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]$. (Υπόδειξη: Γράψτε καθένα από τα ορθ. παραλληλεπίπεδα ως τομή $2n$ ημιχώρων.)

3. Έστω $f(x_1,x_2) = e^{x_1} - x_2$. Αποδείξτε ότι το $\{(x_1,x_2) \,|\, f(x_1,x_2) > 0\}$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και το $\{(x_1,x_2) \,|\, f(x_1,x_2) \ge 0\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.

4. Έστω $f(x_1,x_2) = \log(x_1 - x_2) - \sin x_1$. Αποδείξτε ότι το $\{(x_1,x_2) \,|\, f(x_1,x_2) < 1\}$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ ενώ το $\{(x_1,x_2) \,|\, f(x_1,x_2) \le 1\}$ δεν είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Ποιό είναι το πεδίο ορισμού της f;

5. Έστω $f(x_1,x_2) = \sqrt{x_1} - x_2$. Αποδείξτε ότι το $\{(x_1,x_2) \,|\, f(x_1,x_2) < 0\}$ δεν είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ ενώ το $\{(x_1,x_2) \,|\, f(x_1,x_2) \le 0\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Ποιό είναι το πεδίο ορισμού της f;

6. Αποδείξτε ότι το $\{(x_1,x_2,x_3) \,|\, x_1^2 < x_2^2 + x_3^2, x_1 > x_2 + x_3\}$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$. (Υπόδειξη: Γράψτε το σύνολο ως τομή δύο συνόλων.)

7. (i) Έστω $f_j : A \to \mathbb{R}^{m_j}$ συνεχής στο A για κάθε $j = 1,\ldots,k$, έστω A ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $j = 1,\ldots,k$ έστω U_j ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^{m_j}$. Αποδείξτε ότι το $\{x \in A \,|\, f_j(x) \in U_j \text{ για κάθε } j = 1,\ldots,k\}$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.
(ii) Έστω $f_i : A \to \mathbb{R}^{m_i}$ συνεχής στο A για κάθε $i \in I$, όπου I οποιοδήποτε σύνολο δεικτών, έστω A κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $i \in I$ έστω F_i ένα κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^{m_i}$. Αποδείξτε ότι το $\{x \in A \,|\, f_i(x) \in F_i \text{ για κάθε } i \in I\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

8. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο
$$f(x_1,x_2) = 1 + 3x_1 - 4x_2 - x_1^2 + 3x_1x_2 + x_2^2.$$
Αποδείξτε ότι
$$\lim_{(h_1^2+h_2^2)^{1/2}\to 0} \frac{|f(h_1,h_2) - f(0,0) - (3h_1 - 4h_2)|}{(h_1^2+h_2^2)^{1/2}} = 0$$
και συμπεράνατε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$ και ότι
$$f'(0,0) = \begin{pmatrix} 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Βρείτε τον τύπο του αντίστοιχου γραμμικού τελεστή

$$Df(0,0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}.$$

Μελετώντας τις μερικές παραγώγους της f, αποδείξτε με δεύτερο τρόπο ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$.

9. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ με τύπο

$$f(x) = (1 + 2x - x^2, 3 - x + x^3).$$

Αποδείξτε με δύο τρόπους ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και ότι

$$f'(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Βρείτε τον τύπο του αντίστοιχου γραμμικού τελεστή

$$Df(0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2.$$

10. Έστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ με τύπο

$$f(x_1,x_2,x_3) = (1 + x_1 - 3x_2 + x_1^2 + x_1x_2 + x_3^2, x_1 - x_2 + 5x_3 + x_1x_2 + x_2^2 - x_3^2).$$

Αποδείξτε με δύο τρόπους ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0,0)$ και ότι

$$f'(0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Βρείτε τον τύπο του αντίστοιχου γραμμικού τελεστή

$$Df(0,0,0) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2.$$

11. Αποδείξτε ότι η $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} \frac{x_1x_2}{(x_1^2+x_2^2)^{1/2}} & \text{αν } (x_1,x_2) \neq (0,0) \\ 0 & \text{αν } (x_1,x_2) = (0,0) \end{cases}$$

είναι συνεχής αλλά όχι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$.

