Μιχάλης Παπαδημητράκης

Μιγαδική Ανάλυση

Τμήμα Μαθηματικών

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Οι μιγαδικοί αριθμοί.

1.1 Οι μιγαδικοί αριθμοί.

Το σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών θεωρείται γνωστό. Κάθε μιγαδικός z γράφεται

$$z = (x, y) = x + iy \qquad \text{με } x, y \in \mathbb{R}.$$

Με τα γράμματα $x, y, u, v, \xi, \eta, a, b, \alpha, \beta, k, l, m, n$ θα συμβολίζουμε, συνήθως, πραγματικούς αριθμούς ενώ με τα z, w, ζ θα συμβολίζουμε, συνήθως, μιγαδικούς αριθμούς: $z = x + iy$, $w = u + iv$, $\zeta = \xi + i\eta$.

Στο $\mathbb{C}$ ορίζονται οι γνωστές πράξεις, η **πρόσθεση** και ο **πολλαπλασιασμός**, με τύπους

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Από εδώ προκύπτει η γνωστή ιδιότητα του αριθμού $i = (0, 1) = 0 + i1$:

$$i^2 = (0 + i1)(0 + i1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) + i(0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = -1 + i0 = -1.$$

Με άλλα λόγια, ο i είναι λύση της αλγεβρικής εξίσωσης $z^2 + 1 = 0$. Γνωρίζουμε, φυσικά, ότι η εξίσωση αυτή δεν έχει λύσεις στο $\mathbb{R}$.

Έχουμε και τις αντίστροφες πράξεις, **αφαίρεση** και **διαίρεση**, με τύπους

$$(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2),$$

$$\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2} + i\,\frac{-x_1y_2 + x_2y_1}{{x_2}^2 + {y_2}^2}.$$

Γνωρίζουμε, επίσης, ότι *δεν είναι δυνατό να ορίσουμε ανισοτικές σχέσεις στο* $\mathbb{C}$ με ιδιότητες παρόμοιες με τις ιδιότητες που έχουν οι γνωστές ανισοτικές σχέσεις στο $\mathbb{R}$. *Όταν γράφουμε $z < w$ ή $z \leq w$ θα εννοούμε ότι οι αριθμοί z, w είναι πραγματικοί και ότι οι σχέσεις $<$ και $\leq$ είναι οι γνωστές ανισοτικές σχέσεις στο $\mathbb{R}$.*

Σχόλιο. Το ότι στο $\mathbb{C}$ ορίζονται οι πράξεις πρόσθεση και πολλαπλασιασμός, οι οποίες, όπως μπορεί εύκολα κάποιος να διαπιστώσει, ικανοποιούν τις ίδιες βασικές αλγεβρικές ιδιότητες που έχουν οι αντίστοιχες πράξεις στο $\mathbb{R}$, σημαίνει ότι το $\mathbb{C}$ είναι, όπως και το $\mathbb{R}$, ένα **σώμα**.
Το ότι δεν ορίζονται ανισοτικές σχέσεις στο $\mathbb{C}$ σημαίνει ότι το $\mathbb{C}$ δεν είναι *διατεταγμένο* σώμα (σε αντίθεση με το $\mathbb{R}$).
Θα αποδείξουμε πολύ αργότερα ότι κάθε πολυωνυμική εξίσωση $a_nz^n + \cdots + a_1z + a_0 = 0$ με συντελεστές στο $\mathbb{C}$ και $n \geq 1$, $a_n \neq 0$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο $\mathbb{C}$. Αυτό σημαίνει ότι το $\mathbb{C}$ είναι ένα **αλγεβρικά κλειστό** σώμα (σε αντίθεση με το $\mathbb{R}$ στο οποίο η πολυωνυμική εξίσωση $x^2 + 1$ με συντελεστές στο $\mathbb{R}$ δεν έχει λύση στο $\mathbb{R}$).

Το $\mathbb{R}$ είναι υποσύνολο του $\mathbb{C}$, αφού κάθε πραγματικός αριθμός x γράφεται $x + i0$. Οι αριθμοί της μορφής $iy = 0 + iy$ (με $y \in \mathbb{R}$) ονομάζονται **φανταστικοί**.

Ο **συζυγής** του $z = x + iy$ είναι ο

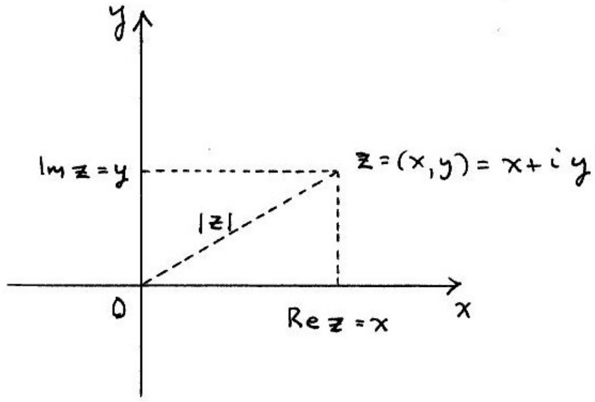
$$\overline{z} = x - iy.$$

Το **πραγματικό μέρος** και το **φανταστικό μέρος** του $z = x + iy$ είναι, αντιστοίχως, οι

$$\operatorname{Re} z = x, \qquad \operatorname{Im} z = y.$$

Δείτε το σχήμα 1. Τέλος, το **μέτρο** ή **απόλυτη τιμή** του $z = x + iy$ είναι ο αριθμός

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$



Σx 1.

Καταγράφουμε μερικές χρήσιμες σχέσεις:

$$\overline{\overline{z}} = z, \qquad \overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}, \qquad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}, \qquad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}},$$

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2}, \qquad \operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i},$$

$$\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2, \qquad \operatorname{Im}(z_1 + z_2) = \operatorname{Im} z_1 + \operatorname{Im} z_2,$$

$$|z| \geq 0, \qquad |z| = 0 \text{ αν και μόνο αν } z = 0,$$

$$|z|^2 = z\overline{z}, \qquad |\overline{z}| = |z|,$$

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

Όλες αυτές οι σχέσεις αποδεικνύονται πολύ εύκολα με λίγες πράξεις. Γράφουμε μερικές ακόμη χρήσιμες και απλές σχέσεις:

$$|\operatorname{Re} z| \leq |z|, \qquad |\operatorname{Im} z| \leq |z|, \qquad |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|,$$

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2.$$

Η τελευταία ισότητα γενικεύει την γνωστή ισότητα $|x_1 + x_2|^2 = |x_1|^2 + 2x_1x_2 + |x_2|^2$ που ισχύει για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

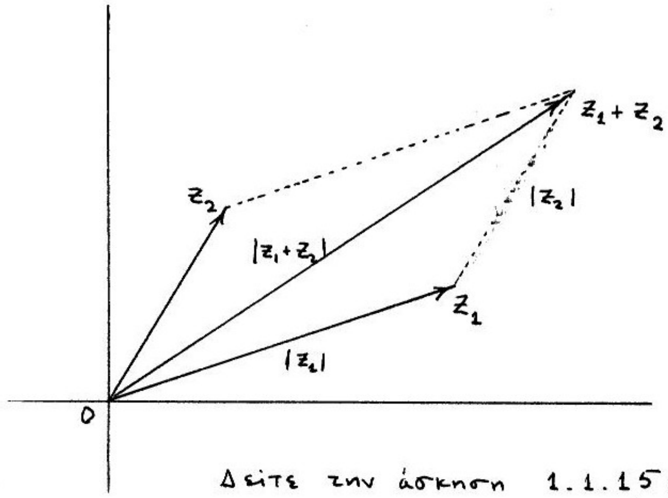
Τέλος, έχουμε την **τριγωνική ανισότητα**:

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Δείτε το σχήμα 2. Για παράδειγμα, η ανισότητα $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ αποδεικνύεται ως εξής:

$$\begin{aligned}|z_1 + z_2|^2 &= |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2|z_1\overline{z_2}| + |z_2|^2 = |z_1|^2 + 2|z_1||\overline{z_2}| + |z_2|^2 \\ &= |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2.\end{aligned}$$

Είναι, φυσικά, γνωστή η σχέση ανάμεσα στους μιγαδικούς αριθμούς και στα σημεία ενός επιπέδου. Αυτό, εξ άλλου, υπονοείται με τις ισότητες $z = (x, y) = x + iy$. Επομένως, ένα οποιοδήποτε επίπεδο σχήμα το οποίο περιγράφεται με σχέσεις που ικανοποιούν οι καρτεσιανές συντεταγμένες x, y του σημείου (x, y) μπορεί να περιγραφεί ισοδύναμα με σχέσεις που ικανοποιεί ο αντίστοιχος μιγαδικός $z = x + iy$.

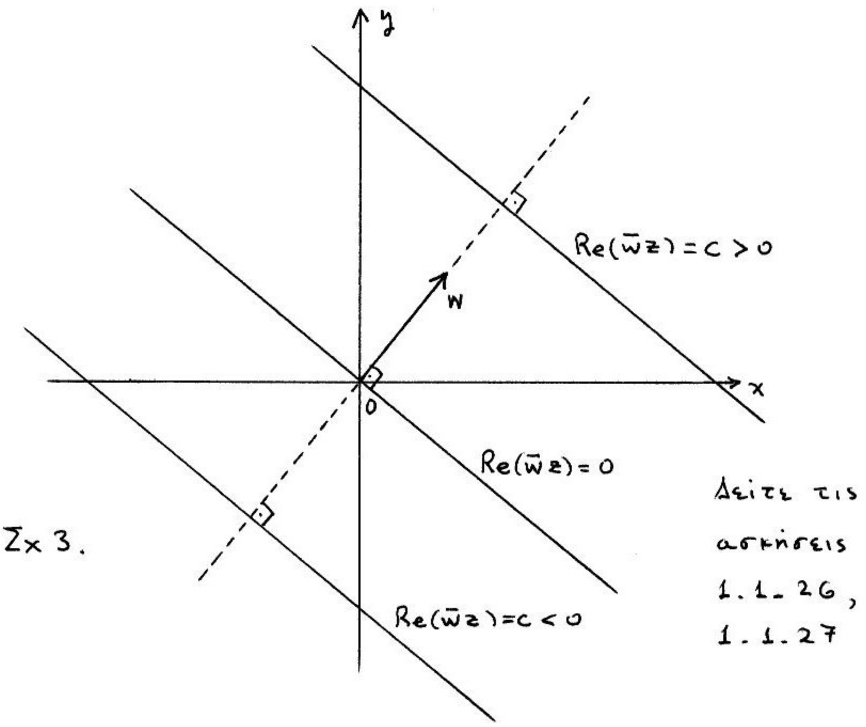


Σχ 2. Δείτε την άσκηση 1.1.15(α)

Για παράδειγμα, γνωρίζουμε ότι η οποιαδήποτε ευθεία στο επίπεδο έχει εξίσωση $ax + by = c$, όπου οι πραγματικοί a, b δεν είναι και οι δυο ίσοι με 0 και ο c είναι οποιοσδήποτε πραγματικός. Αν θέσουμε $z = x + iy$ και $w = a + ib$, τότε εύκολα βλέπουμε ότι η εξίσωση $ax + by = c$ παίρνει τη μορφή

$$\mathrm{Re}(\overline{w}z) = c,$$

όπου ο (μιγαδικός) w δεν είναι ίσος με 0 (και ο c είναι πραγματικός). Δείτε το σχήμα 3. Εννοείται ότι τα ημιεπίπεδα που καθορίζονται από τις ανισότητες $ax+by \geq c$ και $ax+by \leq c$ περιγράφονται ισοδύναμα από τις αντίστοιχες ανισότητες $\mathrm{Re}(\overline{w}z) \geq c$ και $\mathrm{Re}(\overline{w}z) \leq c$.



Σχ 3. Δείτε τις ασκήσεις 1.1.26, 1.1.27

Η Ευκλείδεια απόσταση ανάμεσα στα σημεία $z_1 = (x_1, y_1) = x_1 + iy_1$ και $z_2 = (x_2, y_2) = x_2 + iy_2$ είναι ίση με

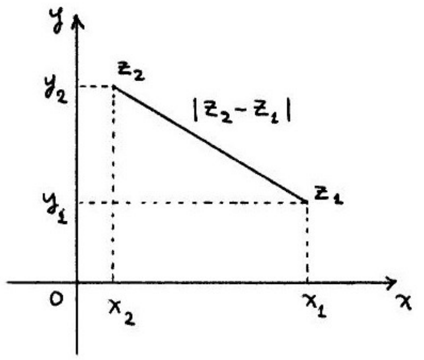
$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = |z_2 - z_1|.$$

Δείτε τα σχήματα 4 και 5. Επομένως, ο κύκλος $C(z_0; r)$ με κέντρο το σημείο $z_0 = (x_0, y_0) = x_0 + iy_0$ και ακτίνα $r > 0$ περιγράφεται με την εξίσωση $|z - z_0| = r$:

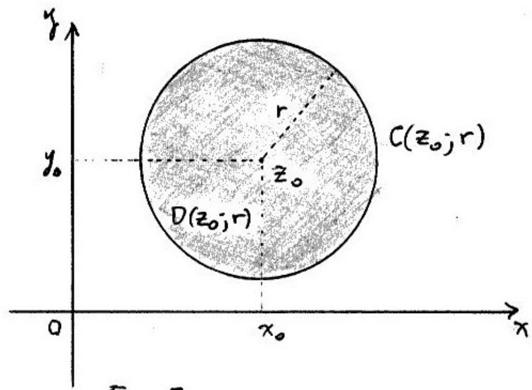
$$C(z_0; r) = \{z \mid |z - z_0| = r\}.$$

Φυσικά, ο αντίστοιχος ανοικτός δίσκος $D(z_0; r)$ περιγράφεται με την ανισότητα $|z - z_0| < r$ και ο κλειστός δίσκος με την $|z - z_0| \leq r$:

$$D(z_0; r) = \{z \mid |z - z_0| < r\}.$$



Σχ 4.



Σχ 5.

Τώρα, έστω οποιοσδήποτε μιγαδικός $z = x + iy \neq 0$. Θέτοντας

$$r = |z| > 0,$$

έχουμε ότι $(\frac{x}{r})^2 + (\frac{y}{r})^2 = 1$ και άρα, σύμφωνα με τις ιδιότητες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων που βλέπουμε στα μαθήματα της Ανάλυσης, υπάρχει ακριβώς ένας

$$\theta_0 \in (-\pi, \pi]$$

ώστε να ισχύει

$$\cos\theta_0 = \frac{x}{r}, \qquad \sin\theta_0 = \frac{y}{r}.$$

Τότε το σύνολο των θ που ικανοποιούν τις

$$\cos\theta = \frac{x}{r}, \qquad \sin\theta = \frac{y}{r} \tag{1.1}$$

αποτελείται από τους αριθμούς

$$\theta = \theta_0 + k2\pi \qquad \text{με } k \in \mathbb{Z}$$

και μόνο από αυτούς. Ο θ_0 ονομάζεται **πρωτεύον όρισμα** του z και κάθε $\theta = \theta_0 + k2\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$ ονομάζεται **όρισμα** του z. Άρα *ο z έχει άπειρα ορίσματα, τους όρους μιας αριθμητικής προόδου (δυο κατευθύνσεων) με βήμα 2π. Από τα ορίσματα του z ακριβώς ένα είναι το πρωτεύον όρισμα, εκείνο που περιέχεται στο $(-\pi, \pi]$.* Συμβολίζουμε $\operatorname{Arg} z$ το πρωτεύον όρισμα θ_0 του z και $\arg z$ κάθε όρισμα του z:

$$\operatorname{Arg} z = \theta_0, \qquad \arg z = \theta_0 + k2\pi = \operatorname{Arg} z + k2\pi \quad \text{με } k \in \mathbb{Z}.$$

Σύμφωνα με όσα είπαμε, και ειδικά σε σχέση με την (1.1), αν $z \neq 0$ και $\theta \in \mathbb{R}$, τότε

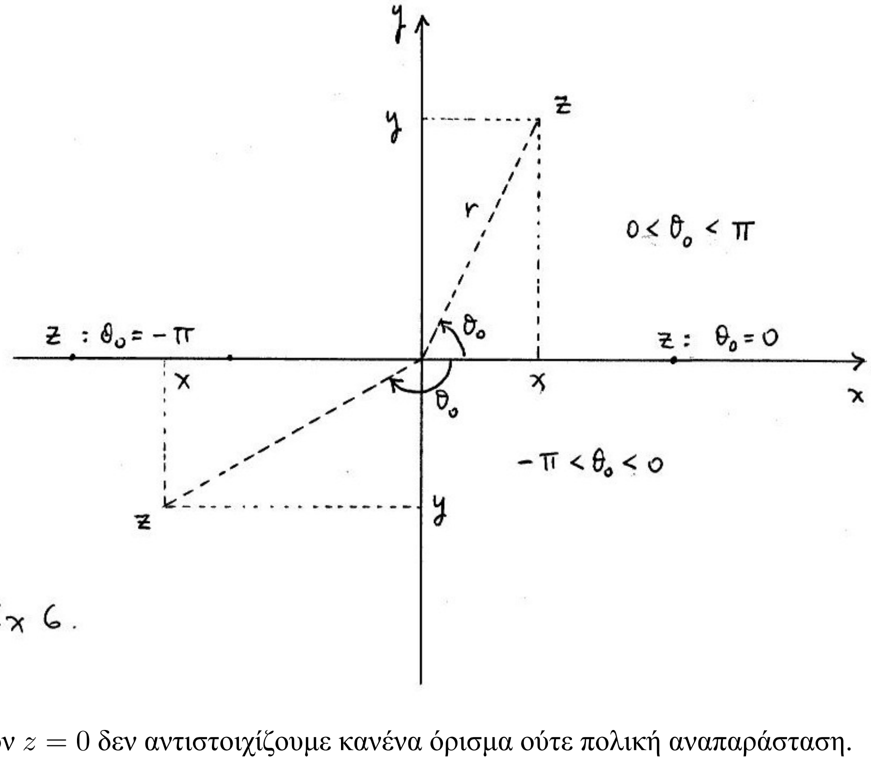
$$\text{ο } \theta \text{ είναι τιμή του } \arg z \qquad \Leftrightarrow \qquad z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \quad \text{με } r = |z| > 0.$$

Η γραφή $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ονομάζεται **πολική αναπαράσταση** του z. Επομένως, κάθε $z \neq 0$ έχει άπειρες πολικές αναπαραστάσεις με τον ίδιο r αλλά με άπειρους θ.

Το γεωμετρικό νόημα του $\theta_0 = \operatorname{Arg} z$ είναι το εξής. Αν το σημείο z δεν ανήκει στον αρνητικό x-άξονα, τότε θ_0 είναι το μέτρο της κυρτής γωνίας που σχηματίζει το διάνυσμα $\overrightarrow{0z}$ με τον θετικό x-άξονα, με θετικό πρόσημο αν το z είναι στο άνω ημιεπίπεδο και με αρνητικό πρόσημο αν το z είναι στο κάτω ημιεπίπεδο. Δείτε το σχήμα 6. Αν το z ανήκει στον θετικό x-άξονα, τότε προφανώς $\theta_0 = 0$. Αν το z ανήκει στον αρνητικό x-άξονα, τότε είναι $\theta_0 = \pi$. Δηλαδή θ_0 είναι το προσημασμένο μέτρο της κυρτής γωνίας που σχηματίζει το διάνυσμα $\overrightarrow{0z}$ με τον θετικό x-άξονα, με πρόσημο $+$ αν πηγαίνουμε από τον θετικό x-άξονα προς το $\overrightarrow{0z}$ με την θετική φορά περιστροφής (δηλαδή την αντίθετη προς τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού) και με πρόσημο $-$ αν πηγαίνουμε από τον θετικό x-άξονα προς το $\overrightarrow{0z}$ με την αρνητική φορά περιστροφής.
Για κάθε άλλη τιμή $\theta = \theta_0 + k2\pi$ του $\arg z$ ο λόγος

$$\frac{\theta - \theta_0}{2\pi} = k$$

εκφράζει τον αριθμό των επιπλέον πλήρων περιστροφών που πρέπει να κάνουμε (γύρω από το 0) ώστε να ξαναγυρίσουμε στο διάνυσμα $\overrightarrow{0z}$. Αν οι περιστροφές είναι με την θετική φορά, τότε $k > 0$ ενώ, αν οι περιστροφές είναι με την αρνητική φορά, τότε $k < 0$.



Σχόλιο. Στον $z = 0$ δεν αντιστοιχίζουμε κανένα όρισμα ούτε πολική αναπαράσταση.

Σχόλιο. Το ότι ονομάζουμε πρωτεύον όρισμα του z την (μοναδική) τιμή του $\arg z$ η οποία περιέχεται στο διάστημα $(-\pi, \pi]$ είναι καθαρά ζήτημα παραδοσιακής σύμβασης.
Αν I είναι ένα οποιοδήποτε διάστημα στο $\mathbb{R}$ μήκους 2π το οποίο περιέχει ακριβώς ένα από τα δύο άκρα του, τότε υπάρχει ακριβώς ένας $\theta_0 \in I$ ώστε να ισχύει $\cos\theta_0 = \frac{x}{r}$, $\sin\theta_0 = \frac{y}{r}$. Θα μπορούσαμε να ονομάσουμε αυτόν τον θ_0 πρωτεύον όρισμα του z και να τον συμβολίσουμε $\operatorname{Arg} z$. Ένα τέτοιο διάστημα εκτός του $(-\pi, \pi]$ είναι το $[0, 2\pi)$ και χρησιμοποιείται παραδοσιακά στη θέση του $(-\pi, \pi]$ σε πολλά βιβλία. Εμείς θα επιμείνουμε στο διάστημα $(-\pi, \pi]$ το οποίο χρησιμοποιείται ευρύτερα τώρα πια στα περισσότερα μαθηματικού περιεχομένου βιβλία και κυρίως σε μεταπτυχιακό επίπεδο.

