Ανάλυση πολλών μεταβλητών.

Τέταρτο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Αποδείξτε ότι για την γενική 2-αλυσίδα c στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει $\partial(\partial c) = 0$. Κάντε το ίδιο για την γενική 3-αλυσίδα c στον $\mathbb{R}^n$.
   Υποδειξη. Εργαστείτε πρώτα με στοιχειώδεις 2-επιφάνειες και στοιχειώδεις 3-επιφάνειες αντιστοίχως.

2. Έστω $c : [0,1]^2 \to A$ μία στοιχειώδης 2-επιφάνεια στο ανοικτό $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και
$$\omega(x) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \omega_{i_1 i_2}(x)\, dx_{i_1} \wedge dx_{i_2}, \qquad x \in A$$
   μία διαφορική 2-μορφή στο A. Αποδείξτε ότι
$$\int_c \omega = \int_0^1 \int_0^1 \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \omega_{i_1 i_2}(c(t)) \Big(\frac{\partial c_{i_1}}{\partial t_1}(t) \frac{\partial c_{i_2}}{\partial t_2}(t) - \frac{\partial c_{i_1}}{\partial t_2}(t) \frac{\partial c_{i_2}}{\partial t_1}(t) \Big)\, dt_1 dt_2.$$
   Εξειδικεύστε όταν $n = 2$ και $n = 3$.

3. Για $r > 0$ ορίζουμε την στοιχειώδη 1-επιφάνεια (δηλαδή καμπύλη) c_r στο $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ με τύπο
$$c_r(s) = (r\cos(2\pi s), r\sin(2\pi s)), \qquad s \in [0,1].$$
   Αν $r_1, r_2 > 0$, θεωρήστε την στοιχειώδη 2-επιφάνεια $c : [0,1]^2 \to A$ με τύπο
$$c(s,t) = (1-t)c_{r_1}(s) + t c_{r_2}(s), \qquad (s,t) \in [0,1]^2.$$
   Έχουμε δει σε παράδειγμα ότι
$$\partial c = c_{r_1} - c_{r_2}.$$
   Θεωρήστε και την διαφορική 1-μορφή ω στο A με τύπο
$$\omega(x) = -\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}\, dx_1 + \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}\, dx_2, \qquad x \in A.$$
   Επαληθεύστε τον τύπο του Stokes για τα c, ω.

4. Θεωρήστε την στοιχειώδη 2-επιφάνεια c στον $\mathbb{R}^2$ με τύπο
$$c(r,t) = (r\cos(2\pi t), r\sin(2\pi t)), \qquad (r,t) \in [0,1]^2,$$
   και την διαφορική 1-μορφή ω στον $\mathbb{R}^2$ με τύπο
$$\omega(x) = x_2\, dx_1 - x_1\, dx_2, \qquad x \in \mathbb{R}^2.$$
   Ποιό είναι το γεωμετρικό σχήμα της c και της ∂c;
   Επαληθεύστε τον τύπο του Stokes για τα c, ω.

5. Θεωρήστε την στοιχειώδη 2-επιφάνεια c στον $\mathbb{R}^3$ με τύπο
$$c(s,t) = (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s), t), \qquad (s,t) \in [0,1]^2,$$
   και την διαφορική 1-μορφή ω στον $\mathbb{R}^3$ με τύπο
$$\omega(x) = x_1\, dx_1 + x_2\, dx_2 + x_3\, dx_3, \qquad x \in \mathbb{R}^3.$$
   Ποιό είναι το γεωμετρικό σχήμα της c και της ∂c;
   Επαληθεύστε τον τύπο του Stokes για τα c, ω.