12. Αποδείξτε ότι, για κάθε $k = 1,\ldots,n$, η αντίστοιχη συνάρτηση-προβολή $\pi_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$\pi_k(x_1,\ldots,x_n) = x_k$$

είναι γραμμικός τελεστής. Ποιός είναι ο αντίστοιχος πίνακας της π_k; Είναι η π_k παραγωγίσιμη στο x και ποιοί είναι ο πίνακας $\pi_k'(x)$ και ο γραμμικός τελεστής $D\pi_k(x)$;

13. Έστω ότι η $f : (a_1,b_1) \times \cdots \times (a_n,b_n) \to \mathbb{R}$ εξαρτάται μόνο από την k-οστή μεταβλητή x_k. Δηλαδή,

$$f(x) = g(x_k) \qquad \text{για κάθε } x = (x_1,\ldots,x_n) \in (a_1,b_1) \times \cdots \times (a_n,b_n),$$

όπου $g : (a_k,b_k) \to \mathbb{R}$. Αν η g είναι παραγωγίσιμη στο $c_k \in (a_k,b_k)$, αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(x_1,\ldots,x_{k-1},c_k,x_{k+1},\ldots,x_n)$ για κάθε $x_1 \in (a_1,b_1),\ldots,x_{k-1} \in (a_{k-1},b_{k-1}), x_{k+1} \in (a_{k+1},b_{k+1}),\ldots,x_n \in (a_n,b_n)$ και

$$f'(x_1,\ldots,x_{k-1},c_k,x_{k+1},\ldots,x_n) = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & g'(c_k) & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Η απόδειξη μπορεί να γίνει είτε χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγωγισιμότητας είτε παρατηρώντας ότι ισχύει $f = g \circ \pi_k : (a_1,b_1) \times \cdots \times (a_n,b_n) \to \mathbb{R}$ και χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της άσκησης 12.

14. Βάσει των κανόνων παραγώγισης και των παραγώγων των συναρτήσεων-προβολών από την άσκηση 12, βρείτε τις παραγώγους (σε μορφή πίνακα και σε μορφή γραμμικού τελεστή) των συναρτήσεων με τύπους

$$f(x_1, x_2) = \sin(x_1 + e^{x_1 x_2}), \qquad f(x_1, x_2, x_3) = ((x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, x_1 x_2)$$

15. (i) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ώστε να είναι $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 0$ για κάθε $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Αποδείξτε ότι η f είναι ανεξάρτητη της δεύτερης μεταβλητής. Δηλαδή, υπάρχει $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε $f(x_1, x_2) = g(x_1)$ για κάθε $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.
(ii) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ώστε να είναι $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 0$ για κάθε $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Αποδείξτε ότι η f είναι ανεξάρτητη της πρώτης μεταβλητής. Δηλαδή, υπάρχει $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε $f(x_1, x_2) = g(x_2)$ για κάθε $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.
(iii) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ώστε να είναι $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 0$ για κάθε $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση.

16. Έστω $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_1, 0) \,|\, x_1 \geq 0\}$.
(i) Αν $f : A \to \mathbb{R}$ και ισχύει $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 0$ για κάθε $(x_1, x_2) \in A$, αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή στο A. (Υπόδειξη: Κάθε δύο σημεία του A μπορούν να συνδεθούν με μία πολυγωνική γραμμή η οποία περιέχεται στο A και αποτελείται από διαδοχικά ευθ. τμήματα παράλληλα στους δύο άξονες.)
(ii) Βρείτε συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 0$ για κάθε $(x_1, x_2) \in A$ και να μην είναι η f ανεξάρτητη της δεύτερης μεταβλητής.