Σχόλιο. Η αντιστοίχιση $z \mapsto \operatorname{Arg} z$ κάθε μιγαδικού $z \neq 0$ σε ακριβώς έναν αριθμό $\operatorname{Arg} z$ στο $(-\pi, \pi]$ ορίζει μια **συνάρτηση**

$$\operatorname{Arg} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to (-\pi, \pi].$$

Αντιθέτως, η αντιστοίχιση $z \mapsto \arg z$ κάθε μιγαδικού $z \neq 0$ σε άπειρους αριθμούς $\arg z$ στο $\mathbb{R}$ δεν ορίζει συνάρτηση με το νόημα που έχει αυτός ο όρος στα σύγχρονα μαθηματικά: συνάρτηση ονομάζουμε μια αντιστοίχιση στοιχείων του πεδίου ορισμού της σε στοιχεία του πεδίου τιμών της έτσι ώστε σε κάθε στοιχείο του πεδίου ορισμού να αντιστοιχεί *ακριβώς ένα* στοιχείο του πεδίου τιμών.
Οι παλιότεροι μαθηματικοί συνήθιζαν να θεωρούν ως συναρτήσεις και την $z \mapsto \operatorname{Arg} z$ αλλά και την $z \mapsto \arg z$. Την πρώτη την χαρακτήριζαν **μονότιμη συνάρτηση** ενώ την δεύτερη την ονόμαζαν **πλειότιμη συνάρτηση**.
Θα ξαναμιλήσουμε παρακάτω για πλειότιμες συναρτήσεις. Παίζουν κεντρικό ρόλο στην Μιγαδική Ανάλυση.

Σχόλιο. Αν θέλουμε να είμαστε μαθηματικά αυστηροί σχετικά με την έννοια του ορίσματος, μπορούμε να ορίσουμε το $\arg z$ όχι ως άπειρους αριθμούς αλλά ως *το* σύνολο αυτών των αριθμών:

$$\arg z = \{\theta \in \mathbb{R} \mid z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \text{ με } r = |z|\}.$$

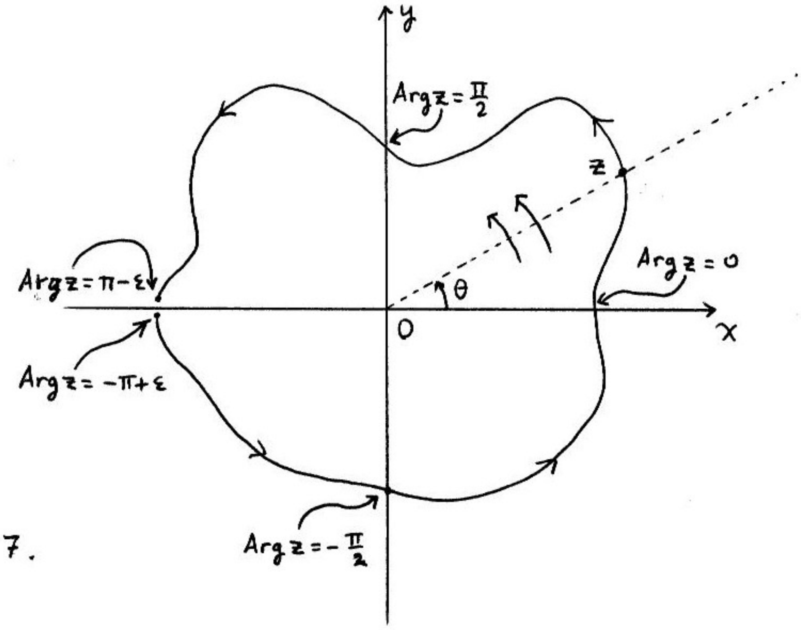
Έτσι, το $\arg z$ δεν είναι πολλά πράγματα συγχρόνως (πολλοί αριθμοί) αλλά ένα πράγμα (ένα σύνολο). Τότε το $\operatorname{Arg} z$ είναι απλώς ένα από τα στοιχεία του *συνόλου* $\arg z$.
Αυτή η αυστηρότητα δεν έχει να προσφέρει κάτι ουσιαστικό στην Μιγαδική Ανάλυση. Είναι τυπολατρική και δεν θα την υιοθετήσουμε.

Παράδειγμα 1.1.1. Κάθε $z = x > 0$ έχει πρωτεύον όρισμα $\operatorname{Arg} z = 0$ και ορίσματα $\arg z = k2\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$.
Κάθε $z = x < 0$ έχει πρωτεύον όρισμα $\operatorname{Arg} z = \pi$ και ορίσματα $\arg z = \pi + k2\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$.
Κάθε $z = iy$ με $y > 0$ έχει πρωτεύον όρισμα $\operatorname{Arg} z = \pi/2$ και ορίσματα $\arg z = \pi/2 + k2\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$.
Κάθε $z = iy$ με $y < 0$ έχει πρωτεύον όρισμα $\operatorname{Arg} z = -\pi/2$ και ορίσματα $\arg z = -\pi/2 + k2\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$.
Αν ο $z = x + iy$ είναι στο πρώτο τεταρτημόριο του επιπέδου (δηλαδή, αν $x, y > 0$), τότε έχει πρωτεύον όρισμα $\operatorname{Arg} z$ στο διάστημα $(0, \pi/2)$.
Αν ο $z = x + iy$ είναι στο δεύτερο τεταρτημόριο του επιπέδου (δηλαδή, αν $x < 0$, $y > 0$), τότε έχει πρωτεύον όρισμα $\operatorname{Arg} z$ στο διάστημα $(\pi/2, \pi)$.
Αν ο $z = x + iy$ είναι στο τρίτο τεταρτημόριο του επιπέδου (δηλαδή, αν $x < 0$, $y < 0$), τότε έχει πρωτεύον όρισμα $\operatorname{Arg} z$ στο διάστημα $(-\pi, -\pi/2)$.
Αν ο $z = x + iy$ είναι στο τέταρτο τεταρτημόριο του επιπέδου (δηλαδή, αν $x > 0$, $y < 0$), τότε έχει πρωτεύον όρισμα $\operatorname{Arg} z$ στο διάστημα $(-\pi/2, 0)$.

Παράδειγμα 1.1.2. Ο $z = 1 - i$ έχει μέτρο $|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.
Άρα $\frac{z}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$, οπότε το $\arg z$ είναι οι $\theta \in \mathbb{R}$ για τους οποίους ισχύει $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$,$\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Από αυτούς τους θ στο διάστημα $(-\pi, \pi]$ ανήκει μόνο ο $\theta_0 = -\frac{\pi}{4}$ και άρα

$$\operatorname{Arg} z = -\frac{\pi}{4}, \qquad \arg z = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \quad \text{με } k \in \mathbb{Z}.$$

Ας υποθέσουμε ότι ένα μεταβλητό σημείο z μετακινείται στο επίπεδο με την θετική φορά περιστροφής, δηλαδή με την φορά την αντίθετη προς τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού, σε σχέση με το σταθερό σημείο 0 και ας υποθέσουμε, επίσης, ότι το z ξεκινά από μια θέση πάρα πολύ κοντά στον αρνητικό x-άξονα από την κάτω μεριά του. Δείτε το σχήμα 7. Τότε η αρχική τιμή του $\text{Arg}\, z$ είναι πάρα πολύ κοντά στην τιμή $-\pi$ και λίγο μεγαλύτερη. Όσο το z περιστρέφεται τόσο η τιμή του $\text{Arg}\, z$ αυξάνεται. Όταν το z διασχίσει τον αρνητικό y-άξονα η τιμή του $\text{Arg}\, z$ θα περάσει από την τιμή $-\frac{\pi}{2}$, όταν το z διασχίσει τον θετικό x-άξονα η τιμή του $\text{Arg}\, z$ θα περάσει από την τιμή 0, όταν το z διασχίσει τον θετικό y-άξονα η τιμή του $\text{Arg}\, z$ θα περάσει από την τιμή $\frac{\pi}{2}$ και όταν το z φτάσει στον αρνητικό x-άξονα από την πάνω μεριά του η τιμή του $\text{Arg}\, z$ θα πάρει την τιμή π. Παρατηρήστε το εξής: αν έχουμε δύο πολύ κοντινά σημεία z_1, z_2 έτσι ώστε το z_1 να είναι πολύ λίγο κάτω από τον αρνητικό x-άξονα και το z_2 να είναι πολύ λίγο πάνω από τον αρνητικό x-άξονα, τότε η διαφορά $\text{Arg}\, z_2 - \text{Arg}\, z_1$ είναι πολύ κοντά στην τιμή $\pi - (-\pi) = 2\pi$. Βλέπετε, λοιπόν, ότι παρουσιάζεται ασυνέχεια της συνάρτησης $\text{Arg}\, z$ στα σημεία του αρνητικού x-άξονα με άλμα ίσο με 2π. Αυτό το θέμα θα το μελετήσουμε πιο διεξοδικά αργότερα.



Σχ 7.

Ένα άλλο θέμα είναι το εξής. *Δυο αριθμοί $z_1, z_2 \neq 0$ βρίσκονται πάνω στην ίδια ημιευθεία με κορυφή το 0 αν και μόνο αν τα $\arg z_1, \arg z_2$ έχουν τις ίδιες τιμές.*
Αυτό είναι γεωμετρικά προφανές και αποδεικνύεται αναλυτικά ως εξής. Έστω θ_1, θ_2 δυο τιμές των $\arg z_1, \arg z_2$, αντιστοίχως. Αυτό σημαίνει ότι

$$z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), \quad z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2).$$

Τώρα, τα $\arg z_1, \arg z_2$ έχουν τις ίδιες τιμές αν και μόνο αν οι θ_1, θ_2 διαφέρουν κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π αν και μόνο αν $\cos\theta_1 + i\sin\theta_1 = \cos\theta_2 + i\sin\theta_2$ αν και μόνο αν $\frac{z_1}{|z_1|} = \frac{z_2}{|z_2|}$ αν και μόνο αν $z_1 = tz_2$ με $t > 0$ αν και μόνο αν τα z_1, z_2 βρίσκονται πάνω στην ίδια ημιευθεία με κορυφή το 0.

Από τους γνωστούς τύπους των τριγωνομετρικών αριθμών αθροίσματος γωνιών βρίσκουμε με λίγες πράξεις ότι

$$(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = \cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2). \tag{1.2}$$

Με αυτήν την ισότητα και με την αρχή της επαγωγής αποδεικνύεται ο γνωστός **τύπος του de Moivre**:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Τέλος, για κάθε $z_1, z_2 \neq 0$ ισχύει

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \tag{1.3}$$

με την εξής έννοια: για κάθε τιμή θ_1 του $\arg z_1$ και κάθε τιμή θ_2 του $\arg z_2$, ο $\theta = \theta_1 + \theta_2$ είναι τιμή του $\arg(z_1z_2)$ και, αντιστρόφως, για κάθε τιμή θ του $\arg(z_1z_2)$ υπάρχει τιμή θ_1 του $\arg z_1$ και τιμή θ_2 του $\arg z_2$ ώστε $\theta = \theta_1 + \theta_2$. Ας το αποδείξουμε.
Κατ' αρχάς, έστω τιμή θ_1 του $\arg z_1$ και τιμή θ_2 του $\arg z_2$ και έστω $\theta = \theta_1 + \theta_2$. Τότε, σύμφωνα με την (1.2), έχουμε

$$\frac{z_1z_2}{|z_1z_2|} = \frac{z_1}{|z_1|}\,\frac{z_2}{|z_2|} = (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = \cos\theta + i\sin\theta$$

και άρα ο θ είναι τιμή του $\arg(z_1z_2)$.
Αντιστρόφως, έστω τιμή θ του $\arg(z_1z_2)$. Παίρνουμε μια οποιαδήποτε τιμή θ_1 του $\arg z_1$ και θεωρούμε τον $\theta_2 = \theta - \theta_1$. Τότε έχουμε αυτομάτως ότι $\theta = \theta_1 + \theta_2$, οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι ο θ_2 είναι τιμή του $\arg z_2$. Πράγματι, πάλι από την (1.2) έχουμε

$$(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = \cos\theta + i\sin\theta = \frac{z_1z_2}{|z_1z_2|} = \frac{z_1}{|z_1|}\,\frac{z_2}{|z_2|} = (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\,\frac{z_2}{|z_2|},$$

οπότε

$$\cos\theta_2 + i\sin\theta_2 = \frac{z_2}{|z_2|}$$

και άρα ο θ_2 είναι τιμή του $\arg z_2$.

Σχόλιο. *Δεν είναι σωστό* ότι η ισότητα (1.3) ισχύει με τις πρωτεύουσες τιμές των ορισμάτων. Δηλαδή, δεν είναι σωστό ότι η $\mathrm{Arg}(z_1z_2) = \mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2$ ισχύει για κάθε $z_1, z_2 \neq 0$.
Για παράδειγμα,

$$\mathrm{Arg}((-i)(-i)) = \mathrm{Arg}(-1) = \pi$$

αλλά

$$\mathrm{Arg}(-i) + \mathrm{Arg}(-i) = \Big(-\frac{\pi}{2}\Big) + \Big(-\frac{\pi}{2}\Big) = -\pi.$$

Ας δούμε τί σημαίνει η σχέση (1.3) για την πράξη του πολλαπλασιασμού. Όταν πολλαπλασιάζουμε τον z με τον w, τότε από τις σχέσεις

$$|zw| = |z||w|, \qquad \arg(zw) = \arg z + \arg w$$

συμπεραίνουμε ότι το μέτρο του $|z|$ πολλαπλασιάζεται με το μέτρο του w και το όρισμα του z αυξάνεται κατά το όρισμα του w. Με άλλα λόγια το διάνυσμα $\overrightarrow{0z}$ επιμηκύνεται κατά τον παράγοντα $|w|$ και, συγχρόνως, στρέφεται (ως προς το 0) με την θετική φορά περιστροφής και κατά γωνία ίση με οποιαδήποτε από τις τιμές του $\arg w$.

Ασκήσεις.

1.1.1. Αποδείξτε ότι $\mathrm{Re}(iz) = -\mathrm{Im}\, z$, $\mathrm{Im}(iz) = \mathrm{Re}\, z$, $\mathrm{Re}(z - \overline{z}) = 0$, $\mathrm{Im}(z + \overline{z}) = 0$.

1.1.2. Αποδείξτε ότι ο z είναι πραγματικός αν και μόνο αν $z = \overline{z}$.

1.1.3. Ποιές είναι οι λύσεις της $|z| = z$; της $|z| = iz$;

1.1.4. Έστω $z_1, z_2 \neq 0$. Αποδείξτε ότι $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ αν και μόνο αν υπάρχει $t > 0$ ώστε $z_2 = tz_1$.

1.1.5. Λύστε την εξίσωση $z^2 + z + 1 = 0$, ανάγοντάς την σε σύστημα δύο εξισώσεων με δύο πραγματικούς αγνώστους.

1.1.6. Αποδείξτε ότι $|\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z| \leq \sqrt{2}|z|$.

1.1.7. Αν $|z_3| \neq |z_4|$, αποδείξτε ότι $\frac{|z_1+z_2|}{|z_3+z_4|} \leq \frac{|z_1|+|z_2|}{||z_3|-|z_4||}$.

1.1.8. Αν $|z| < 1$, αποδείξτε ότι $|\operatorname{Im}(1 - \overline{z} + z^2)| < 2$.

1.1.9. Ποιά είναι η μέγιστη και ποιά η ελάχιστη τιμή του $|z^4 - 4z^2 + 3|$ όταν $|z| = 2$; όταν $|z| \leq 2$;

1.1.10. Αποδείξτε ότι $|z \pm w|^2 \leq (1 + |z|^2)(1 + |w|^2)$.

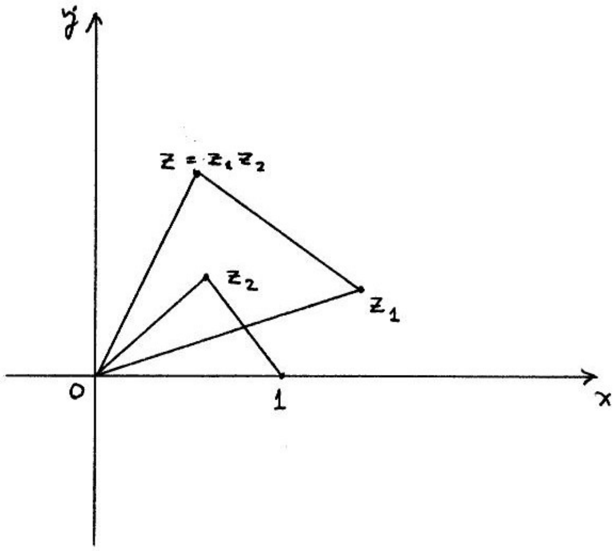
1.1.11. [α] Αποδείξτε ότι $|z - w| = |1 - \overline{w}z|$ αν και μόνο αν $|z| = 1$ ή $|w| = 1$.
[β] Αποδείξτε ότι $|z - w| < |1 - \overline{w}z|$ αν και μόνο αν $|z|, |w| < 1$ ή $|z|, |w| > 1$.

1.1.12. [α] Αποδείξτε ότι $|z - w| = |z - \overline{w}|$ αν και μόνο αν $\operatorname{Im} z = 0$ ή $\operatorname{Im} w = 0$.
[β] Αποδείξτε ότι $|z - w| < |z - \overline{w}|$ αν και μόνο αν $\operatorname{Im} z, \operatorname{Im} w < 0$ ή $\operatorname{Im} z, \operatorname{Im} w > 0$.

1.1.13. Ποιός είναι ο περιορισμός για τον w ώστε η εξίσωση $z + \overline{z} = w$ να έχει λύση; Ίδια ερώτηση για την εξίσωση $z - \overline{z} = w$. Πόσες λύσεις έχουν αυτές οι εξισώσεις αν ικανοποιούνται οι αντίστοιχοι περιορισμοί για τον w;

1.1.14. Ποιά είναι τα ορίσματα και το πρωτεύον όρισμα καθενός από τους $\pm(\sqrt{3} \pm i)$, $\pm(1 \pm \sqrt{3}i)$;

1.1.15. Εδώ έχουμε το γεωμετρικό νόημα των πράξεων στο $\mathbb{C}$.
[α] Αποδείξτε το εξής γνωστό: ισχύει $z_1 + z_2 = z$ αν και μόνο αν $\overrightarrow{0z_1} + \overrightarrow{0z_2} = \overrightarrow{0z}$.
[β] Δείτε το σχήμα 8. Έστω $z_1, z_2 \neq 0$ και $z_2 \neq 1$. Αποδείξτε ότι $z_1 z_2 = z$ αν και μόνο αν το τρίγωνο $\Delta(0, z_1, z)$ είναι όμοιο με το τρίγωνο $\Delta(0, 1, z_2)$. Πώς ακριβώς πρέπει να εννοήσουμε την ομοιότητα των δύο τριγώνων;



Σχ 8.

1.1.16. Ποιοί είναι γεωμετρικά οι z ώστε ο $\frac{\pi}{4}$ ή ο $-\frac{\pi}{4}$ να είναι τιμή του $\arg z$;

1.1.17. Ποιοί είναι γεωμετρικά οι z ώστε ο π να είναι τιμή του $\arg(z^2)$; του $\arg(z^3)$; του $\arg(z^4)$;

1.1.18. Βρείτε ένα διάστημα J του $\mathbb{R}$ τα στοιχεία του οποίου είναι τιμές του $\arg z$ για κάθε z με την ιδιότητα $\operatorname{Re} z > 0$. Πόσα τέτοια J υπάρχουν και ποιά είναι αυτά; Κάντε το ίδιο για καθεμία από τις $\operatorname{Im} z < 0$, $\operatorname{Im} z > 0$, $\operatorname{Re} z < 0$ αντί της $\operatorname{Re} z > 0$.

1.1.19. Αποδείξτε ότι:

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \begin{cases} \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2, & \text{αν } -\pi < \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 \leq \pi \\ \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 + 2\pi, & \text{αν } -2\pi < \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 \leq -\pi \\ \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 - 2\pi, & \text{αν } \pi < \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 \leq 2\pi \end{cases}$$

Υπάρχουν άλλες περιπτώσεις για την τιμή του $\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$;

1.1.20. Έστω $z_1, z_2 \neq 0$. Αποδείξτε ότι $\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$ και εξηγήστε.

1.1.21. Με τον τύπο του de Moivre αποδείξτε ότι

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta, \qquad \sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta,$$
$$\cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1, \qquad \sin 4\theta = 4\cos\theta\sin\theta - 8\cos\theta\sin^3\theta.$$

1.1.22. Βάσει της $1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \begin{cases} (z^{n+1}-1)/(z-1), & \text{αν } z \neq 1 \\ n+1, & \text{αν } z = 1 \end{cases}$ βρείτε τύπους για τα αθροίσματα

$$1 + r\cos\theta + r^2\cos 2\theta + \cdots + r^n\cos n\theta, \qquad r\sin\theta + r^2\sin 2\theta + \cdots + r^n\sin n\theta$$

με $r \geq 0$.