6. Έστω $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ και η διαφορική 1-μορφή ω στο A με τύπο

$$\omega(x) = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}\, dx_1 + \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}\, dx_2, \qquad x \in A.$$

(i) Αποδείξτε ότι η ω είναι κλειστή.
(ii) Αποδείξτε ότι η ω είναι ακριβής.
(iii) Θεωρήστε την στοιχειώδη 1-επιφάνεια (δηλαδή καμπύλη) c στο A με τύπο

$$c(t) = (3\cos(2\pi t), 3\sin(2\pi t)), \qquad t \in [0,1],$$

και υπολογίστε το

$$\int_c \omega$$

χωρίς να κάνετε πράξεις.

7. Έστω η διαφορική 1-μορφή ω στον $\mathbb{R}^2$ με τύπο

$$\omega(x) = \frac{2x_1 + x_2}{x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2}\, dx_1 + \frac{x_1 + 2x_2}{x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2}\, dx_2, \qquad x \in \mathbb{R}^2.$$

(i) Αποδείξτε ότι η ω είναι κλειστή.
(ii) Αποδείξτε ότι η ω είναι ακριβής.
(iii) Θεωρήστε την στοιχειώδη 1-επιφάνεια (δηλαδή καμπύλη) c στον $\mathbb{R}^2$ με τύπο

$$c(t) = (2\cos(2\pi t), 5\sin(2\pi t)), \qquad t \in [0,1],$$

και υπολογίστε το

$$\int_c \omega$$

χωρίς να κάνετε πράξεις.

8. Έστω ανοικτό $A \subseteq \mathbb{R}^3$. Για βαθμωτό πεδίο $f : A \to \mathbb{R}$ ορίζουμε το διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{grad} f = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\Big) : A \to \mathbb{R}^3$$

και για διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F} = (P, Q, R) : A \to \mathbb{R}^3$ ορίζουμε το βαθμωτό πεδίο

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} : A \to \mathbb{R}$$

και το διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{curl}\, \mathbf{F} = \Big(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) : A \to \mathbb{R}^3.$$

Επίσης, από το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F} = (P, Q, R) : A \to \mathbb{R}^3$ ορίζουμε την διαφορική 1-μορφή

$$\omega^1_{\mathbf{F}} = P\, dx + Q\, dy + R\, dz$$

και την διαφορική 2-μορφή

$$\omega^2_{\mathbf{F}} = P\, dy \wedge dz + Q\, dz \wedge dx + R\, dx \wedge dy.$$

(i) Αποδείξτε ότι

$$\begin{aligned} df &= \omega^1_{\mathbf{grad} f} \\ d(\omega^1_{\mathbf{F}}) &= \omega^2_{\mathbf{curl}\, \mathbf{F}} \\ d(\omega^2_{\mathbf{F}}) &= \operatorname{div} \mathbf{F}\, dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned}$$

(ii) Αποδείξτε ότι

$$\textbf{curl}\,(\textbf{grad} f) = \mathbf{0}, \qquad \text{div}\,(\textbf{curl}\,\mathbf{F}) = 0.$$

(iii) Έστω $A = \mathbb{R}^3$. Αποδείξτε ότι, αν για το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ισχύει $\textbf{curl}\,\mathbf{F} = \mathbf{0}$ στον $\mathbb{R}^3$, τότε υπάρχει βαθμωτό πεδίο $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ώστε $\mathbf{F} = \textbf{grad} f$ στον $\mathbb{R}^3$ και ότι, αν για το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{G} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ισχύει $\text{div}\,\mathbf{G} = 0$ στον $\mathbb{R}^3$, τότε υπάρχει διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ώστε $\mathbf{G} = \textbf{curl}\,\mathbf{F}$ στον $\mathbb{R}^3$.

9. Έστω ανοικτά $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ και $f : A \to B$ η οποία είναι ένα-προς-ένα και επί του B και ώστε η f καθώς και η $f^{-1} : B \to A$ να είναι παραγωγίσιμες. Αν κάθε κλειστή διαφορική μορφή στο A είναι ακριβής, αποδείξτε ότι κάθε κλειστή διαφορική μορφή στο B είναι ακριβής.