17. Έστω $g_1, g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο $\mathbb{R}^2$. Ορίζουμε $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} g_1(t, 0)\, dt + \int_0^{x_2} g_2(x_1, t)\, dt.$$

Ποιό σχήμα διαγράφεται από τα σημεία $(t, 0)$ του πρώτου ολοκληρώματος και από τα σημεία (x_1, t) του δεύτερου ολοκληρώματος; (Θεωρήστε σημεία (x_1, x_2) και στα τέσσερα τεταρτημόρια.)
(i) Αποδείξτε ότι $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = g_2(x_1, x_2)$ για κάθε $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.
(ii) Να ορίσετε την f με παρόμοιο τρόπο ώστε να ισχύει $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = g_1(x_1, x_2)$ για κάθε $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.
(iii) Βρείτε συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ώστε να είναι $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = x_1$ και $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = x_2$ για κάθε $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.
(iv) Βρείτε συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ώστε να είναι $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = x_2$ και $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = x_1$ για κάθε $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

18. Μία συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ χαρακτηρίζεται **διγραμμική μορφή** αν ισχύει

$$f(\lambda' x' + \lambda'' x'', y) = \lambda' f(x', y) + \lambda'' f(x'', y)$$

$$f(x, \lambda' y' + \lambda'' y'') = \lambda' f(x, y') + \lambda'' f(x, y'')$$

για κάθε $x', x'' \in \mathbb{R}^n$, $y', y'' \in \mathbb{R}^m$ και $\lambda', \lambda'' \in \mathbb{R}$. Δηλαδή η $f(x, y)$ είναι γραμμικός τελεστής ως προς κάθε μεμονωμένη μεταβλητή x, y. Ειδική περίπτωση διγραμμικής μορφής είναι ένα εσωτερικό γινόμενο: μία διγραμμική μορφή $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (δηλαδή $m = n$, $p = 1$) χαρακτηρίζεται **εσωτερικό γινόμενο** αν ισχύει

$$f(x, y) = f(y, x), \qquad f(x, x) \geq 0$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$ και

$$f(x, x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$$

Παράδειγμα εσωτερικού γινομένου είναι η γνωστή $f(x,y) = \langle x,y\rangle = x^\top y$.
Έστω διγραμμική μορφή $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$.
(i) Αποδείξτε ότι υπάρχει $M \geq 0$ ώστε

$$|f(x,y)| \leq M|x||y|$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$. Είναι γνωστό ότι, αν η f είναι εσωτερικό γινόμενο, η ανισότητα αυτή ισχύει με $M = 1$ και ονομάζεται **ανισότητα Cauchy**. (Υπόδειξη: Μιμηθείτε την απόδειξη που κάναμε για μία ανάλογη ανισότητα για γραμμικούς τελεστές.)
(ii) Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ και

$$Df(a,b)(x,y) = f(x,b) + f(a,y).$$

(Θυμηθείτε ότι ο $Df(a,b) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ είναι γραμμικός τελεστής και παρατηρήστε ότι η συνάρτηση $T : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ με τύπο $T(x,y) = f(x,b) + f(a,y)$ είναι γραμμικός τελεστής.) Βρείτε την $f'(a,b)$, δηλαδή τον αντίστοιχο πίνακα του $Df(a,b)$.

19. Έστω $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$. Η f χαρακτηρίζεται **ομογενής βαθμού a** αν ισχύει

$$f(tx) = t^a f(x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ και κάθε $t > 0$.
Αν η $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ είναι ομογενής βαθμού a και παραγωγίσιμη, αποδείξτε ότι

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + \cdots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = af(x)$$

για κάθε $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$. (Υπόδειξη: Αν $g(t) = f(tx)$, βρείτε την $g'(1)$.)
Παράδειγμα ομογενούς συνάρτησης βαθμού a είναι η $f(x) = |x|^a$. Ελέγξτε τις παραπάνω δύο ισότητες για αυτήν την συνάρτηση.

20. (i) Έστω πραγματική συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ και εσωτερικό σημείο a του $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)$, γνωρίζουμε ότι *κλίση* ή *ανάδελτα* της f στο a είναι το

$$\nabla f(a) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\Big).$$

Παρατηρήστε ότι για τον ορισμό του $\nabla f(a)$ δεν απαιτείται να είναι η f παραγωγίσιμη στο a. Αν, όμως, η f είναι παραγωγίσιμη στο a, τότε προφανώς το $\nabla f(a)$ ταυτίζεται με την παράγωγο (πίνακα) $f'(a)$.
(ii) Αποδείξτε το **θεώρημα μέσης τιμής**: Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και ευθ. τμήμα $[a,b]$ ώστε κάθε σημείο του $[a,b]$ να είναι εσωτερικό σημείο του $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και η f να είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του $[a,b]$. Τότε υπάρχει σημείο $c \in [a,b]$ ώστε να είναι

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)^\top = \nabla f(c)(b-a)^\top = \langle \nabla f(c), b-a\rangle.$$

(Υπόδειξη: Θεωρήστε την $g : [0,1] \to A$ με τύπο $g(t) = t(b-a) + a = tb + (1-t)a$ και την σύνθεση $f \circ g : [0,1] \to \mathbb{R}$.)