1.1.23. Υπάρχει μια ευθεία l ώστε, για κάθε z, τα σημεία z, $\overline{z}$ να είναι συμμετρικά ως προς την l. Ποιά είναι η l; Ίδια ερώτηση για τα z, $-\overline{z}$, για τα z, $i\overline{z}$ και για τα z, $-i\overline{z}$.

1.1.24. Περιγράψτε τα σύνολα $\{z \,|\, |z| < 1, |z-i| < 1\}$, $\{z \,|\, |z| < 1, \mathrm{Im}\, z > 0, |z-i| > 1\}$.

1.1.25. Για καθεμιά από τις παρακάτω σχέσεις περιγράψτε το σύνολο των z που την ικανοποιούν: $z + \overline{z} = 1$, $i(z - \overline{z}) \leq 2$, $2i(\overline{z} - z) + |z|^2 + 1 \leq 0$, $(2-i)z + (2+i)\overline{z} = -2$, $|z^2 - 1| = 1$, $|z| + \mathrm{Re}\, z \leq 1$.

1.1.26. Αν $z, w \neq 0$, αποδείξτε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{0z}, \overrightarrow{0w}$ είναι κάθετα αν και μόνο αν $\mathrm{Re}(\overline{w}z) = 0$.

1.1.27. [α] Αν $w \neq 0$, σε ποιό από τα ημιεπίπεδα που περιγράφονται από τις $\mathrm{Re}(\overline{w}z) \leq 0$ και $\mathrm{Re}(\overline{w}z) \geq 0$ ανήκει ο w και σε ποιό ο $-w$;

[β] Αν $w \neq 0$, αποδείξτε ότι το διάνυσμα $\overrightarrow{0w}$ είναι κάθετο στην ευθεία με εξίσωση $\mathrm{Re}(\overline{w}z) = c$. Πώς μεταβάλλεται αυτή η ευθεία όταν ο c αυξάνεται στο $(-\infty, +\infty)$;

[γ] Αν $w \neq 0$ και $c_1 \leq c_2$, περιγράψτε το σύνολο των z για τους οποίους ισχύει $c_1 \leq \mathrm{Re}(\overline{w}z) \leq c_2$.

[δ] Αν $w, w' \neq 0$, αποδείξτε ότι οι $\mathrm{Re}(\overline{w}z) = c$, $\mathrm{Re}(\overline{w'}z) = c'$ είναι εξισώσεις της ίδιας ευθείας αν και μόνο αν υπάρχει $t \in \mathbb{R}$ ώστε $w' = tw$, $c' = tc$.

[ε] Αν $w, w' \neq 0$, αποδείξτε ότι οι $\mathrm{Re}(\overline{w}z) = c$, $\mathrm{Re}(\overline{w'}z) = c'$ είναι εξισώσεις παράλληλων ευθειών αν και μόνο αν υπάρχει $t \in \mathbb{R}$ ώστε $w' = tw$.

[στ] Αν $w, w' \neq 0$, θεωρήστε την ευθεία με εξίσωση $\mathrm{Re}(\overline{w}z) = c$ και το ημιεπίπεδο που περιγράφεται από την $\mathrm{Re}(\overline{w'}z) \geq c'$. Ποιά είναι η (ικανή και αναγκαία) συνθήκη ώστε η ευθεία να είναι υποσύνολο του ημιεπιπέδου;

1.1.28. Για κάθε $\alpha > 0$, περιγράψτε το σύνολο των z με την ιδιότητα $|\frac{z-1}{z+1}| = \alpha$. Πώς μεταβάλλεται αυτό το σύνολο όταν ο α αυξάνεται στο $(0, +\infty)$; Πώς πρέπει να εννοήσουμε τις "οριακές" περιπτώσεις $\alpha = 0$ και $\alpha = +\infty$;

1.1.29. Για κάθε α, περιγράψτε το σύνολο των z με την ιδιότητα $\mathrm{Re}(z^2) = \alpha$. Πώς μεταβάλλεται αυτό το σύνολο όταν ο α αυξάνεται στο $(-\infty, +\infty)$; Ίδια ερώτηση για τη σχέση $\mathrm{Im}(z^2) = \alpha$.

1.1.30. [α] Αποδείξτε ότι τρία ανά δύο διαφορετικά σημεία z_1, z_2, z_3 ανήκουν στην ίδια ευθεία αν και μόνο αν ο $\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$ είναι πραγματικός.

[β] Αποδείξτε ότι τέσσερα ανά δύο διαφορετικά σημεία z_1, z_2, z_3, z_4 ανήκουν στην ίδια ευθεία ή στον ίδιο κύκλο αν και μόνο αν ο $\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1} \frac{z_2-z_4}{z_3-z_4}$ είναι πραγματικός.

1.1.31. Έστω $w = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Βρείτε ένα διάστημα J του $\mathbb{R}$ τα στοιχεία του οποίου είναι τιμές του $\arg z$ για κάθε z στην ευθεία με εξίσωση $\mathrm{Re}(\overline{w}z) = 3$. Πόσα τέτοια J υπάρχουν και ποιά είναι αυτά; Κάντε το ίδιο για την $\mathrm{Re}(\overline{w}z) = -3$ αντί της $\mathrm{Re}(\overline{w}z) = 3$.

1.1.32. Βρείτε ένα διάστημα J του $\mathbb{R}$ τα στοιχεία του οποίου είναι τιμές του $\arg z$ για κάθε z στον κύκλο με εξίσωση $|z-1| = \frac{1}{2}$. Πόσα τέτοια J υπάρχουν και ποιά είναι αυτά; Κάντε το ίδιο για τους κύκλους με εξισώσεις $|z-i| = \frac{1}{2}$, $|z+i| = \frac{1}{2}$, $|z+1| = \frac{1}{2}$.

1.1.33. Αν ισχύει $\mathrm{Re}(z^n) \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αποδείξτε ότι $z \geq 0$.

1.2 Το $\widehat{\mathbb{C}}$, η στερεογραφική προβολή και η σφαίρα του Riemann.

Στο σύνολο $\mathbb{C}$ επισυνάπτουμε ένα ακόμη στοιχείο, όχι μιγαδικό αριθμό, το ∞, το οποίο ονομάζουμε **άπειρο**, και σχηματίζουμε το σύνολο

$$\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Το $\widehat{\mathbb{C}}$ ονομάζεται **επεκτεταμένο** $\mathbb{C}$.

Μπορούμε να πούμε ότι το ∞ συμβολίζει το νοητό σημείο προς το οποίο κινείται ένα μεταβλητό σημείο z επί του μιγαδικού επιπέδου που απομακρύνεται απεριόριστα από οποιοδήποτε σταθερό σημείο (το 0, για παράδειγμα) του επιπέδου. *Προσέξτε τη διαφορά με τα* $\pm\infty$ *που επισυνάπτουμε στο* $\mathbb{R}$. Ένα μεταβλητό σημείο x επί της πραγματικής ευθείας απομακρύνεται απεριόριστα από τον 0 προς ακριβώς δυο συγκεκριμένες κατευθύνσεις: είτε προς τα δεξιά, οπότε λέμε ότι κινείται *προς το* $+\infty$, είτε προς τα αριστερά, οπότε λέμε ότι κινείται *προς το* $-\infty$. Όμως, στο επίπεδο δεν υπάρχουν δυο συγκεκριμένες κατευθύνσεις. Ένα σημείο μπορεί να απομακρύνεται είτε πάνω σε ημιευθείες (δηλαδή, προς άπειρες κατευθύνσεις) είτε κάνοντας οποιαδήποτε "σπειροειδή κίνηση" είτε με οποιονδήποτε άλλο αυθαίρετο τρόπο. Γι αυτό, απλώς, λέμε ότι το σημείο κινείται *προς το άπειρο*.

Κατόπιν, ορίζουμε επιπλέον πράξεις στο $\widehat{\mathbb{C}}$ ως εξής:

1. Άθροισμα: $z + \infty = \infty$ και $\infty + z = \infty$.

2. Αντίθετο στοιχείο: $-\infty = \infty$.

3. Διαφορά: $z - \infty = \infty$ και $\infty - z = \infty$.

4. Γινόμενο: $z \cdot \infty = \infty$ και $\infty \cdot z = \infty$ αν $z \neq 0$. Επίσης, $\infty \cdot \infty = \infty$.

5. Αντίστροφο: $\frac{1}{\infty} = 0$ και $\frac{1}{0} = \infty$.

6. Λόγος: $\frac{z}{\infty} = 0$ και $\frac{\infty}{z} = \infty$.

7. Συζυγές: $\overline{\infty} = \infty$.

8. Μέτρο: $|\infty| = +\infty$.

Δεν ορίζονται αποτελέσματα για τις παραστάσεις

$$\infty + \infty, \quad \infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty \cdot 0, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}$$

και χαρακτηρίζονται **απροσδιόριστες μορφές**.

Σχόλιο. Προσέξτε ιδιαιτέρως την περίπτωση του $\frac{1}{0} = \infty$. Στο $\mathbb{R}$ η παράσταση $\frac{1}{0}$ είναι απροσδιόριστη μορφή, διότι όταν ο πραγματικός αριθμός x είναι μικρός και > 0 τότε ο $\frac{1}{x}$ είναι μεγάλος και > 0, οπότε ο $\frac{1}{x}$ κινείται προς το $+\infty$, και όταν ο πραγματικός αριθμός x είναι μικρός και < 0 τότε ο $\frac{1}{x}$ είναι μεγάλος και < 0, οπότε ο $\frac{1}{x}$ κινείται προς το $-\infty$. Όμως, στο $\mathbb{C}$ το πρόσημο δεν παίζει τον ίδιο ρόλο που παίζει στο $\mathbb{R}$. Στο $\mathbb{C}$ μόνο το μέτρο του αριθμού $\frac{1}{z}$ παίζει ρόλο και βλέπουμε ότι όταν ο z είναι πολύ μικρός, δηλαδή όταν το $|z|$ είναι πολύ μικρό (και αναγκαστικά > 0), τότε η απόσταση $|\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|}$ του $\frac{1}{z}$ από το 0 είναι πολύ μεγάλη και θετική, και, επομένως, ο $\frac{1}{z}$ πλησιάζει το ∞. Γι αυτό ορίζουμε $\frac{1}{0} = \infty$.

Θεωρούμε τον τρισδιάστατο χώρο $\mathbb{R}^3$ και, μέσα σ' αυτόν, το διδιάστατο επίπεδο $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Συμβολίζουμε $A = (\xi, \eta, \zeta)$ τα σημεία του $\mathbb{R}^3$ και $z = x + iy = (x, y) = (x, y, 0)$ τα σημεία του $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Σιωπηρά, ταυτίζουμε τον ξ-άξονα με τον x-άξονα και τον η-άξονα με τον y-άξονα, ενώ ο ζ-άξονας είναι κατακόρυφος και κάθετος στο επίπεδο $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

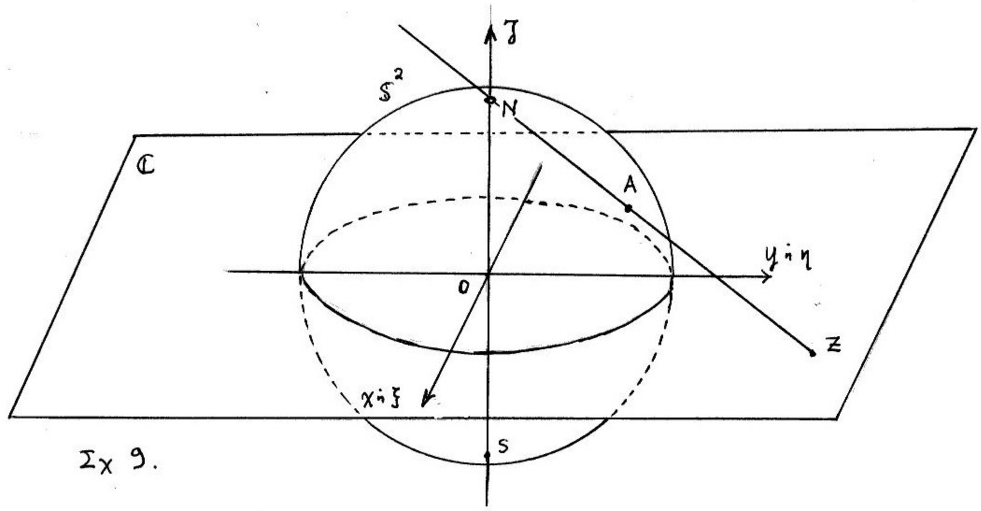
Θεωρούμε, επίσης, την μοναδιαία σφαίρα

$$\mathbb{S}^2 = \{(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 \,|\, \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1\}$$

του $\mathbb{R}^3$. Ένα χαρακτηριστικό σημείο της σφαίρας $\mathbb{S}^2$ είναι ο "βόρειος πόλος"

$$N = (0, 0, 1).$$

Παίρνουμε οποιοδήποτε σημείο $z = x + iy$ του $\mathbb{C}$ και θεωρούμε την ευθεία Nz που περιέχει το N και το z. Η ευθεία αυτή τέμνει την $\mathbb{S}^2$ στο σημείο N. Αυτό είναι προφανές. Τώρα θα δούμε ότι υπάρχει και δεύτερο σημείο τομής $A = (\xi, \eta, \zeta)$ της ευθείας Nz με την $\mathbb{S}^2$. Δείτε το σχήμα 9.



Σχ 9.

Το ότι το $A = (\xi, \eta, \zeta)$ βρίσκεται στην εν λόγω ευθεία εκφράζεται ισοδύναμα ως εξής:

$$\overrightarrow{NA} = t \cdot \overrightarrow{Nz} \qquad \text{με } t \in \mathbb{R}.$$

Γράφοντας αυτήν την ισότητα με συντεταγμένες, έχουμε ισοδύναμα:

$$\begin{aligned} \xi - 0 &= t(x - 0) \\ \eta - 0 &= t(y - 0) \\ \zeta - 1 &= t(0 - 1) \end{aligned} \tag{1.4}$$

Το ότι το $A = (\xi, \eta, \zeta)$ βρίσκεται στην σφαίρα $\mathbb{S}^2$ εκφράζεται με συντεταγμένες, ισοδύναμα:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1. \tag{1.5}$$

Το ότι το $A = (\xi, \eta, \zeta)$ είναι σημείο τομής της ευθείας Nz και της σφαίρας $\mathbb{S}^2$ ισοδυναμεί με το ότι η τετράδα (ξ, η, ζ, t) είναι λύση του συστήματος των τεσσάρων εξισώσεων (1.4) και (1.5). Τώρα, από τις (1.4) συνεπάγεται

$$\xi = tx, \quad \eta = ty, \quad \zeta = 1 - t \tag{1.6}$$

και με αυτές τις ισότητες η (1.5) δίνει

$$t^2(x^2 + y^2 + 1) = 2t.$$

Συνεπάγεται

$$t = 0 \quad \text{ή} \quad t = \tfrac{2}{x^2+y^2+1}.$$

Με $t = 0$ οι (1.6) δίνουν το σημείο

$$A = N = (0, 0, 1)$$

και με $t = \frac{2}{x^2+y^2+1}$ οι (1.6) δίνουν το σημείο

$$A = \Big(\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\Big). \tag{1.7}$$

Ελέγχουμε ότι, πράγματι, οι δυο τετράδες είναι λύσεις του συστήματος των (1.4) και (1.5) και συμπεραίνουμε ότι το σημείο A, που δίνεται από την (1.7), είναι το δεύτερο σημείο τομής, εκτός του N, της ευθείας Nz με την $\mathbb{S}^2$.

Έτσι έχουμε την απεικόνιση

$$\mathbb{C} \ni z = x+iy \quad \longmapsto \quad A = (\xi, \eta, \zeta) = \Big(\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\Big) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$$

από το $\mathbb{C}$ στο $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$.

Μπορεί κανείς να ελέγξει εύκολα ότι η απεικόνιση αυτή είναι ένα-προς-ένα και ότι είναι επί του $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ και ότι η αντίστροφη απεικόνιση είναι η

$$\mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \ni A = (\xi, \eta, \zeta) \quad \longmapsto \quad z = x + iy = \frac{\xi}{1-\zeta} + i\frac{\eta}{1-\zeta} \in \mathbb{C}.$$

Η πρώτη απεικόνιση είναι η **στερεογραφική προβολή από το** $\mathbb{C}$ **στο** $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ και η δεύτερη απεικόνιση, η αντίστροφη της πρώτης, είναι η **στερεογραφική προβολή από το** $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ **στο** $\mathbb{C}$. Όταν λέμε **στερεογραφική προβολή** εννοούμε οποιαδήποτε από τις δυο αυτές απεικονίσεις και γράφουμε

$$\mathbb{C} \quad \longleftrightarrow \quad \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}.$$

Παράδειγμα 1.2.1. Το σημείο $z = 0$ απεικονίζεται μέσω της στερεογραφικής προβολής στον νότιο πόλο $S = (0, 0, -1)$ της $\mathbb{S}^2$ και αντιστρόφως.

Τα σημεία $z = x + iy$ εκτός του μοναδιαίου κύκλου, δηλαδή εκείνα με $|z| > 1$, απεικονίζονται μέσω της στερεογραφικής προβολής στα σημεία $A = (\xi, \eta, \zeta)$ του βόρειου ημισφαιρίου της $\mathbb{S}^2$, δηλαδή σε εκείνα με $0 < \zeta < 1$, και αντιστρόφως. (Παραλείπουμε το $\zeta = 1$ διότι αντιστοιχεί στον βόρειο πόλο N.)

Τα σημεία $z = x + iy$ εντός του μοναδιαίου κύκλου, δηλαδή εκείνα με $|z| < 1$, απεικονίζονται μέσω της στερεογραφικής προβολής στα σημεία $A = (\xi, \eta, \zeta)$ του νότιου ημισφαιρίου της $\mathbb{S}^2$, δηλαδή σε εκείνα με $-1 \leq \zeta < 0$, και αντιστρόφως.

Τέλος, τα σημεία $z = x+iy$ επί του μοναδιαίου κύκλου, δηλαδή εκείνα με $|z| = 1$, απεικονίζονται μέσω της στερεογραφικής προβολής στα σημεία $A = (\xi, \eta, \zeta)$ του ισημερινού της $\mathbb{S}^2$, δηλαδή σε εκείνα με $\zeta = 0$, και αντιστρόφως. Μάλιστα, σ' αυτήν την περίπτωση τα δυο σημεία z και A ταυτίζονται.

Τέλος, θα πούμε μερικά πράγματα για τη *συνέχεια* της στερεογραφικής προβολής.

Κατ' αρχάς πρέπει να πούμε ότι στους Ευκλείδειους χώρους $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$ (αλλά και σε μεγαλύτερης διάστασης Ευκλείδειους χώρους) ισχύει ότι:

Ένα σημείο συκλίνει σε ένα άλλο (σταθερό) σημείο αν και μόνο αν οι συντεταγμένες του πρώτου σημείου συγκλίνουν στις αντίστοιχες συντεταγμένες του δεύτερου σημείου.

Πράγματι, στην περίπτωση του $\mathbb{R}^2$ αυτό αποδεικνύεται μέσω των ανισοτήτων:

$$0 \leq |x - x_0|, |y - y_0| \leq \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \leq |x - x_0| + |y - y_0|. \tag{1.8}$$

Αν το σημείο (x, y) συγκλίνει στο (x_0, y_0), η απόσταση $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ τείνει στο 0 και από τις αριστερές ανισότητες (1.8) συνεπάγεται ότι οι $|x - x_0|$, $|y - y_0|$ τείνουν στο 0 και,

επομένως, ο x συγκλίνει στον x_0 και ο y συγκλίνει στον y_0. Αντιστρόφως, αν ο x συγκλίνει στον x_0 και ο y συγκλίνει στον y_0, τότε οι $|x-x_0|$, $|y-y_0|$ τείνουν στο 0, οπότε από την δεξιά ανισότητα (1.8) συνεπάγεται ότι η απόσταση $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ τείνει στο 0 και, επομένως, το σημείο (x,y) συγκλίνει στο (x_0,y_0).
Η απόδειξη είναι παρόμοια στην περίπτωση του χώρου $\mathbb{R}^3$.

