Ανάλυση πολλών μεταβλητών.

Τρίτο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Έστω γραμμικός χώρος V και $k \geq 0$. Αν $\omega, \omega_1, \omega_2 \in \Lambda^k(V)$ και $a \in \mathbb{R}$, αποδείξτε ότι $\omega_1 + \omega_2, a\omega \in \Lambda^k(V)$.

2. Έστω γραμμικός χώρος V και $k, l, m \geq 0$. Αν $\omega, \omega_1, \omega_2 \in \Lambda^k(V)$, $\eta, \eta_1, \eta_2 \in \Lambda^l(V)$, $\theta \in \Lambda^m(V)$ και $a \in \mathbb{R}$, αποδείξτε ότι

$$(\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta = \omega_1 \wedge \eta + \omega_2 \wedge \eta, \quad \omega \wedge (\eta_1 + \eta_2) = \omega \wedge \eta_1 + \omega \wedge \eta_2,$$

$$(a\omega) \wedge \eta = a(\omega \wedge \eta) = \omega \wedge (a\eta),$$

$$\eta \wedge \omega = (-1)^{kl} \omega \wedge \eta,$$

$$(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta).$$

3. Έστω γραμμικός χώρος V και $k \geq 2$. Αν $\omega_1, \ldots, \omega_k \in \Lambda^1(V)$, αποδείξτε ότι

$$(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k)(v_1, \ldots, v_k) = \det \begin{pmatrix} \omega_1(v_1) & \cdots & \omega_1(v_k) \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_k(v_1) & \cdots & \omega_k(v_k) \end{pmatrix}$$

για κάθε $v_1, \ldots, v_k \in V$.

4. Έστω γραμμικοί χώροι V, W, γραμμικός τελεστής $L : V \to W$ και $k, l \geq 0$.
(i) Αν $\omega \in \Lambda^k(W)$, αποδείξτε ότι $L^*(\omega) \in \Lambda^k(V)$.
(ii) Αν $\omega, \omega_1, \omega_2 \in \Lambda^k(W)$ και $a \in \mathbb{R}$, αποδείξτε ότι

$$L^*(\omega_1 + \omega_2) = L^*(\omega_1) + L^*(\omega_2), \qquad L^*(a\omega) = aL^*(\omega).$$

(iii) Αν $\omega \in \Lambda^k(W)$, $\eta \in \Lambda^l(W)$, αποδείξτε ότι

$$L^*(\omega \wedge \eta) = L^*(\omega) \wedge L^*(\eta).$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της άσκησης 3, αποδείξτε την ισότητα πρώτα όταν $\omega = \phi_I$ και $\eta = \phi_J$, όπου $I = (i_1, \ldots, i_k)$ και $J = (j_1, \ldots, j_l)$, και μετά περάστε στην γενική περίπτωση.

5. (i) Έστω ανοικτό $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $k, l \geq 0$ και διαφορικές k-μορφές $\omega, \omega_1, \omega_2$ στο A και διαφορική l-μορφή η στο A και $a \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι

$$d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2, \quad d(a\omega) = a\, d\omega,$$

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta,$$

$$d(d\omega) = 0.$$

Έχουμε αποδείξει την πρώτη ισότητα και μόνο ειδικές περιπτώσεις των δύο τελευταίων ισοτήτων.
(ii) Στην περίπτωση $n = 2$ να υπολογίσετε το $d\omega$ για την γενική διαφορική k-μορφή ω, για κάθε $k = 0, 1, 2$. Ελέγξτε ότι $d\omega = 0$ όταν $k = 2$. Επιβεβαιώστε τις δύο τελευταίες σχέσεις του (i). Κάντε το ίδιο στην περίπτωση $n = 3$ (για $k = 0, 1, 2, 3$). Ακόμη πιο συγκεκριμένο παράδειγμα: θεωρήστε τις διαφορικές μορφές

$$\omega = x_1 x_2 dx_1 + 3dx_2 - x_2 x_3 dx_3, \qquad \eta = x_1 dx_1 - x_2 x_3^2 dx_2 + 2x_1 dx_3$$

στον $\mathbb{R}^3$. Αποδείξτε με υπολογισμό ότι

$$d(d\omega) = 0, \qquad d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta - \omega \wedge d\eta.$$

6. Έστω ανοικτό $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και ανοικτό $B \subseteq \mathbb{R}^m$ και παραγωγίσιμη $f : A \to B$ και $k, l \geq 0$. Έστω $g : B \to \mathbb{R}$, διαφορικές k-μορφές $\omega, \omega_1, \omega_2$ στο B και διαφορική l-μορφή η στο B. Αποδείξτε ότι

$$f^*(\omega_1 + \omega_2) = f^*(\omega_1) + f^*(\omega_2), \qquad f^*(g\omega) = g \circ f \cdot f^*(\omega),$$

$$f^*(\omega \wedge \eta) = f^*(\omega) \wedge f^*(\eta),$$

$$f^*(d\omega) = d(f^*(\omega)).$$

7. Θεωρήστε την $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ με τύπο

$$(y_1, y_2, y_3) = f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, x_1 x_2)$$

και υπολογίστε τις διαφορικές 1-μορφές $f^*(dy_1)$, $f^*(dy_2)$, $f^*(dy_3)$ στον $\mathbb{R}^2$.
Θεωρήστε και την διαφορική 1-μορφή

$$\omega = y_2\, dy_1 + y_3\, dy_2 + y_1\, dy_3$$

στον $\mathbb{R}^3$ και επαληθεύστε την σχέση $f^*(d\omega) = d(f^*(\omega))$ με τις συγκεκριμένες f και ω.

8. Θεωρήστε την $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με τύπο

$$(y_1, y_2) = f(x_1, x_2) = (x_1 + {x_2}^2, x_1 x_2)$$

και υπολογίστε τις διαφορικές 1-μορφές $f^*(dy_1)$, $f^*(dy_2)$ στον $\mathbb{R}^2$.
Θεωρήστε και την διαφορική 1-μορφή

$$\omega = y_2\, dy_1 + y_1\, dy_2$$

στον $\mathbb{R}^2$ και επαληθεύστε την σχέση $f^*(d\omega) = d(f^*(\omega))$ με τις συγκεκριμένες f και ω.