21. Χαρακτηρίζουμε **παραμετρικοποίηση καμπύλης** στον $\mathbb{R}^m$ οποιαδήποτε *συνεχή* συνάρτηση $\sigma : I \to \mathbb{R}^m$, όπου το I είναι διάστημα του $\mathbb{R}$. Το σύνολο τιμών $\sigma(I) = \{\sigma(t) \,|\, t \in I\} \subseteq \mathbb{R}^m$ ονομάζεται **καμπύλη** στον $\mathbb{R}^m$.
(i) Πεισθήτε με κατάλληλο σχήμα ότι, αν η $\sigma : I \to \mathbb{R}^m$ είναι παραγωγίσιμη σε κάποιο εσωτερικό σημείο t_0 του I και $\sigma'(t_0) \neq 0$, τότε η ευθεία η οποία εφάπτεται στην καμπύλη $\sigma(I)$ στο σημείο $\sigma(t_0)$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\sigma'(t_0)$.
(ii) Έστω παραμετρικοποίηση καμπύλης $\sigma : I \to \mathbb{R}^m$ και σημείο $x \in \mathbb{R}^m$. Έστω ότι για

κάποιο εσωτερικό σημείο t_0 του I ισχύει $|x-\sigma(t_0)| \leq |x-\sigma(t)|$ για κάθε $t \in I$. Δηλαδή το $\sigma(t_0)$ είναι σημείο της καμπύλης με την ελάχιστη απόσταση από το x. Αποδείξτε ότι, αν η σ είναι παραγωγίσιμη στο t_0 και $\sigma'(t_0) \neq 0$, τότε το διάνυσμα $x-\sigma(t_0)$ είναι ορθογώνιο στην καμπύλη στο σημείο $\sigma(t_0)$.
(iii) Έστω $f : A \to \mathbb{R}^m$ και εσωτερικό σημείο a του $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και έστω $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$. Ονομάζουμε **παράγωγο της f στο a στην κατεύθυνση του** v το όριο

$$f'_v(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t}.$$

Πρέπει να είναι σαφές ότι το όριο αυτό, αν υπάρχει, είναι διάνυσμα στον $\mathbb{R}^m$.
Έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο a. Παρατηρήστε ότι το $f'_v(a)$ είναι το διάνυσμα το οποίο είναι παράλληλο στην εφαπτόμενη ευθεία στην τροχιά της καμπύλης η οποία έχει παραμετρικοποίηση την $\sigma_v : I \to \mathbb{R}^m$ στο σημείο $\sigma_v(0) = f(a)$, όπου το $I \subseteq \mathbb{R}$ είναι ένα διάστημα με το 0 ως εσωτερικό του σημείο και η σ_v έχει τύπο $\sigma_v(t) = f(a+tv)$. Ποιό είναι το κατάλληλο διάστημα I αν γνωρίζουμε μία μπάλα $B(a;r) \subseteq A$ και το $|v|$; Παρατηρήστε, επίσης, ότι η καμπύλη $\sigma_v(I)$ περιέχεται στο σύνολο τιμών $f(A)$ και διέρχεται από το σημείο $f(a)$ του συνόλου τιμών. Τέλος, αποδείξτε ότι