Για τη στερεογραφική προβολή, αν το σημείο $z=x+iy$ συγκλίνει στο σημείο $z_0=x_0+iy_0$, τότε $x\to x_0$ και $y\to y_0$, οπότε, λόγω συνέχειας των ρητών συναρτήσεων δυο μεταβλητών,

$$\frac{2x}{x^2+y^2+1}\to\frac{2x_0}{{x_0}^2+{y_0}^2+1},\qquad \frac{2y}{x^2+y^2+1}\to\frac{2y_0}{{x_0}^2+{y_0}^2+1},$$

$$\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\to\frac{{x_0}^2+{y_0}^2-1}{{x_0}^2+{y_0}^2+1}$$

και, επομένως, το σημείο $A=(\xi,\eta,\zeta)$ που αντιστοιχεί στο $z=x+iy$ συγκλίνει στο σημείο $A_0=(\xi_0,\eta_0,\zeta_0)$ που αντιστοιχεί στο $z_0=x_0+iy_0$.
Αντιστρόφως, αν το σημείο $A=(\xi,\eta,\zeta)$ στο $\mathbb{S}^2\setminus\{N\}$ συγκλίνει στο σημείο $A_0=(\xi_0,\eta_0,\zeta_0)$ στο $\mathbb{S}^2\setminus\{N\}$ (οπότε το A_0 δεν είναι ο βόρειος πόλος N και, επομένως, $\zeta_0\neq 1$), τότε $\xi\to\xi_0$ και $\eta\to\eta_0$ και $\zeta\to\zeta_0$, οπότε και πάλι λόγω συνέχειας των ρητών συναρτήσεων δυο μεταβλητών,

$$\frac{\xi}{1-\zeta}\to\frac{\xi_0}{1-\zeta_0},\qquad \frac{\eta}{1-\zeta}\to\frac{\eta_0}{1-\zeta_0},$$

οπότε το σημείο $z=x+iy$ που αντιστοιχεί στο $A=(\xi,\eta,\zeta)$ συγκλίνει στο σημείο $z_0=x_0+iy_0$ που αντιστοιχεί στο $A=(\xi_0,\eta_0,\zeta_0)$.

Ας δούμε τώρα τί ισχύει σε σχέση με τον βόρειο πόλο N. Παρατηρούμε ότι, αν το μέτρο του $z=x+iy$ (δηλαδή η απόστασή του από το 0) τείνει στο $+\infty$, δηλαδή $|z|\to+\infty$, τότε

$$\frac{2x}{x^2+y^2+1}\to 0,\qquad \frac{2y}{x^2+y^2+1}\to 0,\qquad \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\to 1. \tag{1.9}$$

Πράγματι,

$$0\leq\Big|\frac{2x}{x^2+y^2+1}\Big|\leq\frac{2|z|}{|z|^2+1}\to 0,\qquad 0\leq\Big|\frac{2y}{x^2+y^2+1}\Big|\leq\frac{2|z|}{|z|^2+1}\to 0,$$

$$0\leq\Big|\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}-1\Big|=\frac{2}{x^2+y^2+1}=\frac{2}{|z|^2+1}\to 0$$

όταν $|z|\to+\infty$.
Από τις (1.9) βλέπουμε ότι το σημείο $A=(\xi,\eta,\zeta)$ που αντιστοιχεί στο $z=x+iy$ συγκλίνει στον βόρειο πόλο $N=(0,0,1)$.
Αντιστρόφως, αν το σημείο $A=(\xi,\eta,\zeta)$ στο $\mathbb{S}^2\setminus\{N\}$ συγκλίνει στον βόρειο πόλο $N=(0,0,1)$, δηλαδή αν $\xi\to 0$ και $\eta\to 0$ και $\zeta\to 1$ (προσέξτε ότι $\zeta\to 1-$), τότε

$$x^2+y^2=\frac{\xi^2}{(1-\zeta)^2}+\frac{\eta^2}{(1-\zeta)^2}=\frac{\xi^2+\eta^2}{(1-\zeta)^2}=\frac{1-\zeta^2}{(1-\zeta)^2}=\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\to+\infty$$

και, επομένως, το σημείο $z=x+iy$ που αντιστοιχεί στο $A=(\xi,\eta,\zeta)$ έχει την ιδιότητα το μέτρο του να τείνει στο $+\infty$.

Τώρα δίνουμε τον εξής ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Λέμε ότι*

$$z\to\infty$$

αν $|z|\to+\infty$.

Ο ορισμός αυτός είναι φυσιολογικός, αφού από την αρχή είπαμε ότι το ∞ συμβολίζει το νοητό σημείο προς το οποίο κινείται ένα μεταβλητό σημείο z επί του μιγαδικού επιπέδου που απομακρύνεται απεριόριστα από το σημείο 0 του επιπέδου.

Βάσει αυτού ακριβώς του ορισμού και της προηγηθείσας συζήτησης, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι

Το σημείο z τείνει στο ∞ αν και μόνο αν το αντίστοιχο σημείο $A = (\xi, \eta, \zeta)$ τείνει στον βόρειο πόλο $N = (0, 0, 1)$.

Μετά από όλα τα προηγούμενα, είναι πια "φυσιολογικό" να επεκτείνουμε την στερεογραφική προβολή ώστε να συμπεριλάβουμε τα εξής δυο σημεία: το σημείο ∞ που λείπει από το $\mathbb{C}$ ώστε να συμπληρωθεί το $\widehat{\mathbb{C}}$ και το σημείο N που λείπει από το $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ ώστε να συμπληρωθεί η σφαίρα $\mathbb{S}^2$. Η επέκταση γίνεται ορίζοντας πολύ απλά ότι τα σημεία ∞ του $\widehat{\mathbb{C}}$ και N της $\mathbb{S}^2$ αντιστοιχούν το ένα στο άλλο. Άρα η αρχική στερεογραφική προβολή

$$\mathbb{C} \quad \longleftrightarrow \quad \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$$

επεκτείνεται ως στερεογραφική προβολή

$$\mathbb{C} \cup \{\infty\} \quad \longleftrightarrow \quad \big(\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}\big) \cup \{N\}$$

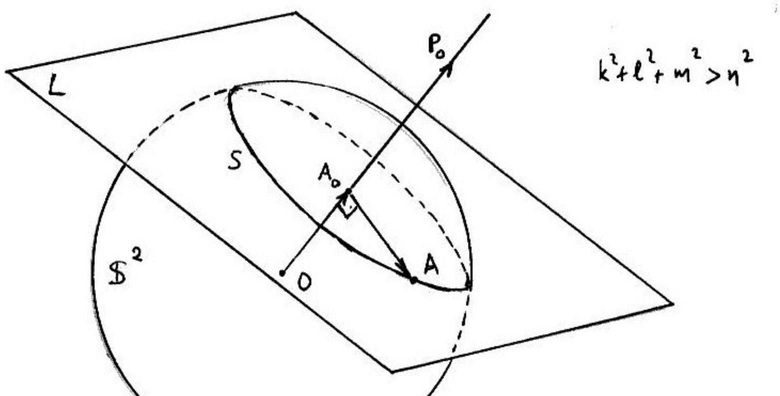
ή, ισοδύναμα,

$$\widehat{\mathbb{C}} \quad \longleftrightarrow \quad \mathbb{S}^2.$$

Μπορούμε, λοιπόν, να πούμε ότι *η στερεογραφική προβολή είναι αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση ανάμεσα στο επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο $\widehat{\mathbb{C}}$ και στην μοναδιαία σφαίρα $\mathbb{S}^2$ του τριδιάστατου χώρου και ότι είναι συνεχής με την εξής, φυσικά, έννοια: δυο σημεία του $\widehat{\mathbb{C}}$ συγκλίνουν το ένα στο άλλο αν και μόνο αν τα αντίστοιχα σημεία της $\mathbb{S}^2$ συγκλίνουν το ένα στο άλλο.*

Επειδή το επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο $\widehat{\mathbb{C}}$ βρίσκεται σε τόσο άμεση σχέση με την μοναδιαία σφαίρα $\mathbb{S}^2$, το ονομάζουμε **σφαίρα του Riemann**.

Γνωρίζουμε ότι το οποιοδήποτε επίπεδο L στον χώρο $\mathbb{R}^3$ έχει εξίσωση $k\xi + l\eta + m\zeta = n$, όπου οι (πραγματικοί) συντελεστές k, l, m δεν είναι και οι τρεις ίσοι με 0. Δείτε το σχήμα 10.



Σχ 10.

Θεωρούμε το σημείο $P_0 = (k, l, m) \neq (0, 0, 0)$ και παρατηρούμε ότι το σημείο

$$A_0 = (\xi_0, \eta_0, \zeta_0) = \Big(\frac{nk}{k^2 + l^2 + m^2}, \frac{nl}{k^2 + l^2 + m^2}, \frac{nm}{k^2 + l^2 + m^2}\Big)$$

ικανοποιεί την $k\xi + l\eta + m\zeta = n$ και άρα ανήκει στο επίπεδο L. Επίσης, παρατηρούμε ότι

$$\overrightarrow{0A_0} = \frac{n}{k^2 + l^2 + m^2}\,\overrightarrow{0P_0} = t\,\overrightarrow{0P_0}.$$

Αν, τώρα, θεωρήσουμε το τυχόν $A = (\xi, \eta, \zeta)$, τότε το A ανήκει στο L αν και μόνο αν $\overrightarrow{A_0A} \perp \overrightarrow{0P_0}$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_0A} \perp \overrightarrow{0P_0} \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{A_0A} \cdot \overrightarrow{0P_0} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\xi - \xi_0)k + (\eta - \eta_0)l + (\zeta - \zeta_0)m = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad k\xi + l\eta + m\zeta = k\xi_0 + l\eta_0 + m\zeta_0 \quad \Leftrightarrow \quad k\xi + l\eta + m\zeta = n. \end{aligned}$$

Τώρα μας ενδιαφέρει να βρούμε τα σημεία τομής της σφαίρας $\mathbb{S}^2$ με το επίπεδο L. Αν το σημείο A ανήκει στο L, τότε ισχύει $\overrightarrow{A_0A} \perp \overrightarrow{0P_0}$ και, επειδή το $\overrightarrow{0A_0}$ είναι πολλαπλάσιο του $\overrightarrow{0P_0}$, συνεπάγεται $\overrightarrow{A_0A} \perp \overrightarrow{0A_0}$. Άρα, από το Πυθαγόρειο Θεώρημα συνεπάγεται

$$|\overrightarrow{A_0A}|^2 + |\overrightarrow{0A_0}|^2 = |\overrightarrow{0A}|^2.$$

Αν το A ανήκει και στην $\mathbb{S}^2$, τότε η τελευταία ισότητα γράφεται

$$|\overrightarrow{A_0A}|^2 + |\overrightarrow{0A_0}|^2 = 1$$

ή, ισοδύναμα,

$$|\overrightarrow{A_0A}|^2 = 1 - \Big(\frac{n^2k^2}{(k^2 + l^2 + m^2)^2} + \frac{n^2l^2}{(k^2 + l^2 + m^2)^2} + \frac{n^2m^2}{(k^2 + l^2 + m^2)^2}\Big)$$

ή, ισοδύναμα,

$$|\overrightarrow{A_0A}| = \sqrt{\frac{k^2 + l^2 + m^2 - n^2}{k^2 + l^2 + m^2}}.$$

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι:
(i) στην περίπτωση που $k^2 + l^2 + m^2 < n^2$ το επίπεδο L δεν τέμνει την σφαίρα $\mathbb{S}^2$ σε κανένα σημείο A,
(ii) στην περίπτωση που $k^2 + l^2 + m^2 = n^2$ η τελευταία σχέση γράφεται $|\overrightarrow{A_0A}| = 0$ και άρα το μοναδικό σημείο τομής του L με την $\mathbb{S}^2$ είναι το A_0 και
(iii) στην περίπτωση που $k^2 + l^2 + m^2 > n^2$ τα σημεία τομής του L με την $\mathbb{S}^2$ σχηματίζουν έναν κύκλο S επί του L με κέντρο το A_0 και ακτίνα $R = \sqrt{\frac{k^2+l^2+m^2-n^2}{k^2+l^2+m^2}} > 0$. Είναι σαφές ότι $|\overrightarrow{0A_0}| = \frac{|n|}{\sqrt{k^2+l^2+m^2}} < 1$, οπότε το κέντρο του κύκλου είναι στο εσωτερικό της $\mathbb{S}^2$.

Έτσι, λοιπόν, συμπεραίνουμε ότι οι κύκλοι πάνω στην $\mathbb{S}^2$ είναι οι τομές της $\mathbb{S}^2$ με επίπεδα L των οποίων οι εξισώσεις $k\xi + l\eta + m\zeta = n$ ικανοποιούν την συνθήκη $k^2 + l^2 + m^2 > n^2$.

Ας θεωρήσουμε τώρα έναν οποιονδήποτε κύκλο S πάνω στην $\mathbb{S}^2$. Αυτός είναι η τομή ενός επιπέδου με εξίσωση $k\xi+l\eta+m\zeta = n$ έτσι ώστε $k^2+l^2+m^2 > n^2$. Το τυχόν σημείο $A = (\xi, \eta, \zeta)$ του S (παραλείπουμε τον βόρειο πόλο N στην περίπτωση που το N ανήκει στον S) ικανοποιεί την $k\xi + l\eta + m\zeta = n$ και τότε η στερεογραφική προβολή $z = x + iy$ του A ικανοποιεί την

$$\frac{2kx}{x^2 + y^2 + 1} + \frac{2ly}{x^2 + y^2 + 1} + \frac{m(x^2 + y^2 - 1)}{x^2 + y^2 + 1} = n$$

ή, ισοδύναμα, την

$$(n - m)x^2 + (n - m)y^2 - 2kx - 2ly = -(m + n). \tag{1.10}$$

Τώρα διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.
Πρώτη περίπτωση: Ο κύκλος S διέρχεται από τον βόρειο πόλο N. Αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν το $N = (0, 0, 1)$ ικανοποιεί την $k\xi + l\eta + m\zeta = n$, δηλαδή αν και μόνο αν $m = n$.
Τότε η (1.10) γράφεται

$$kx + ly = m.$$

Άρα οι στερεογραφικές προβολές των σημείων του $S \setminus \{N\}$ βρίσκονται πάνω στην ευθεία l του μιγαδικού επιπέδου $\mathbb{C}$ με εξίσωση $kx + ly = m$.

Αντιστρόφως, αν πάρουμε τυχόν $z = x + iy$ της ευθείας l με εξίσωση $kx + ly = m$, τότε η στερεογραφική προβολή $A = (\xi, \eta, \zeta)$ του z ικανοποιεί την

$$\frac{k\xi}{1-\zeta} + \frac{l\eta}{1-\zeta} = m$$

ή, ισοδύναμα, (λαμβάνοντας υπ' όψη ότι $m = n$) την

$$k\xi + l\eta + m\zeta = n.$$

Άρα το A ανήκει στον κύκλο S (εκτός του N).
Τώρα ορίζουμε την λεγόμενη **ευθεία στο** $\widehat{\mathbb{C}}$

$$\widehat{l} = l \cup \{\infty\}.$$

Είναι φυσιολογικό να επισυνάψουμε το ∞ στην l διότι ένα μεταβλητό σημείο της l μπορεί να απομακρυνθεί απεριόριστα προς το ∞.
Επειδή το ∞ και το N αντιστοιχούν το ένα στο άλλο μέσω της στερεογραφικής προβολής, συμπεραίνουμε ότι

Μέσω της στερεογραφικής προβολής κάθε κύκλος S πάνω στην $\mathbb{S}^2$ ο οποίος διέρχεται από το N μετασχηματίζεται σε ευθεία $\widehat{l}$ στο $\widehat{\mathbb{C}}$ και αντιστρόφως.

Δεύτερη περίπτωση: Ο κύκλος S δεν διέρχεται από τον βόρειο πόλο N. Αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν το $N = (0, 0, 1)$ δεν ικανοποιεί την $k\xi + l\eta + m\zeta = n$, δηλαδή αν και μόνο αν $m \neq n$.
Τότε η (1.10) γράφεται

$$x^2 + y^2 - 2\frac{k}{n-m}x - 2\frac{l}{n-m}y = \frac{m+n}{m-n}$$

ή, ισοδύναμα,

$$\left(x - \frac{k}{n-m}\right)^2 + \left(y - \frac{l}{n-m}\right)^2 = \frac{k^2 + l^2 + m^2 - n^2}{(m-n)^2}. \tag{1.11}$$

Άρα οι στερεογραφικές προβολές των σημείων του S βρίσκονται πάνω στον κύκλο C του επιπέδου $\mathbb{C}$ με κέντρο το $z_0 = \frac{k}{n-m} + i\frac{l}{n-m} = (\frac{k}{n-m}, \frac{l}{n-m})$ και ακτίνα $r = \frac{\sqrt{k^2+l^2+m^2-n^2}}{|m-n|} > 0$.
Αντιστρόφως, αν πάρουμε τυχόν $z = x + iy$ του κύκλου C με εξίσωση την (1.11), τότε με λίγες πράξεις βλέπουμε ότι η στερεογραφική προβολή $A = (\xi, \eta, \zeta)$ του z ικανοποιεί την $k\xi + l\eta + m\zeta = n$ και άρα το A ανήκει στον κύκλο S.
Τώρα, συμφωνούμε να χαρακτηρίζουμε **κύκλο στο** $\widehat{\mathbb{C}}$ οποιονδήποτε κύκλο στο $\mathbb{C}$.
Και έτσι συμπεραίνουμε ότι

Μέσω της στερεογραφικής προβολής κάθε κύκλος S πάνω στην $\mathbb{S}^2$ ο οποίος δεν διέρχεται από το N μετασχηματίζεται σε κύκλο C στο $\widehat{\mathbb{C}}$ και αντιστρόφως.

Τέλος, συμφωνούμε να χαρακτηρίζουμε **γενικευμένο κύκλο στο** $\widehat{\mathbb{C}}$ κάθε ευθεία και κάθε κύκλο στο $\widehat{\mathbb{C}}$.
Τα συμπεράσματά μας συνοψίζονται στο εξής:

Μέσω της στερεογραφικής προβολής κάθε κύκλος πάνω στην $\mathbb{S}^2$ μετασχηματίζεται σε γενικευμένο κύκλο στο $\widehat{\mathbb{C}}$ και αντιστρόφως. Ειδικώτερα, οι κύκλοι της $\mathbb{S}^2$ που περιέχουν το N αντιστοιχούν στις ευθείες του $\widehat{\mathbb{C}}$ και οι κύκλοι της $\mathbb{S}^2$ που δεν περιέχουν το N αντιστοιχούν στους κύκλους του $\widehat{\mathbb{C}}$.

Έτσι, λοιπόν, κατά κάποιο τρόπο ενοποιούνται οι έννοιες της ευθείας και του κύκλου στο μιγαδικό επίπεδο στην έννοια του γενικευμένου κύκλου.

Τώρα, έστω δυο σημεία $z_1 = x_1 + iy_1$ και $z_2 = x_2 + iy_2$ του $\mathbb{C}$. Αυτά αντιστοιχούν μέσω στερεογραφικής προβολής σε δυο αντίστοιχα σημεία $A_1 = (\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ και $A_2 = (\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$ του $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$. Χρησιμοποιώντας τους τύπους της στερεογραφικής προβολής και κάνοντας λίγες πράξεις, μπορούμε να αποδείξουμε πολύ εύκολα ότι η Ευκλείδεια απόσταση στον $\mathbb{R}^3$ ανάμεσα στα A_1, A_2 είναι ίση με

$$\begin{aligned}|A_1 - A_2| &= \sqrt{(\xi_1-\xi_2)^2 + (\eta_1-\eta_2)^2 + (\zeta_1-\zeta_2)^2}\\ &= \ldots\ldots = \frac{2\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+1}\,\sqrt{x_2^2+y_2^2+1}} = \frac{2|z_1-z_2|}{\sqrt{|z_1|^2+1}\,\sqrt{|z_2|^2+1}}.\end{aligned}$$

Κατόπιν, ας θεωρήσουμε ένα σημείο $z = x+iy$ του $\mathbb{C}$ και το σημείο ∞ του $\widehat{\mathbb{C}}$. Αυτά αντιστοιχούν μέσω στερεογραφικής προβολής σε ένα σημείο $A = (\xi, \eta, \zeta)$ του $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ και στο N της $\mathbb{S}^2$. Τότε βρίσκουμε ότι η Ευκλείδεια απόσταση στον $\mathbb{R}^3$ ανάμεσα στα A, N είναι ίση με

$$|A - N| = \sqrt{(\xi-0)^2+(\eta-0)^2+(\zeta-1)^2} = \ldots\ldots = \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+1}} = \frac{2}{\sqrt{|z|^2+1}}.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ορίζουμε την* **χορδική απόσταση** $\chi(z_1, z_2)$ *ανάμεσα σε δυο σημεία* z_1, z_2 *του* $\widehat{\mathbb{C}}$ *να είναι η Ευκλείδεια απόσταση στον* $\mathbb{R}^3$ *ανάμεσα στις στερεογραφικές προβολές τους στην* $\mathbb{S}^2$. *Δηλαδή*

$$\chi(z_1,z_2) = \begin{cases} \frac{2|z_1-z_2|}{\sqrt{|z_1|^2+1}\,\sqrt{|z_2|^2+1}}, & \textit{αν } z_1, z_2 \in \mathbb{C}\\ \frac{2}{\sqrt{|z|^2+1}}, & \textit{αν } z_1 = z \in \mathbb{C},\ z_2 = \infty \textit{ ή } z_1 = \infty,\ z_2 = z \in \mathbb{C}\\ 0, & \textit{αν } z_1 = z_2 = \infty\end{cases}$$

Έτσι, λοιπόν, έχουμε έναν δεύτερο τρόπο να μετράμε αποστάσεις στο μιγαδικό επίπεδο. Εκτός από την Ευκλείδεια απόσταση $|z_1 - z_2|$ ανάμεσα στα $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ έχουμε και την χορδική απόσταση με τύπο $\chi(z_1,z_2) = \frac{2|z_1-z_2|}{\sqrt{|z_1|^2+1}\,\sqrt{|z_2|^2+1}}$.

