Ανάλυση πολλών μεταβλητών.

Τελικό διαγώνισμα, 05.06.2019.

1. Έστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ με τύπο
$$f(x_1, x_2, x_3) = (1 + x_1 - 3x_2 + x_1^2 + x_1x_2 + x_3^2, x_1 - x_2 + 5x_3 + x_1x_2 + x_2^2 - x_3^2).$$
Αποδείξτε με τον ορισμό της παραγωγισιμότητας ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0, 0)$ και ότι
$$f'(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$
Βρείτε τον τύπο του αντίστοιχου γραμμικού τελεστή
$$Df(0, 0, 0) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2.$$

2. Έστω $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_1, 0) : x_1 \leq 0\}$ και $f : A \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του A με την ιδιότητα
$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = 0$$
για κάθε $x \in A$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή στο A.

3. Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ και $f : A \to B$ ένα-προς-ένα και επί, οπότε υπάρχει η $f^{-1} : B \to A$. Έστω a εσωτερικό σημείο του A και έστω ότι το $b = f(a)$ είναι εσωτερικό σημείο του B. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο a και η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο b, αποδείξτε ότι
$$\det(f^{-1})'(b) \det f'(a) = 1.$$
Διατυπώστε επιπλέον προϋποθέσεις ώστε να είναι
$$\det(f^{-1})'(b) = 3 \quad \text{και} \quad f'(a) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με συνεχείς μερικές παραγώγους στον $\mathbb{R}^2$ και με $f(2, -1) = -1$. Έστω
$$G(x, y, u) = f(x, y) + u^2, \qquad H(x, y, u) = ux + 3y^3 + u^3.$$
Οι εξισώσεις $G(x, y, u) = 0$ και $H(x, y, u) = 0$ έχουν την λύση $(x, y, u) = (2, -1, 1)$. Ποιές συνθήκες σε σχέση με την f' εγγυούνται ότι υπάρχουν συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις $x = g(y)$ και $u = h(y)$ ορισμένες σε ένα ανοικτό υποσύνολο Y του $\mathbb{R}$, με $-1 \in Y$, οι οποίες ικανοποιούν τις $g(-1) = 2$ και $h(-1) = 1$ και τις
$$G(g(y), y, h(y)) = 0, \qquad H(g(y), y, h(y)) = 0$$
για κάθε y στο Y; Πέρα από αυτές τις κατάλληλες συνθήκες, αν υποθέσουμε επιπλέον ότι $f'(2, -1) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \end{pmatrix}$, βρείτε τις $g'(-1)$ και $h'(-1)$.

5. Θεωρήστε τις διαφορικές μορφές
$$\omega = x_1x_3\, dx_1 \wedge dx_2 + 3\, dx_1 \wedge dx_3 - x_1x_2\, dx_2 \wedge dx_3, \quad \eta = x_1\, dx_1 - x_2x_3^2\, dx_2 + 2x_1\, dx_3$$
στον $\mathbb{R}^3$. Επιβεβαιώστε με υπολογισμό το ότι
$$d(d\eta) = 0.$$
Γράψτε τον τύπο που συνδέει το $d(\omega \wedge \eta)$ με τα $d\omega$, $d\eta$ και επιβεβαιώστε τον με υπολογισμό.

6. Θεωρήστε την $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ με τύπο

$$(y_1, y_2, y_3) = f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, x_1 x_2)$$

και υπολογίστε τις διαφορικές 1-μορφές $f^*(dy_1)$, $f^*(dy_2)$, $f^*(dy_3)$ στον $\mathbb{R}^2$.
Θεωρήστε και την διαφορική 1-μορφή

$$\omega = y_2\, dy_1 + y_3\, dy_2 + y_1\, dy_3$$

στον $\mathbb{R}^3$ και επιβεβαιώστε την σχέση $f^*(d\omega) = d(f^*(\omega))$.

7. Θεωρήστε την στοιχειώδη 2-επιφάνεια c στον $\mathbb{R}^3$ με τύπο

$$c(s,t) = (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s), t), \qquad (s,t) \in [0,1]^2,$$

και την διαφορική 1-μορφή ω στον $\mathbb{R}^3$ με τύπο

$$\omega(x) = x_1\, dx_1 + x_2\, dx_2 + x_3\, dx_3, \qquad x \in \mathbb{R}^3.$$

Ποιό είναι το γεωμετρικό σχήμα της c και της ∂c;
Επαληθεύστε τον τύπο του Stokes για τα c, ω.

8. Έστω $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ και η διαφορική 1-μορφή ω στο A με τύπο

$$\omega(x) = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}\, dx_1 + \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}\, dx_2, \qquad x \in A.$$

(i) Αποδείξτε ότι η ω είναι κλειστή.
(ii) Αποδείξτε ότι η ω είναι ακριβής.
(iii) Θεωρήστε την στοιχειώδη 1-επιφάνεια (δηλαδή καμπύλη) c στο A με τύπο

$$c(t) = (3\cos(2\pi t), 7\sin(2\pi t)), \qquad t \in [0,1],$$

και υπολογίστε το

$$\int_c \omega$$

χωρίς να κάνετε πράξεις.