$$f'_v(a) = f'(a)v.$$

Παρατηρήστε ότι τα διανύσματα $f'_{e_1}(a), \ldots, f'_{e_n}(a)$ είναι οι στήλες του πίνακα $f'(a)$.
(iv) Συνέχεια του (iii). Το σύνολο των εφαπτόμενων ευθειών των καμπυλών σ_v στο κοινό τους σημείο $f(a)$ ονομάζεται **εφαπτόμενος αφφινικός υπόχωρος** του $\mathbb{R}^m$ στο σύνολο τιμών $f(A)$ στο σημείο $f(a)$. Αποδείξτε ότι ο εφαπτόμενος αφφινικός υπόχωρος είναι το σύνολο $\{f(a) + f'(a)v \,|\, v \in \mathbb{R}^n\}$, δηλαδή ο γραμμικός υπόχωρος $\{f'(a)v \,|\, v \in \mathbb{R}^n\}$ του $\mathbb{R}^m$ "μεταφερμένος" στη θέση $f(a)$. Γνωρίζουμε ότι η διάσταση του γραμμικού υπόχωρου $\{f'(a)v \,|\, v \in \mathbb{R}^n\}$ είναι ίση με τον μέγιστο αριθμό γραμμικά ανεξάρτητων στηλών του πίνακα $f'(a)$.

22. Έστω $A = \{(x_1, x_2) \,|\, x_1 > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ και $B = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_1, x_2) \,|\, x_1 \leq 0, x_2 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ και η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}^2$ με τύπο

$$f(x_1, x_2) = ({x_1}^2 - {x_2}^2, 2x_1x_2).$$

Αποδείξτε ότι η f είναι ένα-προς-ένα στο A και επί του B, ότι είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x = (x_1, x_2) \in A$, ότι οι $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}$ είναι συνεχείς στο A και ότι $\det f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$. Αν $g : B \to A$ είναι η αντίστροφη συνάρτηση, βρείτε την $g'(y)$ για κάθε $y = (y_1, y_2) \in B$ χωρίς να βρείτε τον τύπο της g. Κατόπιν, βρείτε τον τύπο της g και ελέγξτε τον τύπο της g' τον οποίο βρήκατε προηγουμένως. Ποιές είναι οι $\frac{\partial g}{\partial y_1}, \frac{\partial g}{\partial y_2}$;

23. (i) Έστω $A = \{(x_1, x_2) \,|\, 0 < x_2 < 2\pi\} \subseteq \mathbb{R}^2$ και $B = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_1, x_2) \,|\, x_1 \geq 0, x_2 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ και η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}^2$ με τύπο

$$f(x_1, x_2) = (e^{x_1} \cos x_2, e^{x_1} \sin x_2).$$

Αποδείξτε ότι η f είναι ένα-προς-ένα στο A και επί του B, ότι είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x = (x_1, x_2) \in A$, ότι οι $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}$ είναι συνεχείς στο A και ότι $\det f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$. Αν $g : B \to A$ είναι η αντίστροφη συνάρτηση, βρείτε την $g'(y)$ για κάθε $y = (y_1, y_2) \in B$ χωρίς να βρείτε τον τύπο της g. Κατόπιν, βρείτε τον τύπο της g και ελέγξτε τον τύπο της g' τον οποίο βρήκατε προηγουμένως. Ποιές είναι οι $\frac{\partial g}{\partial y_1}, \frac{\partial g}{\partial y_2}$;
(ii) Έστω η $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ με τον ίδιο τύπο

$$f(x_1, x_2) = (e^{x_1} \cos x_2, e^{x_1} \sin x_2).$$

Αποδείξτε ότι η f είναι επί του $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ αλλά όχι ένα-προς-ένα στο $\mathbb{R}^2$. Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in \mathbb{R}^2$, ότι οι $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}^2$ και ότι $\det f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^2$.
Παρατήρηση: Από το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης προκύπτει ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^2$ η f είναι ένα-προς-ένα αν περιοριστεί σε κάποιο ανοικτό σύνολο το οποίο περιέχει το σημείο x. Στο παράδειγμα αυτό η f δεν είναι ένα-προς-ένα σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της.

24. Έστω η $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ με τύπο

$$f(x) = |x|^2 x$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Αποδείξτε ότι η f είναι ένα-προς-ένα και επί του $\mathbb{R}^n$ και ότι είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και ότι $\det f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ και $\det f'(0) = 0$. Αν $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι η αντίστροφη συνάρτηση, αποδείξτε (χωρίς να βρείτε τον τύπο της) ότι η g δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0 και βρείτε την $g'(y)$ για κάθε $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Κατόπιν, βρείτε τον τύπο της g και ελέγξτε τον τύπο της g' τον οποίο βρήκατε προηγουμένως.
Μία πολύ γνωστή ειδική περίπτωση προκύπτει όταν $n = 1$. Περιγράψτε την.