Παρατηρήστε ότι ένα σημείο z στο $\mathbb{C}$ πλησιάζει ένα άλλο (σταθερό) σημείο z_0 στο $\mathbb{C}$ σε σχέση με την Ευκλείδεια απόσταση αν και μόνο αν το z πλησιάζει το z_0 σε σχέση με την χορδική απόσταση. Για να το δούμε αυτό μπορούμε να αποδείξουμε ότι ισχύει $|z - z_0| \to 0$ αν και μόνο αν $\chi(z, z_0) \to 0$, χρησιμοποιώντας τον τύπο του $\chi(z, z_0)$. Υπάρχει, όμως, ένας πιο έξυπνος τρόπος. Αν A, A_0 είναι οι στερεογραφικές προβολές στην $\mathbb{S}^2$ των z, z_0, έχουμε ήδη αποδείξει ότι το z πλησιάζει το z_0 σε σχέση με την Ευκλείδεια απόσταση αν και μόνο αν το A πλησιάζει το A_0 σε σχέση με την Ευκλείδεια απόσταση στον $\mathbb{R}^3$. Όμως, η Ευκλείδεια απόσταση ανάμεσα στα A, A_0 είναι *ίση* με την χορδική απόσταση ανάμεσα στα z, z_0. Δηλαδή

$$|z - z_0| \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad |A - A_0| \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad \chi(z, z_0) \to 0.$$

Σχετικά με το ∞ μπορούμε να πούμε τα εξής. Ενώ η Ευκλείδεια απόσταση ενός z στο $\mathbb{C}$ από το ∞ είναι, φυσιολογικά, ίση με $+\infty$, η χορδική απόσταση ανάμεσα στα z, ∞ είναι πεπερασμένη: $\chi(z,\infty) = \frac{2}{\sqrt{|z|^2+1}}$. Μάλιστα, μπορούμε να δούμε αμέσως ότι $z \to \infty$ στο $\widehat{\mathbb{C}}$ αν και μόνο αν $\chi(z,\infty) \to 0$. Πράγματι, έχουμε εξ ορισμού ότι $z \to \infty$ αν και μόνο αν $|z| \to +\infty$. Και είναι προφανές από τον τύπο του $\chi(z,\infty)$ ότι $|z| \to +\infty$ αν και μόνο αν $\chi(z,\infty) \to 0$.

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι η χορδική απόσταση ταιριάζει καλύτερα από την Ευκλείδεια απόσταση με την έννοια της σύγκλισης στο $\widehat{\mathbb{C}}$.

Τέλος, για να μιλάμε για *απόσταση* πρέπει να αποδείξουμε ότι η χορδική απόσταση έχει τις βασικές ιδιότητες μιας απόστασης:

1. $\chi(z_1, z_2) \geq 0$ για κάθε $z_1, z_2 \in \widehat{\mathbb{C}}$.

2. Αν $z_1, z_2 \in \widehat{\mathbb{C}}$, τότε: $\chi(z_1, z_2) = 0$ αν και μόνο αν $z_1 = z_2$.

3. $\chi(z_1, z_2) = \chi(z_2, z_1)$ για κάθε $z_1, z_2 \in \widehat{\mathbb{C}}$.

4. $\chi(z_1, z_3) \leq \chi(z_1, z_2) + \chi(z_2, z_3)$ για κάθε $z_1, z_2, z_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$.

Οι τρεις πρώτες ιδιότητες είναι προφανείς. Η τέταρτη, η **τριγωνική ανισότητα**, αποδεικνύεται μετά από πολλές πράξεις αν χρησιμοποιήσουμε τον τύπο της χορδικής απόστασης. Αλλά υπάρχει ένα πολύ πιο έξυπνος τρόπος. Αν θεωρήσουμε τις στερεογραφικές προβολές A_1, A_2, A_3 στην $\mathbb{S}^2$ των z_1, z_2, z_3, τότε από τον ορισμό της χορδικής απόστασης έχουμε ότι $\chi(z_i, z_j) = |A_i - A_j|$ και, επειδή η Ευκλείδεια απόσταση στο $\mathbb{R}^3$ ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα, έχουμε ότι

$$\chi(z_1, z_3) = |A_1 - A_3| \leq |A_1 - A_2| + |A_2 - A_3| = \chi(z_1, z_2) + \chi(z_2, z_3).$$

Βλέπουμε, επομένως, ότι η συνάρτηση

$$\chi\,:\,\widehat{\mathbb{C}} \times \widehat{\mathbb{C}} \to [0, +\infty)$$

είναι μια **μετρική** στο $\widehat{\mathbb{C}}$ και ότι το ζευγάρι $(\widehat{\mathbb{C}}, \chi)$ αποτελεί έναν **μετρικό χώρο**.

Ασκήσεις.

1.2.1. Βρείτε τις εικόνες στην $\mathbb{S}^2$ μέσω στερεογραφικής προβολής των εξής υποσυνόλων (ή οικογενειών υποσυνόλων) του $\widehat{\mathbb{C}}$:
[α] $\{z\,|\,|z| < 1\}$, $\{z\,|\,|z| = 1\}$, $\{z\,|\,|z| > 1\} \cup \{\infty\}$.
[β] $\{z\,|\,\mathrm{Re}\,z > 0\}$, $\{z\,|\,\mathrm{Re}\,z = 0\}$, $\{z\,|\,\mathrm{Re}\,z < 0\}$, $\{z\,|\,\mathrm{Im}\,z > 0\}$, $\{z\,|\,\mathrm{Im}\,z = 0\}$, $\{z\,|\,\mathrm{Im}\,z < 0\}$.
[γ] Μια ευθεία η οποία διέρχεται από το 0.
[δ] Η οικογένεια των κύκλων με κέντρο το 0. Η οικογένεια των κύκλων με κέντρο ένα σταθερό σημείο $\neq 0$.
[ε] Η οικογένεια των ευθειών που είναι παράλληλες σε μια σταθερή ευθεία.
[στ] Η οικογένεια των ευθειών που διέρχονται από ένα σταθερό σημείο $\neq \infty$.
[ζ] Η οικογένεια των κύκλων που εφάπτονται ενός σταθερού κύκλου σε ένα σταθερό σημείο του.
[η] Η οικογένεια των κύκλων που διέρχονται από δυο σταθερά σημεία.

1.2.2. Θεωρήστε δυο σημεία z, w στο μιγαδικό επίπεδο και τις στερεογραφικές προβολές τους A, B στην $\mathbb{S}^2$.
[α] Αν τα z, w είναι συμμετρικά ως προς κάποια ευθεία l η οποία διέρχεται από το 0, ποιά είναι η σχετική θέση των A, B σε σχέση με την στερεογραφική προβολή της l στην $\mathbb{S}^2$;
[β] Αν $w = \frac{1}{\overline{z}}$, ποιά είναι η σχετική θέση των A, B στην $\mathbb{S}^2$;

1.2.3. Αν οι ευθείες l, l' σχηματίζουν γωνία θ στο κοινό τους σημείο z, αποδείξτε ότι οι στερεογραφικές προβολές τους, δηλαδή δυο κύκλοι στην $\mathbb{S}^2$ με κοινά σημεία την στερεογραφική προβολή A του z και τον βόρειο πόλο N, σχηματίζουν την ίδια γωνία θ και στο A και στο N.

1.2.4. Αποδείξτε ότι ισχύει $\chi(z_1, z_2) \leq 2$ για κάθε $z_1, z_2 \in \widehat{\mathbb{C}}$. Ποιά πρέπει να είναι η σχετική θέση των z_1, z_2 για ισχύει $\chi(z_1, z_2) = 2$;

1.2.5. Θεωρήστε έναν "κύκλο" ως προς την χορδική απόσταση, δηλαδή ένα σύνολο της μορφής $P = \{z \in \widehat{\mathbb{C}}\,|\,\chi(z, z_0) = r\}$, όπου $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ και $r > 0$. Αποδείξτε ότι το P είναι ένας γενικευμένος κύκλος στο $\widehat{\mathbb{C}}$. Αν $z_0 = \infty$, αποδείξτε ότι το P είναι κύκλος στο $\widehat{\mathbb{C}}$ (δηλαδή στο $\mathbb{C}$) και βρείτε το Ευκλείδειο κέντρο του και την Ευκλείδεια ακτίνα του. Αν $z_0 \in \mathbb{C}$, αποδείξτε ότι το P είναι είτε κύκλος στο $\widehat{\mathbb{C}}$ (δηλαδή στο $\mathbb{C}$) (και βρείτε το Ευκλείδειο κέντρο του και την Ευκλείδεια ακτίνα του) είτε ευθεία στο $\widehat{\mathbb{C}}$. Ποιά είναι η συνθήκη που καθορίζει αν το P είναι κύκλος ή ευθεία; Προσπαθήστε να αποφύγετε τις πολλές πράξεις, χρησιμοποιώντας κατάλληλα τη σφαίρα $\mathbb{S}^2$.

1.2.6. Αποδείξτε ότι οι γενικευμένοι κύκλοι στο $\widehat{\mathbb{C}}$ αντιστοιχούν μέσω στερεογραφικής προβολής σε κύκλους στην $\mathbb{S}^2$, χρησιμοποιώντας μόνο μεθόδους Ευκλείδειας Γεωμετρίας και χωρίς να χρησιμοποιήσετε εξισώσεις ευθειών, κύκλων και επιπέδων (δηλαδή μεθόδους Αναλυτικής Γεωμετρίας).

Κεφάλαιο 2

Η τοπολογία του $\mathbb{C}$.

2.1 Βασικές έννοιες.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω μη-κενό σύνολο* X *και συνάρτηση* $d : X \times X \to \mathbb{R}$. *Λέμε ότι η συνάρτηση* d *είναι* **μετρική** *στο* X *αν έχει τις εξής ιδιότητες:*

1. $d(x_1, x_2) \geq 0$ *για κάθε* $x_1, x_2 \in X$.
2. *Αν* $x_1, x_2 \in X$, *τότε:* $d(x_1, x_2) = 0$ *αν και μόνο αν* $x_1 = x_2$.
3. $d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1)$ *για κάθε* $x_1, x_2 \in X$.
4. $d(x_1, x_3) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3)$ *για κάθε* $x_1, x_2, x_3 \in X$.

Η τιμή $d(x_1, x_2)$ *ονομάζεται* **απόσταση** *ανάμεσα στα* x_1, x_2. *Το ζευγάρι* (X, d) *ονομάζεται* **μετρικός χώρος**. *Συνήθως, αν είναι φανερό ποιά είναι η μετρική* d *για την οποία μιλάμε, λέμε απλώς: ο μετρικός χώρος* X.

Παράδειγμα 2.1.1. Το σύνολο $\mathbb{R}^n$ όλων των n-άδων $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ είναι μετρικός χώρος αν δεχτούμε ως μετρική $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ την λεγόμενη **Ευκλείδεια μετρική** η οποία ορίζεται με τον τύπο

$$d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = |\mathrm{x} - \mathrm{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}, \qquad \mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n), \mathrm{y} = (y_1, \ldots, y_n).$$

Η τιμή $|\mathrm{x} - \mathrm{y}|$ ονομάζεται **Ευκλείδεια απόσταση** ανάμεσα στα x, y.
Για τις ειδικές περιπτώσεις όπου $n = 2$ ή 3 μιλήσαμε ήδη στο πρώτο κεφάλαιο.
Θεωρούμε γνωστό το ότι η Ευκλείδεια μετρική ικανοποιεί τις ιδιότητες μιας μετρικής.

Παράδειγμα 2.1.2. Στο προηγούμενο κεφάλαιο ορίσαμε τη **χορδική μετρική** στο $\widehat{\mathbb{C}}$ και αποδείξαμε ότι ικανοποιεί τις ιδιότητες μιας μετρικής.

Στο μάθημα αυτό θα θεωρήσουμε δεδομένη κάποια εξοικείωση με την έννοια του μετρικού χώρου. Το παράδειγμα που θα μας απασχολήσει είναι φυσικά το σύνολο $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ με την Ευκλείδεια μετρική και σε κάποιο βαθμό και το σύνολο $\widehat{\mathbb{C}}$ με τη χορδική μετρική. Γι αυτό στο υπόλοιπο αυτού του κεφαλαίου θα αναπτύξουμε κάπως γρήγορα τις έννοιες και τις ιδιότητες που σχετίζονται με τους μετρικούς χώρους, αλλά διατυπωμένες έτσι ώστε να αναφέρονται κυρίως στο $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ με την Ευκλείδεια μετρική. Όλες οι έννοιες και οι ιδιότητες ισχύουν για τον γενικό μετρικό χώρο. Αν κάτι δεν ισχύει για τον γενικό μετρικό χώρο θα το αναφέρουμε ρητά.

Υπενθυμίζουμε τα σύμβολα

$$D(z; r) = \{w \,|\, |w - z| < r\}, \qquad C(z; r) = \{w \,|\, |w - z| = r\}$$

για τον **ανοικτό δίσκο** και για τον **κύκλο** με κέντρο z και ακτίνα $r > 0$.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Το $D(z;r)$ θα ονομάζεται και r-**περιοχή** του z.*

Σχόλιο. Σε έναν γενικό μετρικό χώρο (X,d) η r-περιοχή ενός σημείου $x \in X$ συμβολίζεται $N_x(r)$ και είναι, φυσικά, το σύνολο $N_x(r) = \{x' \in X \,|\, d(x',x) < r\}$.

Έστω σύνολο $A \subseteq \mathbb{C}$. Με A^c συμβολίζουμε το συμπλήρωμα $\mathbb{C} \setminus A$ του A σε σχέση με το μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Το z χαρακτηρίζεται* **εσωτερικό σημείο** *του A αν υπάρχει $r > 0$ ώστε $D(z;r) \subseteq A$.*
Το z χαρακτηρίζεται **εξωτερικό σημείο** *του A αν υπάρχει $r > 0$ ώστε $D(z;r) \subseteq A^c$.*
Το z χαρακτηρίζεται **συνοριακό σημείο** *του A αν για κάθε $r > 0$ ισχύει $D(z;r) \cap A \neq \emptyset$ και $D(z;r) \cap A^c \neq \emptyset$.*

Σχόλιο. Σε έναν γενικό μετρικό χώρο (X,d), με $A \subseteq X$, με $A^c = X \setminus A$ και με $x \in X$ έχουμε ακριβώς τις ίδιες έννοιες του εσωτερικού, εξωτερικού και συνοριακού σημείου x του A χρησιμοποιώντας τις περιοχές $N_x(r)$ στη θέση των $D(z;r)$.

Από τον ορισμό, τα εξής [α] - [δ] πρέπει να είναι απολύτως σαφή. Φροντίστε να τα κατανοήσετε (και να τα εξηγήσετε) καθαρά διανοητικά, χωρίς τη βοήθεια κανενός σχήματος και όλα τα επόμενα θα σας φανούν πολύ απλά.

[α] *Τα εσωτερικά σημεία του A ανήκουν στο A και τα εξωτερικά σημεία του A ανήκουν στο A^c.*

[β] *Τα συνοριακά σημεία του A δεν είναι ούτε εσωτερικά ούτε εξωτερικά σημεία του A και, επίσης, κάθε σημείο ανήκει σε μια από τις τρεις κατηγορίες σημείων: εσωτερικό σημείο, εξωτερικό σημείο, συνοριακό σημείο του A. Άρα το $\mathbb{C}$ χωρίζεται σε τρία ξένα μεταξύ τους σύνολα: τα σύνολα των εσωτερικών, των εξωτερικών και των συνοριακών σημείων του A.*

[γ] *Τα εξωτερικά σημεία του A είναι τα ίδια με τα εσωτερικά σημεία του A^c. Τα εσωτερικά σημεία του A είναι τα ίδια με τα εξωτερικά σημεία του A^c. Τα συνοριακά σημεία του A είναι τα ίδια με τα συνοριακά σημεία του A^c.*

[δ] *Αφού τα εσωτερικά σημεία του A ανήκουν στο A και τα εξωτερικά σημεία του A ανήκουν στο A^c, απομένει να δούμε πού ανήκουν τα συνοριακά σημεία του A. Αυτό εξαρτάται από το ποιό κάθε φορά είναι το σύνολο A: κάποια από τα συνοριακά σημεία (μπορεί όλα, μπορεί κανένα) ανήκουν A και τα υπόλοιπα (μπορεί κανένα, μπορεί όλα) ανήκουν στο A^c.*

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Το z χαρακτηρίζεται* **οριακό σημείο** *του A αν για κάθε $r > 0$ ισχύει $D(z;r) \cap A \neq \emptyset$.*
Το z χαρακτηρίζεται **σημείο συσσώρευσης** *του A αν για κάθε $r > 0$ ισχύει $(D(z;r) \setminus \{z\}) \cap A \neq \emptyset$.*
Το z χαρακτηρίζεται **μεμονωμένο σημείο** *του A αν υπάρχει $r > 0$ ώστε $D(z;r) \cap A = \{z\}$.*

Σχόλιο. Ισχύουν τα ανάλογα με εκείνα στο σχόλιο του αμέσως προηγούμενου ορισμού.

Είναι σαφές ότι:

[ε] *Τα οριακά σημεία του A είναι τα εσωτερικά και τα συνοριακά σημεία του A. Επίσης, κανένα εξωτερικό σημείο του A δεν είναι οριακό σημείο του A.*

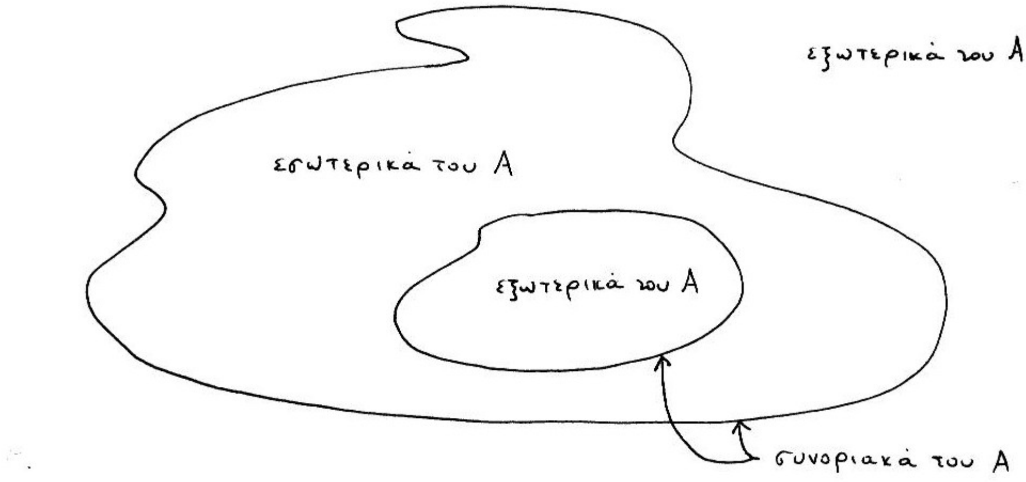
[στ] *Κάθε σημείο συσσώρευσης του A είναι οριακό σημείο του A.*

[ζ] *Αν $z \notin A$, τότε το z είναι οριακό σημείο του A αν και μόνο αν είναι σημείο συσσώρευσης του A αν και μόνο αν είναι συνοριακό σημείο του A. Αν $z \in A$, τότε το z είναι σημείο συσσώρευσης του A αν και μόνο αν δεν είναι μεμονωμένο σημείο του A.*

Παράδειγμα 2.1.3. Έστω $A = D(z_0;r_0)$. Δηλαδή το A είναι ο ανοικτός δίσκος με κέντρο z_0 και ακτίνα r_0. Επίσης, θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ως A τον ανοικτό δίσκο $D(z_0;r_0)$ μαζί με κάποια (μπορεί όλα, μπορεί κανένα) σημεία του κύκλου $C(z_0;r_0)$, για παράδειγμα μαζί με τα σημεία ενός οποιουδήποτε τόξου του κύκλου.
Σε κάθε περίπτωση, τα εσωτερικά σημεία του A είναι τα σημεία του ανοικτού δίσκου $D(z_0;r_0)$, τα συνοριακά σημεία του A είναι τα σημεία του κύκλου $C(z_0;r_0)$ και τα οριακά σημεία του A είναι τα σημεία του ανοικτού δίσκου και τα σημεία του κύκλου. Τα εξωτερικά σημεία του A είναι τα σημεία του $\{w \,|\, |w-z_0| > r_0\}$.

Παράδειγμα 2.1.4. Έστω το ανοικτό ημιεπίπεδο $A = \{z \mid \mathrm{Re}(\overline{w}z) > c\}$ μαζί με κάποια (μπορεί όλα, μπορεί κανένα) από τα σημεία της ευθείας με εξίσωση $\mathrm{Re}(\overline{w}z) = c$.
Τότε τα εσωτερικά σημεία του A είναι τα σημεία του ανοικτού ημιεπιπέδου $\{z \mid \mathrm{Re}(\overline{w}z) > c\}$, τα συνοριακά σημεία του A είναι τα σημεία της ευθείας $\{z \mid \mathrm{Re}(\overline{w}z) = c\}$ και τα οριακά σημεία του A είναι όλα τα προηγούμενα σημεία, δηλαδή τα σημεία του κλειστού ημιεπιπέδου $\{z \mid \mathrm{Re}(\overline{w}z) \geq c\}$.
Τα εξωτερικά σημεία του A είναι τα σημεία του ανοικτού ημιεπιπέδου $\{z \mid \mathrm{Re}(\overline{w}z) < c\}$.