25. Θεωρήστε την συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ με τύπο

$$f(x) = \frac{1}{|x|}\, x.$$

Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη (δηλαδή όλες οι $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ είναι συνεχείς) στο $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ και ότι το σύνολο τιμών της f περιέχεται στην μοναδιαία σφαίρα $\{y \in \mathbb{R}^n \,|\, |y| = 1\}$.
Έχει η $\{y \in \mathbb{R}^n \,|\, |y| = 1\}$ (ως υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$) κανένα εσωτερικό σημείο;
Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Αντίστροφης Απεικόνισης, αποδείξτε ότι $\det f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Κατόπιν, αποδείξτε κατ' ευθείαν από τον τύπο της f ότι $\det f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

26. Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ και $f : A \to B$ ένα-προς-ένα και επί, οπότε υπάρχει η $f^{-1} : B \to A$. Έστω a εσωτερικό σημείο του A και έστω ότι το $b = f(a)$ είναι εσωτερικό σημείο του B.
(i) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο a και η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο b, αποδείξτε ότι

$$\det(f^{-1})'(b) \det f'(a) = 1.$$

(Υπόδειξη: Ποιά είναι η συνάρτηση $f^{-1} \circ f$ και ποιός είναι ο πίνακας $(f^{-1})'(b) f'(a)$;)
(ii) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο a και $\det f'(a) = 0$, αποδείξτε ότι η f^{-1} δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο b.

27. Έστω ανοικτό σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $f : A \to B$ η οποία είναι επί του συνόλου $B \subseteq \mathbb{R}^n$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο A και οι μερικές παράγωγοι των συντεταγμένων συναρτήσεων της f είναι συνεχείς στο A και ισχύει $\det f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$, αποδείξτε ότι το B είναι ανοικτό και ότι για κάθε ανοικτό $A_1 \subseteq A$ το $B_1 = f(A_1)$ είναι κι αυτό ανοικτό.
Αν, επιπλέον, η f είναι ένα-προς-ένα στο A, οπότε υπάρχει η $f^{-1} : B \to A$, αποδείξτε ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο B και οι μερικές παράγωγοι των συντεταγμένων συναρτήσεων της f^{-1} είναι συνεχείς στο B.

28. Έστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, στην μορφή $f(x, y_1, y_2)$, η οποία είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}^3$ και κάθε συντεταγμένη συνάρτηση της f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους στον $\mathbb{R}^3$. Έστω $f(3, -1, 2) = (0, 0)$ και

$$f'(3, -1, 2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Αποδείξτε ότι υπάρχει συνάρτηση $g = (g_1, g_2) : X \to \mathbb{R}^2$, όπου X είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, ώστε $3 \in X$ και $g(3) = (-1, 2)$ και

$$f(x, g_1(x), g_2(x)) = (0, 0)$$

για κάθε $x \in X$. Βρείτε την $g'(3)$. Πώς αλλάζουν τα προηγούμενα αν υποθέσουμε ότι

$$f'(3, -1, 2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix};$$

29. Έστω $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$, στην μορφή $f(x_1, y_1, y_2, x_2, x_3)$, η οποία είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}^5$ και κάθε συντεταγμένη συνάρτηση της f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους στον $\mathbb{R}^5$. Έστω $f(1, 2, -1, 3, 0) = (0, 0)$ και

$$f'(1, 2, -1, 3, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Αποδείξτε ότι υπάρχει συνάρτηση $g = (g_1, g_2) : X \to \mathbb{R}^2$, όπου X είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$, ώστε $(1, 3, 0) \in X$ και $g(1, 3, 0) = (2, -1)$ και

$$f(x_1, g_1(x_1, x_2, x_3), g_2(x_1, x_2, x_3), x_2, x_3) = (0, 0)$$

για κάθε $(x_1, x_2, x_3) \in X$. Βρείτε την $g'(1, 3, 0)$.