Παράδειγμα 2.1.5. Μπορούμε να θεωρήσουμε ως A το σύνολο των σημείων που βρίσκονται από τη μία μεριά μιας απλής καμπύλης ή το σύνολο των σημείων που βρίσκονται ανάμεσα σε κάποιες απλές καμπύλες. Δείτε το σχήμα 11.



Σχ 11. Το A είναι ανάμεσα στις δύο καμπύλες και πιθανόν περιλαμβάνει σημεία των δύο καμπυλών (οπότε το A^c περιλαμβάνει τα υπόλοιπα σημεία των καμπυλών)

Για παράδειγμα, το A μπορεί να είναι ένας ανοικτός δίσκος ή ένα ανοικτό ημιεπίπεδο (όπως στα προηγούμενα δύο παραδείγματα) ή ένα ανοικτό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $\{x + iy \,|\, a < x < b, c < y < d\}$ ή ένας ανοικτός δακτύλιος $\{z \,|\, r_1 < |z - z_0| < r_2\}$. Μπορούμε, επίσης, να συμπεριλάβουμε στο A κάποια (μπορεί όλα, μπορεί κανένα) από τα σημεία των συνοριακών καμπυλών που καθορίζουν το A.
Τότε τα εσωτερικά σημεία του A είναι τα σημεία του A που δεν ανήκουν στις συνοριακές καμπύλες του, τα συνοριακά σημεία του είναι τα σημεία των συνοριακών καμπυλών του και τα οριακά σημεία του A είναι τα σημεία του A μαζί με τα σημεία των συνοριακών καμπυλών του. Τα εξωτερικά σημεία του A είναι όλα τα υπόλοιπα σημεία.

Παράδειγμα 2.1.6. Αν $A = D(0; 1) \cup \{2\}$, τότε το 2 είναι μεμονωμένο σημείο του A. Άρα το 2 είναι οριακό και συνοριακό σημείο του A αλλά δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A. Φυσικά, το 2 δεν είναι ούτε εσωτερικό σημείο του A.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ορίζουμε*

$$\mathrm{int}\, A = \{z \,|\, z \text{ εσωτερικό σημείο του } A\}$$

$$\mathrm{bd}\, A = \{z \,|\, z \text{ συνοριακό σημείο του } A\}$$

$$\mathrm{cl}\, A = \{z \,|\, z \text{ οριακό σημείο του } A\}$$

Το $\mathrm{int}\, A$ *ονομάζεται* **εσωτερικό** *του A, το* $\mathrm{bd}\, A$ *ονομάζεται* **σύνορο** *του A και το* $\mathrm{cl}\, A$ *ονομάζεται* **κλειστότητα** *του A.*
Σε πολλά βιβλία χρησιμοποιούνται διαφορετικά σύμβολα: A^o για το εσωτερικό, ∂A για το σύνορο και $\overline{A}$ για την κλειστότητα του A.

Παράδειγμα 2.1.7. Για ένα οποιοδήποτε από τα σύνολα A του παραδείγματος 2.1.3 (με τον ίδιο δίσκο $D(z_0; r_0)$) έχουμε:

$$\operatorname{int} A = D(z_0; r_0), \qquad \operatorname{bd} A = C(z_0; r_0), \qquad \operatorname{cl} A = D(z_0; r_0) \cup C(z_0; r_0).$$

Ειδικώτερα:

$$\operatorname{cl} D(z_0; r_0) = D(z_0; r_0) \cup C(z_0; r_0) = \{z \,|\, |z - z_0| \le r_0\}.$$

Το $\operatorname{cl} D(z_0; r_0)$ είναι ο **κλειστός δίσκος** με κέντρο z_0 και ακτίνα r_0.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.1. [α] $\operatorname{bd} A = \operatorname{bd} A^c$.
[β] $\operatorname{int} A = A \setminus \operatorname{bd} A$.
[γ] $\operatorname{cl} A = A \cup \operatorname{bd} A$.
[δ] $(\operatorname{cl} A)^c = \operatorname{int} A^c$.

Απόδειξη. [α] Τα συνοριακά σημεία του A είναι τα ίδια με τα συνοριακά σημεία του A^c.
[β] Αν το z είναι εσωτερικό σημείο του A, τότε ανήκει στο A και δεν είναι συνοριακό σημείο του A. Άρα $\operatorname{int} A \subseteq A \setminus \operatorname{bd} A$. Επίσης, αν το z ανήκει στο A και δεν είναι συνοριακό σημείο του A, τότε είναι εσωτερικό σημείο του A. Άρα $A \setminus \operatorname{bd} A \subseteq \operatorname{int} A$.
[γ] Αν το z είναι οριακό σημείο του A, τότε είναι είτε εσωτερικό σημείο του A (οπότε ανήκει στο A) είτε συνοριακό σημείο του A. Άρα $\operatorname{cl} A \subseteq A \cup \operatorname{bd} A$. Επίσης, αν το z ανήκει στο A ή είναι συνοριακό σημείο του A, τότε είναι είτε εσωτερικό σημείο του A είτε συνοριακό σημείο του A, οπότε είναι οριακό σημείο του A. Άρα $A \cup \operatorname{bd} A \subseteq \operatorname{cl} A$.
[δ] Το z δεν είναι οριακό σημείο του A αν και μόνο αν είναι εξωτερικό σημείο του A αν και μόνο αν είναι εσωτερικό σημείο του A^c. ☐

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Το A χαρακτηρίζεται* **ανοικτό** *αν αποτελείται μόνο από τα εσωτερικά του σημεία.*
Το A χαρακτηρίζεται **κλειστό** *αν περιέχει όλα τα οριακά του σημεία.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.2. [α] *Το A είναι ανοικτό αν και μόνο αν* $A \cap \operatorname{bd} A = \emptyset$.
[β] *Το A είναι κλειστό αν και μόνο αν* $\operatorname{bd} A \subseteq A$.

Απόδειξη. [α] Κάθε σύνολο A περιέχει τα εσωτερικά του σημεία και πιθανόν κάποια από τα συνοριακά του σημεία. Άρα το A είναι ανοικτό αν και μόνο αν δεν περιέχει κανένα συνοριακό του σημείο.
[β] Τα οριακά σημεία του A είναι τα εσωτερικά του σημεία, τα οποία ούτως ή άλλως περιέχονται στο A, και τα συνοριακά του σημεία. Άρα το A είναι κλειστό αν και μόνο αν περιέχει όλα τα συνοριακά του σημεία. ☐

Παράδειγμα 2.1.8. Ένας ανοικτός δίσκος $D(z_0; r_0)$ είναι ανοικτό σύνολο και ένας κλειστός δίσκος $\operatorname{cl} D(z_0; r_0)$ είναι κλειστό σύνολο.
Ένα ανοικτό ημιεπίπεδο $\{z \,|\, \operatorname{Re}(\overline{w} z) > c\}$ είναι ανοικτό σύνολο και ένα κλειστό ημιεπίπεδο $\{z \,|\, \operatorname{Re}(\overline{w} z) \ge c\}$ είναι κλειστό σύνολο.
Ένα ανοικτό ορθ. παραλληλόγραμμο $\{x + iy \,|\, a < x < b, c < y < d\}$ είναι ανοικτό σύνολο και ένα κλειστό ορθ. παραλληλόγραμμο $\{x + iy \,|\, a \le x \le b, c \le y \le d\}$ είναι κλειστό σύνολο.
Ένας ανοικτός δακτύλιος $\{z \,|\, r_1 < |z - z_0| < r_2\}$ είναι ανοικτό σύνολο και ένας κλειστός δακτύλιος $\{z \,|\, r_1 \le |z - z_0| \le r_2\}$ είναι κλειστό σύνολο.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.3. *Ένα σύνολο είναι κλειστό αν και μόνο αν το συμπλήρωμά του είναι ανοικτό.*

Απόδειξη. Το A είναι κλειστό *αν και μόνο αν* το A περιέχει όλα τα οριακά σημεία του A *αν και μόνο αν* το A^c δεν περιέχει κανένα οριακό σημείο του A *αν και μόνο αν* το A^c περιέχει μόνο εξωτερικά σημεία του A *αν και μόνο αν* το A^c περιέχει μόνο εσωτερικά σημεία του A^c *αν και μόνο αν* το A^c είναι ανοικτό. ☐

Επειδή το συμπλήρωμα του συμπληρώματος ενός συνόλου είναι το ίδιο το σύνολο, έχουμε και ότι:

Ένα σύνολο είναι κλειστό αν και μόνο αν το συμπλήρωμά του είναι ανοικτό.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.4. [α] *Το* $\mathrm{cl}\, A$ *είναι το μικρότερο κλειστό σύνολο το οποίο περιέχει το* A.

[β] *Το* $\mathrm{int}\, A$ *είναι το μεγαλύτερο ανοικτό σύνολο το οποίο περιέχεται στο* A.

Απόδειξη. [α] Κατ' αρχάς είναι ήδη σαφές ότι $A \subseteq \mathrm{cl}\, A$.
Κατόπιν, θα δούμε ότι το $\mathrm{cl}\, A$ είναι κλειστό.
Έστω z τυχόν οριακό σημείο του $\mathrm{cl}\, A$ και έστω τυχόν $r > 0$.
Επειδή το z είναι οριακό σημείο του $\mathrm{cl}\, A$, υπάρχει τουλάχιστον ένα $z' \in \mathrm{cl}\, A$ μέσα στο $D(z; r)$. Και, επειδή το $D(z; r)$ είναι ανοικτός δίσκος, υπάρχει $r' > 0$ ώστε $D(z'; r') \subseteq D(z; r)$. Τώρα, επειδή το z' είναι οριακό σημείο του A, υπάρχει τουλάχιστον ένα $w \in A$ μέσα στο $D(z'; r')$ και, επομένως, μέσα στο $D(z; r)$. Άρα για κάθε $r > 0$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $w \in A$ μέσα στο $D(z; r)$. Άρα το z είναι οριακό σημείο του A, δηλαδή $z \in \mathrm{cl}\, A$.
Αποδείξαμε ότι το τυχόν οριακό σημείο του $\mathrm{cl}\, A$ ανήκει στο $\mathrm{cl}\, A$, οπότε το $\mathrm{cl}\, A$ είναι κλειστό.
Τέλος, θα δούμε ότι το $\mathrm{cl}\, A$ είναι το *μικρότερο* κλειστό υπερσύνολο του A.
Έστω κλειστό B με $A \subseteq B$.
Έστω τυχόν $z \in \mathrm{cl}\, A$, δηλαδή οριακό σημείο του A. Τότε για κάθε $r > 0$ ισχύει $D(z; r) \cap A \neq \emptyset$, οπότε, επειδή $A \subseteq B$, ισχύει $D(z; r) \cap B \neq \emptyset$. Άρα το z είναι οριακό σημείο του B και, επειδή το B είναι κλειστό, συνεπάγεται $z \in B$.
Αποδείξαμε ότι για κάθε $z \in \mathrm{cl}\, A$ ισχύει $z \in B$, οπότε $\mathrm{cl}\, A \subseteq B$.

[β] Κατ' αρχάς, είναι προφανές ότι $\mathrm{int}\, A \subseteq A$.
Τώρα, θα δούμε ότι το $\mathrm{int}\, A$ είναι ανοικτό.
Έστω $z \in \mathrm{int}\, A$, δηλαδή εσωτερικό σημείο του A. Τότε υπάρχει $r > 0$ ώστε $D(z; r) \subseteq A$. Για κάθε $z' \in D(z; r)$ υπάρχει $r' > 0$ ώστε $D(z'; r') \subseteq D(z; r)$ και, επομένως, $D(z'; r') \subseteq A$ και, επομένως, το z' είναι εσωτερικό σημείο του A. Αποδείξαμε ότι κάθε $z' \in D(z; r)$ είναι εσωτερικό σημείο του A, δηλαδή $z' \in \mathrm{int}\, A$. Άρα $D(z; r) \subseteq \mathrm{int}\, A$, οπότε το z είναι εσωτερικό σημείο του $\mathrm{int}\, A$.
Αποδείξαμε ότι κάθε $z \in \mathrm{int}\, A$ είναι εσωτερικό σημείο του $\mathrm{int}\, A$, οπότε το $\mathrm{int}\, A$ είναι ανοικτό.
Τέλος, θα δούμε ότι το $\mathrm{int}\, A$ είναι το *μεγαλύτερο* ανοικτό υποσύνολο του A.
Έστω ανοικτό B με $B \subseteq A$.
Έστω τυχόν $z \in B$. Επειδή το B είναι ανοικτό, το z είναι εσωτερικό σημείο του B, οπότε υπάρχει $r > 0$ ώστε $D(z; r) \subseteq B$ και, επομένως, $D(z; r) \subseteq A$. Άρα το z είναι εσωτερικό σημείο του A, δηλαδή $z \in \mathrm{int}\, A$.
Αποδείξαμε ότι για κάθε $z \in B$ ισχύει $z \in \mathrm{int}\, A$, οπότε $B \subseteq \mathrm{int}\, A$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.5. *Αν το* A *είναι φραγμένο, τότε και το* $\mathrm{cl}\, A$ *είναι φραγμένο.*

Απόδειξη. Αν το A είναι φραγμένο, τότε το A περιέχεται σε κάποιον κλειστό δίσκο $\mathrm{cl}\, D(z; r)$. Επειδή το $\mathrm{cl}\, A$ είναι το μικρότερο κλειστό σύνολο που περιέχει το A και επειδή το $\mathrm{cl}\, D(z; r)$ είναι κλειστό σύνολο και περιέχει το A, συνεπάγεται ότι $\mathrm{cl}\, A \subseteq \mathrm{cl}\, D(z; r)$, οπότε το $\mathrm{cl}\, A$ είναι φραγμένο. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.6. [α] *Η ένωση οποιωνδήποτε ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό σύνολο. Η τομή οποιωνδήποτε πεπερασμένου πλήθους ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό σύνολο.*

[β] *Η τομή οποιωνδήποτε κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο. Η ένωση οποιωνδήποτε πεπερασμένου πλήθους κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο.*

Απόδειξη. [α] Έστω $\mathcal{C}$ μια οποιαδήποτε συλλογή ανοικτών συνόλων. Θα αποδείξουμε ότι η ένωση $U = \bigcup_{A \in \mathcal{C}} A$ είναι ανοικτό σύνολο.
Αν $z \in U$, τότε $z \in A$ για κάποιο $A \in \mathcal{C}$ και, επειδή το A είναι ανοικτό, υπάρχει $r > 0$ ώστε $D(z; r) \subseteq A$. Τώρα, επειδή $A \subseteq U$, έχουμε ότι $D(z; r) \subseteq U$.

Άρα κάθε $z \in U$ είναι εσωτερικό σημείο του U.
Τώρα έστω ότι τα $A_1, \dots, A_n$ είναι ανοικτά σύνολα. Θα αποδείξουμε ότι η τομή $F = A_1 \cap \dots \cap A_n$ είναι κλειστό σύνολο.
Έστω $z \in F$. Τότε $z \in A_k$ για κάθε k και, επειδή κάθε A_k είναι ανοικτό, υπάρχει $r_k > 0$ ώστε $D(z; r_k) \subseteq A_k$. Ορίζουμε $r = \min\{r_1, \dots, r_n\} > 0$, οπότε ισχύει $r \leq r_k$ και, επομένως, $D(z; r) \subseteq D(z; r_k)$ για κάθε k. Συνεπάγεται $D(z; r) \subseteq A_k$ για κάθε k και άρα $D(z; r) \subseteq F$.
Άρα κάθε $z \in F$ είναι εσωτερικό σημείο του F.
[β] Άμεση συνέπεια του [α] της Πρότασης 2.3 και των κανόνων de Morgan. □

Ας πούμε τώρα λίγα λόγια για το επεκτεταμένο επίπεδο $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ με τη χορδική μετρική.
Πρώτη περίπτωση: το σημείο ∞.

Η r-περιοχή του ∞ είναι, φυσικά, το σύνολο

$$N_\infty(r) = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} \,|\, \chi(z, \infty) < r\} = \Big\{z \in \mathbb{C} \,\Big|\, \frac{2}{\sqrt{|z|^2 + 1}} < r\Big\} \cup \{\infty\}$$
$$= \begin{cases} \Big\{z \in \mathbb{C} \,\Big|\, |z| > \sqrt{\frac{4}{r^2} - 1}\Big\} \cup \{\infty\}, & \text{αν } 0 < r \leq 2 \\ \widehat{\mathbb{C}}, & \text{αν } r > 2 \end{cases}$$

Όταν το r μικραίνει (και είναι, φυσικά, θετικό) η r-περιοχή $N_\infty(r)$ του ∞ μικραίνει. Μάλιστα, όταν το r τείνει στο $0+$ η $N_\infty(r)$ τείνει να εκφυλιστεί στο μονοσύνολο $\{\infty\}$. Παρατηρούμε ότι οι "μικρές" περιοχές του ∞, δηλαδή οι $N_\infty(r)$ με $0 < r < 2$, είναι εξωτερικά κλειστών δίσκων με κέντρο το 0 μαζί με το σημείο ∞. Για να απλοποιήσουμε λίγο τα σύμβολα κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής:

$$\frac{1}{s} = \sqrt{\frac{4}{r^2} - 1}.$$

Όταν το r αυξάνεται στο διάστημα $(0, 2)$ το s αυξάνεται στο διάστημα $(0, +\infty)$ και αντιστρόφως. Και τώρα δίνουμε τον εξής ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Θα ονομάζουμε* **s-περιοχή** *του ∞ στο $\widehat{\mathbb{C}}$ το σύνολο*

$$D(\infty; s) = \Big\{z \,\Big|\, |z| > \frac{1}{s}\Big\} \cup \{\infty\}$$

δηλαδή το εξωτερικό του δίσκου με κέντρο 0 και ακτίνα $\frac{1}{s}$ μαζί με το σημείο ∞.

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι οι περιοχές του ∞ στο $\widehat{\mathbb{C}}$ ως προς τη χορδική μετρική είναι τριών ειδών: οι περιοχές $D(\infty; s)$ με $s > 0$, το σύνολο $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ (η περίπτωση $r = 2$ ή, ισοδύναμα, $s = +\infty$) και το σύνολο $\widehat{\mathbb{C}}$.

Σχόλιο. Επειδή, γενικά σε κάθε μετρικό χώρο, σημασία έχουν οι "μικρές" περιοχές των σημείων του (για τον καθορισμό των εσωτερικών, των συνοριακών και των εξωτερικών σημείων συνόλων, για την μελέτη ορίων κλπ), θα δώσουμε έμφαση στις περιοχές $D(\infty; s)$ του ∞.

Όταν το s μικραίνει (και είναι, φυσικά, θετικό) η s-περιοχή $D(\infty; s)$ του ∞ μικραίνει, όπως κάνουν και οι s-περιοχές $D(z; s)$ των σημείων z του μιγαδικού επιπέδου. Όταν το s τείνει στο $0+$ η $D(\infty; s)$ τείνει να εκφυλιστεί στο μονοσύνολο $\{\infty\}$.

Τώρα, τα εξής πρέπει να είναι σαφή:
Το ∞ είναι εσωτερικό σημείο ενός $A \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ ως προς τη χορδική μετρική αν και μόνο αν το A περιέχει (μαζί με το ∞) το εξωτερικό ενός κλειστού δίσκου με κέντρο το 0.
Το ∞ είναι εξωτερικό σημείο ενός A ως προς τη χορδική μετρική αν και μόνο αν το A περιέχεται σε έναν κλειστό δίσκο με κέντρο το 0 ή, ισοδύναμα, το A είναι φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{C}$.
Έστω $\infty \notin A$ (δηλαδή $A \subseteq \mathbb{C}$). Τότε τα εξής τέσσερα είναι ισοδύναμα το ένα με το άλλο: το ∞ είναι

συνοριακό σημείο του A ως προς τη χορδική μετρική, το ∞ είναι οριακό σημείο του A ως προς τη χορδική μετρική, το ∞ είναι σημείο συσσώρευσης του A ως προς τη χορδική μετρική, το A είναι μη-φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{C}$.

Δεύτερη περίπτωση: σημείο $z_0 \in \mathbb{C}$.

Η r-περιοχή ενός σημείου $z_0 \in \mathbb{C}$ (στο $\widehat{\mathbb{C}}$ με τη χορδική μετρική) είναι το σύνολο

$$N_{z_0}(r) = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} \,|\, \chi(z, z_0) < r\}.$$

Το σύνολο αυτό δεν έχει τετριμμένη μορφή. Σας παραπέμπω στην άσκηση 1.2.5 για να διαπιστώσετε ότι το $N_{z_0}(r)$ είναι, ανάλογα με τις τιμές των παραμέτρων z_0 και r, ανοικτός δίσκος ή ανοικτό ημιεπίπεδο ή εξωτερικό κλειστού δίσκου (μαζί με το ∞). Για να απλοποιήσουμε την κατάσταση θα κάνουμε την εξής παρατήρηση για τη σχέση ανάμεσα στις περιοχές που ορίζονται με την Ευκλείδεια μετρική και στις περιοχές που ορίζονται με τη χορδική μετρική.