30. Έστω $F_1, F_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με συνεχείς μερικές παραγώγους στον $\mathbb{R}^2$, με $F_1(0, 0) = 1$ και $F_2(0, 0) = 2$. Θεωρήστε τις $G_1, G_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ με τύπους

$$G_1(x, y, z) = F_1(x^2 + y^2 + z, xy + x + z), \qquad G_2(x, y, z) = F_2(x - y + z, x + y^2 + z^2).$$

Δώστε κατάλληλη συνθήκη η οποία να εξασφαλίζει ότι υπάρχει ανοικτό σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ ώστε $0 \in A$ και να υπάρχουν $f, g : A \to \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f(0) = 0$, $g(0) = 0$ και

$$G_1(f(z), g(z), z) = 1, \quad G_2(f(z), g(z), z) = 2$$

για κάθε $z \in A$.

31. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με συνεχείς μερικές παραγώγους στον $\mathbb{R}^2$ και με $f(2, 1) = 3$. Έστω

$$G(x, y, z) = xf(y, z), \qquad H(x, y, z) = xy + y^2 + xz.$$

Οι εξισώσεις $G(x, y, z) = 3$ και $H(x, y, z) = 7$ έχουν την λύση $(x, y, z) = (1, 2, 1)$. Ποιές συνθήκες σε σχέση με την f' εγγυούνται ότι υπάρχουν συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις $y = g(x)$ και $z = h(x)$ ορισμένες σε ένα ανοικτό υποσύνολο X του $\mathbb{R}$, με $1 \in X$, οι οποίες ικανοποιούν τις $g(1) = 2$ και $h(1) = 1$ και τις

$$G(x, g(x), h(x)) = 3, \qquad H(x, g(x), h(x)) = 7$$

για κάθε x στο X;

32. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με συνεχείς μερικές παραγώγους στον $\mathbb{R}^2$ και με $f(2, -1) = -1$. Έστω

$$G(x, y, u) = f(x, y) + u^2, \qquad H(x, y, u) = ux + 3y^3 + u^3.$$

Οι εξισώσεις $G(x, y, u) = 0$ και $H(x, y, u) = 0$ έχουν την λύση $(x, y, u) = (2, -1, 1)$. Ποιές συνθήκες σε σχέση με την f' εγγυούνται ότι υπάρχουν συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις $x = g(y)$ και $u = h(y)$ ορισμένες σε ένα ανοικτό υποσύνολο Y του $\mathbb{R}$, με $-1 \in Y$, οι οποίες ικανοποιούν τις $g(-1) = 2$ και $h(-1) = 1$ και τις

$$G(g(y), y, h(y)) = 0, \qquad H(g(y), y, h(y)) = 0$$

για κάθε y στο Y; Πέρα από αυτές τις κατάλληλες συνθήκες, αν υποθέσουμε επιπλέον ότι $f'(2, -1) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \end{pmatrix}$, βρείτε τις $g'(-1)$ και $h'(-1)$.

33. Έστω $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, στην μορφή $F(u,v)$, η οποία έχει συνεχείς μερικές παραγώγους μέχρι και δεύτερης τάξης σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}^2$ με $F(0,0) = 0$ και $F'(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$. Έστω $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$G(x,y,z) = F(x + 2y + 3z - 1, x^3 + y^2 - z^2).$$

Παρατηρήστε ότι $G(-2,3,-1) = F(0,0) = 0$. Αποδείξτε ότι η εξίσωση

$$G(x,y,z) = 0$$

μπορεί να λυθεί ως προς z ως συνάρτηση $z = g(x,y)$ του (x,y) σε ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ το οποίο περιέχει το σημείο $(-2,3)$, έτσι ώστε $g(-2,3) = -1$. Βρείτε την $g'(-2,3)$. Αν $\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}(0,0) = 3$, $\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}(0,0) = -1$ και $\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}(0,0) = 5$, βρείτε την $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(-2,3)$.

34. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ και έστω $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η τιμή $y = g(x)$ να είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $f(x,y) = 0$. Έστω ότι η f είναι συνεχής και έχει συνεχείς μερικές παραγώγους στον $\mathbb{R}^2$ και έστω $\frac{\partial f}{\partial y}(a, g(a)) \neq 0$ για κάποιο $a \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο a και ότι

$$g'(a) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(a, g(a))}{\frac{\partial f}{\partial y}(a, g(a))}.$$