ΛΗΜΜΑ 2.1. *Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$. Τότε, για κάθε $r > 0$ υπάρχει $r' > 0$ ώστε $D(z_0; r') \subseteq N_{z_0}(r)$ και, αντιστρόφως, για κάθε $r > 0$ υπάρχει $r' > 0$ ώστε $N_{z_0}(r') \subseteq D(z_0; r)$.*

Απόδειξη. Έστω $r > 0$. Επειδή $\chi(z, z_0) \to 0$ όταν $|z - z_0| \to 0$, υπάρχει $r' > 0$ ώστε να ισχύει $\chi(z, z_0) < r$ όταν $|z - z_0| < r'$. Άρα υπάρχει $r' > 0$ ώστε $D(z_0; r') \subseteq N_{z_0}(r)$.
Το αντίστροφο αποδεικνύεται ομοίως, βάσει του ότι $|z - z_0| \to 0$ όταν $\chi(z, z_0) \to 0$. □

Επομένως,
Το $z_0 \in \mathbb{C}$ είναι εσωτερικό σημείο ή συνοριακό σημείο ή εξωτερικό σημείο ενός $A \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ ως προς τη χορδική μετρική αν και μόνο αν είναι, αντιστοίχως, εσωτερικό σημείο ή συνοριακό σημείο ή εξωτερικό σημείο του A ως προς την Ευκλείδεια μετρική.

Αν κάποιος θέλει να έχει μια πιο πλήρη εικόνα της σχέσης του $\widehat{\mathbb{C}}$ με τη χορδική μετρική και του $\mathbb{C}$ με την Ευκλείδεια μετρική, παραπέμπω στις ασκήσεις 2.1.6, 2.1.7 και 2.1.8. Για τους σκοπούς αυτού του μαθήματος, από τα προηγούμενα θα πρέπει να συγκρατήσουμε τα παρακάτω για τα υποσύνολα του $\mathbb{C}$.

Αν το $A \subseteq \mathbb{C}$ είναι *φραγμένο*, τότε τα εσωτερικά σημεία, τα συνοριακά σημεία και τα οριακά σημεία του A ως προς τη χορδική μετρική είναι τα ίδια, αντιστοίχως, με τα εσωτερικά σημεία, τα συνοριακά σημεία και τα οριακά σημεία του A ως προς την Ευκλείδεια μετρική. Με άλλα λόγια, το εσωτερικό, το σύνορο και η κλειστότητα του A ως προς τη χορδική μετρική είναι τα ίδια, αντιστοίχως, με το εσωτερικό, το σύνορο και την κλειστότητα του A ως προς την Ευκλείδεια μετρική. Αυτό το γράφουμε ως εξής:

$$\mathrm{int}_{\widehat{\mathbb{C}}} A = \mathrm{int}\, A, \quad \mathrm{bd}_{\widehat{\mathbb{C}}} A = \mathrm{bd}\, A, \quad \mathrm{cl}_{\widehat{\mathbb{C}}} A = \mathrm{cl}\, A \qquad \text{αν } A \text{ φραγμένο} \subseteq \mathbb{C}.$$

Αν το $A \subseteq \mathbb{C}$ είναι *μη-φραγμένο*, τότε τα εσωτερικά σημεία του ως προς τη χορδική μετρική είναι τα ίδια με τα εσωτερικά σημεία του ως προς την Ευκλείδεια μετρική. Επίσης, τα συνοριακά και τα οριακά σημεία του A ως προς τη χορδική μετρική είναι τα ίδια, αντιστοίχως, με τα συνοριακά και τα οριακά σημεία του ως προς την Ευκλείδεια μετρική, αλλά υπάρχει ένα επιπλέον συνοριακό και οριακό σημείο του A ως προς τη χορδική μετρική: το ∞. Αυτό το γράφουμε ως εξής:

$$\mathrm{int}_{\widehat{\mathbb{C}}} A = \mathrm{int}\, A, \quad \mathrm{bd}_{\widehat{\mathbb{C}}} A = \mathrm{bd}\, A \cup \{\infty\}, \quad \mathrm{cl}_{\widehat{\mathbb{C}}} A = \mathrm{cl}\, A \cup \{\infty\} \qquad \text{αν } A \text{ μη-φραγμένο} \subseteq \mathbb{C}.$$

Παράδειγμα 2.1.9. Ένα ανοικτό ημιεπίπεδο $A = \{z \,|\, \mathrm{Re}(\overline{w}z) > c\}$ είναι ανοικτό σύνολο στο $\mathbb{C}$ και στο $\widehat{\mathbb{C}}$.
Η κλειστότητα του A στο $\mathbb{C}$ είναι το κλειστό ημιεπίπεδο $\mathrm{cl}\, A = \{z \,|\, \mathrm{Re}(\overline{w}z) \geq c\}$ και το σύνορο του A στο $\mathbb{C}$ είναι η ευθεία $\mathrm{bd}\, A = \{z \,|\, \mathrm{Re}(\overline{w}z) = c\}$.
Όμως, το A είναι μη-φραγμένο, οπότε στο $\widehat{\mathbb{C}}$ έχει ένα επιπλέον οριακό και συνοριακό σημείο: το ∞. Επομένως, η κλειστότητα του A στο $\widehat{\mathbb{C}}$ είναι το $\mathrm{cl}_{\widehat{\mathbb{C}}} A = \{z \,|\, \mathrm{Re}(\overline{w}z) \geq c\} \cup \{\infty\}$ και το σύνορο του A στο $\widehat{\mathbb{C}}$ είναι η ευθεία (στο $\widehat{\mathbb{C}}$) $\mathrm{bd}_{\widehat{\mathbb{C}}} A = \{z \,|\, \mathrm{Re}(\overline{w}z) = c\} \cup \{\infty\}$.

Παράδειγμα 2.1.10. Ένα κλειστό ημιεπίπεδο $A = \{z \mid \mathrm{Re}(\overline{w}z) \geq c\}$ είναι κλειστό σύνολο στο $\mathbb{C}$ αλλά όχι στο $\widehat{\mathbb{C}}$.
Η κλειστότητα του A στο $\widehat{\mathbb{C}}$ είναι το $\mathrm{cl}_{\widehat{\mathbb{C}}} A = \{z \mid \mathrm{Re}(\overline{w}z) \geq c\} \cup \{\infty\} = A \cup \{\infty\}$.

Παράδειγμα 2.1.11. Το εξωτερικό ενός κλειστού δίσκου, $A = \{z \,|\, |z - z_0| > r_0\}$, είναι ανοικτό σύνολο στο $\mathbb{C}$ και στο $\widehat{\mathbb{C}}$.
Η κλειστότητα του A στο $\mathbb{C}$ είναι το $\mathrm{cl}\, A = \{z \,|\, |z - z_0| \geq r_0\}$ και το σύνορο του A στο $\mathbb{C}$ είναι ο κύκλος $\mathrm{bd}\, A = \{z \,|\, |z - z_0| = r_0\}$.
Επειδή το A είναι μη-φραγμένο, στο $\widehat{\mathbb{C}}$ έχει ένα επιπλέον οριακό και συνοριακό σημείο: το ∞. Άρα η κλειστότητα του A στο $\widehat{\mathbb{C}}$ είναι το $\mathrm{cl}_{\widehat{\mathbb{C}}} A = \{z \,|\, |z - z_0| \geq r_0\} \cup \{\infty\}$ και το σύνορο του A στο $\widehat{\mathbb{C}}$ είναι η ένωση $\mathrm{bd}_{\widehat{\mathbb{C}}} A = \{z \,|\, |z - z_0| = r_0\} \cup \{\infty\}$.

Ασκήσεις.

2.1.1. [α] Αποδείξτε ότι το $\emptyset$ και το $\mathbb{C}$ είναι ανοικτά και κλειστά σύνολα.

[β] Αποδείξτε ότι τα ανοικτά τρίγωνα, τα ανοικτά παραλληλόγραμμα, οι ανοικτοί δακτύλιοι και τα ανοικτά ημιεπίπεδα είναι ανοικτά σύνολα.

[γ] Αποδείξτε ότι τα πεπερασμένα σύνολα $\{z_1, \ldots, z_n\}$, οι ευθείες, τα ευθύγραμμα τμήματα (με τα άκρα τους), οι πολυγωνικές γραμμές (με τα άκρα τους), οι κύκλοι, τα κλειστά τρίγωνα, τα κλειστά παραλληλόγραμμα, οι κλειστοί δακτύλιοι και τα κλειστά ημιεπίπεδα είναι κλειστά σύνολα.

2.1.2. [α] Είναι το ανοικτό διάστημα $(0, 1) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, 0 < z < 1\}$ ανοικτό ή κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{C}$; Βρείτε τα εσωτερικά σημεία, τα συνοριακά σημεία, τα εξωτερικά σημεία και τα οριακά σημεία του $(0, 1)$.

[β] Ομοίως για το κλειστό διάστημα $[0, 1] = \{z \in \mathbb{C} \,|\, 0 \leq z \leq 1\}$.

[γ] Ομοίως για το $\{x + iy \,|\, x, y \in \mathbb{Q}\}$.

[δ] Ομοίως για τα $\{\frac{1}{n} + iy \,|\, n \in \mathbb{N}, 0 \leq y \leq 1\}$ και $\{\frac{1}{n} + iy \,|\, n \in \mathbb{N}, 0 \leq y \leq 1\} \cup \{iy \,|\, 0 \leq y \leq 1\}$.

2.1.3. Ορίζουμε το $\mathrm{diam}\, A = \sup\{|z - w| \,|\, z, w \in A\}$ και το ονομάζουμε **διάμετρο** του μη-κενού συνόλου A.

[α] Αν $A \subseteq B$, αποδείξτε ότι $\mathrm{diam}\, A \leq \mathrm{diam}\, B$.

[β] Αποδείξτε ότι $\mathrm{diam}\, A = \mathrm{diam}\, \mathrm{cl}\, A$.

[γ] Αποδείξτε ότι το A είναι φραγμένο αν και μόνο αν $\mathrm{diam}\, A < +\infty$.

2.1.4. Ορίζουμε το $\mathrm{dist}(z, A) = \inf\{|z - w| \,|\, w \in A\}$ και το ονομάζουμε **απόσταση** του z από το μη-κενό σύνολο A. Αποδείξτε ότι:

[α] $\mathrm{dist}(z, A) = \mathrm{dist}(z, \mathrm{cl}\, A)$.

[β] $\mathrm{dist}(z, A) = 0 \Leftrightarrow z \in \mathrm{cl}\, A$.

[γ] $|\, \mathrm{dist}(z', A) - \mathrm{dist}(z'', A)| \leq |z' - z''|$.

2.1.5. Αν το A είναι ανοικτό ή κλειστό σύνολο, αποδείξτε ότι $\mathrm{int}(\mathrm{bd}\, A) = \emptyset$. Βρείτε σύνολο A ώστε $\mathrm{int}(\mathrm{bd}\, A) = \mathbb{C}$.

2.1.6. Έστω μετρικός χώρος (X, d) και έστω μη-κενό $Y \subseteq X$. Θεωρούμε τον περιορισμό $d_Y : Y \times Y \to \mathbb{R}$ της $d : X \times X \to \mathbb{R}$. Δηλαδή ισχύει $d_Y(y_1, y_2) = d(y_1, y_2)$ για κάθε $y_1, y_2 \in Y$.

[α] Αποδείξτε ότι η d_Y είναι μετρική στο Y. Ο μετρικός χώρος (Y, d_Y) ονομάζεται **μετρικός υπόχωρος** του (X, d).

[β] Αν $y \in Y$ και συμβολίσουμε $N_y(r)$ και $N_y^Y(r)$ τις r-περιοχές του y στους (X, d) και (Y, d_Y), αντιστοίχως, αποδείξτε ότι $N_y^Y(r) = N_y(r) \cap Y$.

[γ] Αποδείξτε ότι ένα $A \subseteq Y$ είναι ανοικτό ως προς τη μετρική d_Y αν και μόνο αν υπάρχει ένα $A' \subseteq X$ ανοικτό ως προς τη μετρική d ώστε να είναι $A = A' \cap Y$.

[γ] Αποδείξτε ότι ένα $A \subseteq Y$ είναι κλειστό ως προς τη μετρική d_Y αν και μόνο αν υπάρχει ένα $A' \subseteq X$ κλειστό ως προς τη μετρική d ώστε να είναι $A = A' \cap Y$.

2.1.7. Έστω μη-κενό X και δύο μετρικές d_1, d_2 στο X. Λέμε ότι οι d_1, d_2 είναι **ισοδύναμες** αν τα ανοικτά υποσύνολα του X ως προς τη μετρική d_1 είναι τα ίδια με τα ανοικτά υποσύνολα του X ως προς τη μετρική d_2.
Αποδείξτε ότι οι d_1, d_2 είναι ισοδύναμες αν και μόνο αν για κάθε $x \in X$ και για κάθε $r > 0$ υπάρχει $r' > 0$ ώστε $N_x^{d_2}(r') \subseteq N_x^{d_1}(r)$ και, αντιστρόφως, για κάθε $r > 0$ υπάρχει $r' > 0$ ώστε $N_x^{d_1}(r') \subseteq N_x^{d_2}(r)$. (Με $N_x^{d_j}(s)$ συμβολίζουμε την s-περιοχή του x ως προς τη μετρική d_j.)

2.1.8. Δείτε τις ασκήσεις 2.1.6 και 2.1.7 και, βάσει του Λήμματος 2.1, αποδείξτε ότι ο περιορισμός της χορδικής μετρικής στο $\mathbb{C}$ και η Ευκλείδεια μετρική στο $\mathbb{C}$ είναι ισοδύναμες.

2.2 Ακολουθίες.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Λέμε ότι η (z_n)* **συγκλίνει** *στο z και γράφουμε $z_n \to z$ αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $|z_n - z| < \epsilon$ ή, ισοδύναμα, $z_n \in D(z;\epsilon)$. Με άλλα λόγια η (z_n) συγκλίνει στο z αν για κάθε περιοχή $D(z;\epsilon)$ του z οι όροι της (z_n) βρίσκονται τελικά μέσα σ' αυτήν.*
Ομοίως, λέμε ότι η (z_n) αποκλίνει στο ∞ και γράφουμε $z_n \to \infty$ αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $|z_n| > \frac{1}{\epsilon}$ ή, ισοδύναμα, $z_n \in D(\infty;\epsilon)$. Με άλλα λόγια η (z_n) συγκλίνει στο ∞ αν για κάθε περιοχή $D(\infty;\epsilon)$ του ∞ οι όροι της (z_n) βρίσκονται τελικά μέσα σ' αυτήν.

Σχόλιο. Για τον ορισμό της σύγκλισης $x_n \to x$ στον γενικό μετρικό χώρο (X, d) γράφουμε $d(x_n, x) < \epsilon$ στη θέση του $|z_n - z| < \epsilon$ και $x_n \in N_x(\epsilon)$ στη θέση του $z_n \in D(z;\epsilon)$.

Σχόλιο. Σύμφωνα με όσα έχουμε ήδη πει προηγουμένως, η έννοια της σύγκλισης $z_n \to z$ (με $z \in \mathbb{C}$) είναι η ίδια είτε αναφερόμαστε στην Ευκλείδεια μετρική είτε αναφερόμαστε στην χορδική μετρική, αφού έχουμε δει ότι $|z_n - z| \to 0$ αν και μόνο αν $\chi(z_n, z) \to 0$.
Στην περίπτωση του $z = \infty$, η σύγκλιση $z_n \to z$ αναφέρεται στην χορδική μετρική του $\widehat{\mathbb{C}}$. Πράγματι, έχουμε δει ότι $\chi(z_n, \infty) \to 0$ αν και μόνο αν $|z_n| \to +\infty$.

Παράδειγμα 2.2.1. Ας δούμε την ακολουθία $((-2)^n)$.
Η ακολουθία αυτή ως πραγματική ακολουθία στο $\mathbb{R}$ δεν έχει όριο διότι οι δυο υποακολουθίες των άρτιων και των περιττών δεικτών έχουν διαφορετικά όρια: $(-2)^{2k} = 2^{2k} \to +\infty$ και $(-2)^{2k-1} = -2^{2k-1} \to -\infty$.
Όμως, η ίδια ακολουθία ως μιγαδική ακολουθία έχει όριο ∞, διότι $|(-2)^n| = 2^n \to +\infty$.

Παράδειγμα 2.2.2. Θεωρούμε τη **γεωμετρική πρόοδο** (z^n).
Αν $|z| < 1$, τότε $|z^n - 0| = |z|^n \to 0$, οπότε $z^n \to 0$.
Αν $|z| > 1$, τότε $|z^n| = |z|^n \to +\infty$, οπότε $z^n \to \infty$.
Αν $z = 1$, τότε $z^n = 1 \to 1$.
Τέλος, έστω $|z| = 1$ και $z \neq 1$ και ας υποθέσουμε ότι $z^n \to w$. Επειδή $|z^n| = |z|^n = 1$ για κάθε n, συνεπάγεται ότι ο w δεν είναι ∞ και ότι $|w| = 1$. Επειδή $z^n \to w$, συνεπάγεται $z^{n+1} \to w$, οπότε $\frac{z^{n+1}}{z^n} \to \frac{w}{w} = 1$. Όμως, ισχύει $\frac{z^{n+1}}{z^n} = z$ για κάθε n, οπότε $z = 1$ και καταλήγουμε σε άτοπο.
Συνοψίζουμε:

$$z^n \begin{cases} \to 0, & \text{αν } |z| < 1 \\ \to 1, & \text{αν } z = 1 \\ \to \infty, & \text{αν } |z| > 1 \\ \text{δεν έχει όριο}, & \text{αν } |z| = 1, z \neq 1 \end{cases}$$

Έχει ενδιαφέρον να μελετήσουμε τη συμπεριφορά των διαδοχικών όρων της (z^n).
Αν $z = 0$ ή $z = 1$, τότε η (z^n) είναι σταθερή.
Έστω $0 < r = |z| < 1$ και $\theta = \operatorname{Arg} z$, οπότε $-\pi < \theta \leq \pi$ και $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Τότε ισχύει $z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$ και $z^{n+1} = r^{n+1}(\cos(n\theta + \theta) + i\sin(n\theta + \theta))$ για κάθε n.

Επομένως, τα μέτρα των διαδοχικών z^n φθίνουν γνησίως και συγκλίνουν στο 0 και οι διαδοχικοί z^n περιστρέφονται κάθε φορά κατά γωνία σταθερού μέτρου $|\theta|$ με τη θετική φορά περιστροφής, αν $\theta > 0$, ή με την αρνητική φορά περιστροφής, αν $\theta < 0$. Αν $\theta = 0$, τότε δεν υφίσταται περιστροφή. Με άλλα λόγια, αν $\theta \neq 0$, οι διαδοχικοί z^n κάνουν μια "σπειροειδή κίνηση" γύρω από το 0 συγκλίνοντας στο 0, ενώ, αν $\theta = 0$, οι διαδοχικοί z^n συγκλίνουν στο 0 πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $[0, 1]$.
Έστω $r = |z| > 1$. Τότε ισχύουν ακριβώς τα ίδια με την προηγούμενη περίπτωση με τη διαφορά ότι τα μέτρα των διαδοχικών z^n αυξάνονται γνησίως και αποκλίνουν στο $+\infty$. Δηλαδή, αν $\theta \neq 0$, οι διαδοχικοί z^n κάνουν μια "σπειροειδή κίνηση" γύρω από το 0 αποκλίνοντας στο ∞, ενώ, αν $\theta = 0$, οι διαδοχικοί z^n αποκλίνουν στο ∞ πάνω στην ημιευθεία $[1, +\infty]$.
Τέλος, έστω $|z| = 1$ και $z \neq 1$. Είναι σαφές από τα προηγούμενα ότι οι διαδοχικοί z^n περιέχονται στον σταθερό κύκλο $C(0; 1)$ (δηλαδή, ούτε πλησιάζουν το 0 ούτε απομακρύνονται από το 0) και περιστρέφονται κάθε φορά κατά γωνία σταθερού μέτρου $|\theta|$ με τη θετική φορά περιστροφής, αν $\theta > 0$, ή με την αρνητική φορά περιστροφής, αν $\theta < 0$.

Η επόμενη πρόταση είναι γνωστή.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.7. *Έστω $z_n = x_n + iy_n$ για κάθε n και $z = x + iy$. Τότε $z_n \to z$ αν και μόνο αν $x_n \to x$ και $y_n \to y$.*

Απόδειξη. Και οι δυο κατευθύνσεις αποδεικνύονται εύκολα από τις ανισότητες

$$0 \leq |x_n - x|, |y_n - y| \leq |z_n - z| \leq |x_n - x| + |y_n - y|. \tag{2.1}$$

Αν $z_n \to z$, τότε $|z_n - z| \to 0$ και από τις αριστερές ανισότητες (2.1) συνεπάγεται ότι $|x_n - x| \to 0$ και $|y_n - y| \to 0$ και, επομένως, $x_n \to x$ και $y_n \to y$. Αντιστρόφως, αν $x_n \to x$ και $y_n \to y$, τότε $|x_n - x| \to 0$ και $|y_n - y| \to 0$, οπότε από τη δεξιά ανισότητα (2.1) συνεπάγεται ότι $|z_n - z| \to 0$ και, επομένως, $z_n \to z$. $\square$

Μια άλλη γνωστή ιδιότητα είναι η εξής: *αν η (z_n) συγκλίνει, τότε είναι φραγμένη*. Αυτό αποδεικνύεται εύκολα μέσω της Πρότασης 2.7 και της ανάλογης ιδιότητας πραγματικών ακολουθιών αλλά και ανεξάρτητα από την Πρόταση 2.7. Το ίδιο και για τους συνηθισμένους αλγεβρικούς κανόνες: *αν $z_n \to z$ και $w_n \to w$, τότε*

$$z_n + w_n \to z + w, \quad -z_n \to -z, \quad z_n - w_n \to z - w, \quad z_n w_n \to zw, \quad \tfrac{1}{z_n} \to \tfrac{1}{z}, \quad \tfrac{z_n}{w_n} \to \tfrac{z}{w}.$$

Επίσης,

$$\overline{z_n} \to \overline{z}, \qquad |z_n| \to |z|.$$

Οι κανόνες αυτοί ισχύουν και όταν κάποιο από τα z, w (ή και τα δύο) είναι ∞ αρκεί να μην προκύπτει απροσδιόριστη μορφή. Υπενθυμίζουμε την ιδιαιτερότητα του $\mathbb{C}$ σε σχέση με το $\mathbb{R}$: αν $z_n \to 0$, τότε $\frac{1}{z_n} \to \infty$.

Ας δούμε πώς αποδεικνύεται μια οποιαδήποτε από αυτές τις αλγεβρικές ιδιότητες των ορίων με δύο τρόπους. Ας θεωρήσουμε την πιο απλή: $z_n + w_n \to z + w$ όταν $z_n \to z$ και $w_n \to w$ στην περίπτωση που $z, w \in \mathbb{C}$. Κατ' αρχάς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την αντίστοιχη ιδιότητα για πραγματικές ακολουθίες: γράφουμε $z_n = x_n + iy_n$, $w_n = u_n + iv_n$, $z = x + iy$ και $w = u + iv$, οπότε από $z_n \to z$, $w_n \to w$ συνεπάγεται $x_n \to x$, $y_n \to y$, $u_n \to u$ και $v_n \to v$ και, επομένως, $x_n + u_n \to x + u$ και $y_n + v_n \to y + v$ και άρα

$$z_n + w_n = (x_n + u_n) + i(y_n + v_n) \to (x + u) + i(y + v) = z + w.$$

Κατόπιν, μπορούμε να μιμηθούμε την *απόδειξη* της αντίστοιχης ιδιότητας για πραγματικές ακολουθίες: παίρνουμε τυχόν $\epsilon > 0$ και τότε ισχύει τελικά $|z_n - z| < \frac{\epsilon}{2}$ και ισχύει τελικά $|w_n - w| < \frac{\epsilon}{2}$, οπότε ισχύουν τελικά ταυτόχρονα και οι δύο ανισότητες και άρα ισχύει τελικά

$$|(z_n + w_n) - (z + w)| \leq |z_n - z| + |w_n - w| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Άλλη ιδιότητα: *αν* $z_n \to z$*, τότε* $z_{n_k} \to z$ *για κάθε υποακολουθία* (z_{n_k}) *της* (z_n).
Θα μνημονεύσουμε και την **ιδιότητα πληρότητας** του $\mathbb{C}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.8. *Κάθε ακολουθία Cauchy στο* $\mathbb{C}$ *συγκλίνει.*

Απόδειξη. Έστω (z_n) ακολουθία Cauchy, δηλαδή $|z_n - z_m| \to 0$ όταν $n, m \to +\infty$. Έχουμε τις προσαρμοσμένες ανισότητες (2.1):

$$0 \leq |x_n - x_m|, |y_n - y_m| \leq |z_n - z_m| \leq |x_n - x_m| + |y_n - y_m|. \tag{2.2}$$

Από τις αριστερές ανισότητες (2.2) βρίσκουμε ότι $|x_n - x_m| \to 0$ και $|y_n - y_m| \to 0$ όταν $n, m \to +\infty$, οπότε οι (x_n) και (y_n) είναι ακολουθίες Cauchy. Από την ιδιότητα πληρότητας του $\mathbb{R}$ συνεπάγεται ότι οι (x_n) και (y_n) συγκλίνουν και από την Πρόταση 2.7 συνεπάγεται ότι η (z_n) συγκλίνει. $\square$

Σχόλιο. Την ιδιότητα πληρότητας δεν την έχουν όλοι οι μετρικοί χώροι.

Τέλος, έχουμε έναν χαρακτηρισμό του οριακού σημείου ενός συνόλου βάσει της έννοιας της σύγκλισης ακολουθίας.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.9. *Έστω* $A \subseteq \mathbb{C}$*. Το* $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ *είναι οριακό σημείο του* A *αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία* (z_n) *στο* A *με όριο* z*.*

Απόδειξη. Έστω ότι το $z \in \mathbb{C}$ είναι οριακό σημείο του A. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $z_n \in A \cap D(z; \frac{1}{n})$. Άρα υπάρχει ακολουθία (z_n) στο A έτσι ώστε να είναι $|z_n - z| < \frac{1}{n}$ για κάθε n και, επομένως, $z_n \to z$.
Έστω ότι το ∞ είναι οριακό σημείο του A. Τότε το A είναι μη-φραγμένο, οπότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $z_n \in A$ με $|z_n| > n$. Άρα υπάρχει ακολουθία (z_n) στο A έτσι ώστε να είναι $|z_n| > n$ για κάθε n και, επομένως, $z_n \to \infty$.
Αντιστρόφως, έστω ότι υπάρχει ακολουθία (z_n) στο A με όριο $z \in \widehat{\mathbb{C}}$. Τότε για κάθε περιοχή $D(z; \epsilon)$ του z οι όροι της (z_n) βρίσκονται τελικά μέσα σ' αυτήν και άρα το A τέμνει κάθε περιοχή του z. Επομένως, το z είναι οριακό σημείο του A. $\square$

Σχόλιο. Φυσικά, η Πρόταση 2.9 αναφέρεται στο $\widehat{\mathbb{C}}$ με τη χορδική μετρική και, στην περίπτωση που $z \in \mathbb{C}$, στο $\mathbb{C}$ με την Ευκλείδεια μετρική.
Στον γενικό μετρικό χώρο (X, d) με $A \subseteq X$ και $x \in X$ έχουμε ότι: *το* x *είναι οριακό σημείο του* A *αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία* (x_n) *στο* A *με όριο* x*.*

Ασκήσεις.

2.2.1. Έστω $z_n \to z$ και $z_n \neq 0$ για κάθε n και $z \neq 0$.
[α] Αν $\operatorname{Arg} z \neq \pi$, αποδείξτε ότι $\operatorname{Arg} z_n \to \operatorname{Arg} z$.
[β] Μελετήστε τις ακολουθίες $(-1 + \frac{i}{n})$, $(-1 - \frac{i}{n})$ και $(-1 + (-1)^n \frac{i}{n})$. Ποιό είναι το όριό τους; Ποιά είναι τα πρωτεύοντα ορίσματα των όρων τους και ποιά είναι η οριακή συμπεριφορά τους;
[γ] Αν $\operatorname{Arg} z = \pi$, αποδείξτε ότι είτε (i) $\operatorname{Arg} z_n \to \pi$, είτε (ii) $\operatorname{Arg} z_n \to -\pi$, είτε (iii) η (z_n) χωρίζεται σε ακριβώς δυο υποακολουθίες $(z_{n'_k})$ και $(z_{n''_k})$ ώστε $\operatorname{Arg} z_{n'_k} \to \pi$ και $\operatorname{Arg} z_{n''_k} \to -\pi$.

2.2.2. Αποδείξτε ότι το $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ είναι σημείο συσσώρευσης του $A \subseteq \mathbb{C}$ αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία (z_n) στο A ώστε $z_n \to z$ και $z_n \neq z$ για κάθε n.

2.3 Συμπαγή σύνολα.

Το Θεώρημα 2.1 είναι η επέκταση στο μιγαδικό επίπεδο του γνωστού Θεωρήματος Bolzano - Weierstrass.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.1. [**Το Θεώρημα των Bolzano - Weierstrass**] *Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει τουλάχιστον μία συγκλίνουσα υποακολουθία.*

Απόδειξη. Έστω ότι ισχύει $|z_n| \leq M$ για κάθε n και έστω $z_n = x_n + iy_n$ για κάθε n. Συνεπάγεται ότι ισχύει $|x_n| \leq M$ και $|y_n| \leq M$ για κάθε n.
Σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano - Weierstrass για πραγματικές ακολουθίες, υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n) η οποία συγκλίνει. Έστω $x_{n_k} \to x$.
Τώρα θεωρούμε την αντίστοιχη υποακολουθία (y_{n_k}) της (y_n). Η (y_{n_k}) μπορεί να μη συγκλίνει αλλά είναι φραγμένη διότι ισχύει $|y_{n_k}| \leq M$ για κάθε k. Και πάλι σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano - Weierstrass για πραγματικές ακολουθίες, υπάρχει υποακολουθία $(y_{n_{k_l}})$ της (y_{n_k}) η οποία συγκλίνει. Έστω $y_{n_{k_l}} \to y$.
Επειδή $x_{n_k} \to x$, συνεπάγεται $x_{n_{k_l}} \to x$.
Ορίζουμε $z = x + iy$ και συμπεραίνουμε ότι $z_{n_{k_l}} \to z$. □

Και η επόμενη πρόταση έχει αντίστοιχη για πραγματικές μη-φραγμένες ακολουθίες.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.10. *Κάθε μη-φραγμένη ακολουθία έχει τουλάχιστον μία υποακολουθία που αποκλίνει στο ∞.*

Απόδειξη. Το ότι η (z_n) δεν είναι φραγμένη είναι ισοδύναμο με το ότι η $(|z_n|)$ δεν είναι φραγμένη. Από την αντίστοιχη πρόταση για πραγματικές ακολουθίες, συνεπάγεται ότι υπάρχει υποακολουθία $(|z_{n_k}|)$ της $(|z_n|)$ ώστε $|z_{n_k}| \to +\infty$ και, επομένως, $z_{n_k} \to \infty$. □

Πόρισμα από κοινού του Θεωρήματος 2.1 και της Πρότασης 2.10 είναι ότι
Κάθε ακολουθία έχει τουλάχιστον μία υποακολουθία η οποία έχει όριο στο $\widehat{\mathbb{C}}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ένα σύνολο $K \subseteq \mathbb{C}$ χαρακτηρίζεται* **συμπαγές** *αν κάθε ακολουθία στο K έχει συγκλίνουσα στο K υποακολουθία. Δηλαδή, το K είναι συμπαγές αν για κάθε (z_n) στο K υπάρχει υποακολουθία (z_{n_k}) ώστε $z_{n_k} \to z$ για κάποιο $z \in K$.*

Σχόλιο. Υπάρχει ο εξής εναλλακτικός ορισμός της συμπάγειας.
Έστω μετρικός χώρος (X, d). Ένα υποσύνολο K του X χαρακτηρίζεται **συμπαγές** *αν για κάθε συλλογή $\mathcal{C}$ ανοικτών υποσυνόλων του X με $K \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{C}} A$ υπάρχουν $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{C}$ ώστε $K \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_n$.*
Αποδεικνύεται ότι *το K είναι συμπαγές αν και μόνο αν κάθε ακολουθία στο K έχει συγκλίνουσα στο K υποακολουθία.*
Με άλλα λόγια, ο ορισμός της συμπάγειας που δώσαμε είναι ισοδύναμος με τον εναλλακτικό ορισμό. Προτιμήσαμε τον ορισμό της συμπάγειας με τις ακολουθίες από τον ορισμό με τις καλύψεις διότι είναι κάπως απλούστερος και διότι είναι πιο άμεσα εφαρμόσιμος σε όσα θα χρειαστούμε σ' αυτό το μάθημα.

Το επόμενο αποτέλεσμα αποτελεί τον κυριότερο τρόπο αναγνώρισης συμπαγών συνόλων.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.2. *Ένα σύνολο $K \subseteq \mathbb{C}$ είναι συμπαγές αν και μόνο αν είναι κλειστό και φραγμένο.*

Απόδειξη. Έστω ότι το K είναι συμπαγές. Θα αποδείξουμε ότι το K είναι κλειστό και φραγμένο.
Έστω τυχόν οριακό σημείο z του K. Τότε υπάρχει ακολουθία (z_n) στο K ώστε $z_n \to z$.
Επειδή το K είναι συμπαγές, υπάρχει υποακολουθία (z_{n_k}) της (z_n) η οποία συγκλίνει σε σημείο, έστω w, του K:

$$z_{n_k} \to w \quad \text{και} \quad w \in K.$$

Επειδή $z_n \to z$, συνεπάγεται $z_{n_k} \to z$. Άρα $z = w$ και, επομένως, $z \in K$.
Αποδείξαμε ότι κάθε οριακό σημείο του K ανήκει στο K. Άρα το K είναι κλειστό σύνολο.
Έστω ότι το K δεν είναι φραγμένο. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $z_n \in K$ ώστε $|z_n| > n$. Δηλαδή, υπάρχει ακολουθία (z_n) στο K ώστε $z_n \to \infty$. Τότε κάθε υποακολουθία της (z_n) αποκλίνει, επίσης, στο ∞, οπότε η (z_n) δεν έχει καμιά υποακολουθία η οποία να συγκλίνει σε σημείο του K. Αυτό αντιφάσκει με το ότι το K είναι συμπαγές και καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα το K είναι φραγμένο.
Αντιστρόφως, έστω ότι το K είναι κλειστό και φραγμένο. Θα αποδείξουμε ότι το K είναι συμπαγές, δηλαδή ότι κάθε ακολουθία στο K έχει υποακολουθία η οποία συγκλίνει σε σημείο του K.
Έστω οποιαδήποτε (z_n) στο K. Επειδή το K είναι φραγμένο, συνεπάγεται ότι η (z_n) είναι φραγμένη και, σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano - Weierstrass, υπάρχει υποακολουθία (z_{n_k}) της (z_n) η οποία συγκλίνει: έστω $z_{n_k} \to z$.
Επειδή η (z_{n_k}) είναι στο K, το z είναι οριακό σημείο του K. Επειδη το K είναι κλειστό, συνεπάγεται $z \in K$.
Άρα υπάρχει υποακολουθία (z_{n_k}) της (z_n) η οποία συγκλίνει σε σημείο του K. □

Σχόλιο. Δεν είναι σωστό ότι το Θεώρημα 2.2 ισχύει σε κάθε μετρικό χώρο. Αν ο (X, d) είναι μετρικός χώρος και το $K \subseteq X$ είναι συμπαγές, τότε το K είναι κλειστό και φραγμένο. Αλλά το αντίστροφο δεν είναι πάντοτε σωστό. Το αντίστροφο (και άρα το Θεώρημα 2.2) είναι σωστό για τους Ευκλείδειους χώρους $\mathbb{R}^n$, για παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.3.1. Κάθε κλειστός δίσκος $\mathrm{cl}\, D(z; r)$ είναι συμπαγές σύνολο.
Κάθε κλειστός δακτύλιος

$$\mathrm{cl}\, R(z; r_1, r_2) = \{w \,|\, r_1 \le |w - z| \le r_2\}$$

είναι συμπαγές σύνολο.
Κάθε κλειστό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο είναι συμπαγές σύνολο.

Παράδειγμα 2.3.2. Ο κλειστός δακτύλιος (με άπειρη εξωτερική ακτίνα)

$$\mathrm{cl}\, R(z; r_1, +\infty) = \{w \,|\, r_1 \le |w - z|\}$$

είναι κλειστό αλλά όχι φραγμένο σύνολο, οπότε δεν είναι συμπαγές σύνολο.
Ο ανοικτός δίσκος $D(z; r)$ είναι φραγμένο σύνολο αλλά όχι κλειστό, οπότε δεν είναι συμπαγές σύνολο.

Παράδειγμα 2.3.3. Το $\mathbb{C}$ είναι, προφανώς, ανοικτό σύνολο διότι κάθε σημείο z είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{C}$, αφού όποιον δίσκο $D(z; r)$ κι αν πάρουμε ισχύει $D(z; r) \subseteq \mathbb{C}$.
Το $\mathbb{C}$ είναι *και* κλειστό σύνολο διότι, προφανώς, κάθε οριακό σημείο του είναι μιγαδικός αριθμός και αυτομάτως περιέχεται στο $\mathbb{C}$.
Τώρα, το $\emptyset$, ως συμπλήρωμα του $\mathbb{C}$, είναι αυτομάτως κλειστό και ανοικτό. *Έχει ενδιαφέρον να αποδειχθεί κατ' ευθείαν ότι το $\emptyset$ είναι κλειστό και ανοικτό. Δοκιμάστε το!*
Τώρα, το $\mathbb{C}$ είναι κλειστό αλλά όχι φραγμένο και, επομένως, δεν είναι συμπαγές. Ενώ το $\emptyset$ είναι κλειστό *και* φραγμένο (αφού περιέχεται σε οποιονδήποτε δίσκο), οπότε είναι συμπαγές.
Βέβαια, το ότι το $\mathbb{C}$ δεν είναι συμπαγές μπορούμε να το δούμε και κατευθείαν από τον ορισμό της συμπάγειας. Μπορούμε να σκεφτούμε μια συγκεκριμένη ακολουθία στο $\mathbb{C}$, για παράδειγμα την (z_n) με $z_n = n$ για κάθε n, η οποία έχει όριο ∞ και η οποία, γι αυτόν τον λόγο, δεν έχει *καμιά* υποακολουθία η οποία συγκλίνει σε σημείο του $\mathbb{C}$ (διότι κάθε υποακολουθία έχει όριο ∞).
Μπορείτε να αποδείξετε κατ' ευθείαν με τον ορισμό ότι το $\emptyset$ είναι συμπαγές;

Παράδειγμα 2.3.4. Είδαμε ότι το $\mathbb{C}$ δεν είναι συμπαγές. Αν όμως επεκταθούμε (όπως κάνουμε αρκετά συχνά) στο $\widehat{\mathbb{C}}$, μπορούμε να αποδείξουμε ότι αυτό είναι συμπαγές σύνολο. Εννοείται ότι θεωρούμε το $\widehat{\mathbb{C}}$ ως υποσύνολο του $\widehat{\mathbb{C}}$ με τη χορδική μετρική.

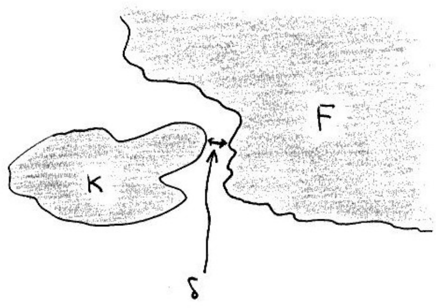
Πράγματι, ας θεωρήσουμε μια οποιαδήποτε ακολουθία στο $\widehat{\mathbb{C}}$. Αν αυτή έχει άπειρους όρους σταθερούς και ίσους με το ∞, τότε αυτοί αποτελούν υποακολουθία η οποία είναι σταθερή και επομένως έχει όριο στο $\widehat{\mathbb{C}}$ (το ∞). Αν η ακολουθία που θεωρήσαμε δεν έχει άπειρους όρους ίσους με ∞, τότε τελικά είναι στο $\mathbb{C}$, οπότε μπορούμε να αγνοήσουμε τους αρχικούς όρους και να υποθέσουμε ότι ολόκληρη η ακολουθία είναι στο $\mathbb{C}$ και τότε έχουμε το πόρισμα του Θεωρήματος των Bolzano - Weierstrass και της Πρότασης 2.10 το οποίο λέει ότι η ακολουθία μας έχει υποακολουθία η οποία έχει όριο στο $\widehat{\mathbb{C}}$.
Άρα κάθε ακολουθία στο $\widehat{\mathbb{C}}$ έχει υποακολουθία η οποία έχει όριο στο $\widehat{\mathbb{C}}$ και, επομένως, το $\widehat{\mathbb{C}}$ είναι συμπαγές.
Το ότι το $\widehat{\mathbb{C}}$ είναι συμπαγές το εκφράζουμε λέγοντας ότι το $\widehat{\mathbb{C}}$ αποτελεί **συμπαγοποίηση του** $\mathbb{C}$ **με επισύναψη ενός σημείου** (του ∞).

Παράδειγμα 2.3.5. Το σύνολο $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ δεν είναι κλειστό διότι δεν περιέχει το 0, το οποίο είναι οριακό σημείο του. Άρα το σύνολο δεν είναι συμπαγές.
Αντιθέτως, το σύνολο $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ είναι κλειστό (γιατί;) και φραγμένο, οπότε είναι συμπαγές.

Η Πρόταση 2.11 λέει ότι δυο σύνολα, το ένα συμπαγές και το άλλο κλειστό, τα οποία είναι ξένα έχουν *θετική απόσταση* ανάμεσά τους.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.11. *Έστω μη-κενό συμπαγές σύνολο K και μη-κενό κλειστό σύνολο F. Αν τα K και F είναι ξένα, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|z - w| \geq \delta$ για κάθε $z \in K$ και $w \in F$.*

Δείτε το σχήμα 12



Σχ 12.

Απόδειξη. Έστω ότι το συμπέρασμα δεν είναι σωστό. Τότε για κάθε n υπάρχουν $z_n \in K, w_n \in F$ ώστε $|z_n - w_n| < \frac{1}{n}$.
Επειδή το K είναι συμπαγές, υπάρχει υποακολουθία (z_{n_k}) της (z_n) η οποία συγκλίνει σε σημείο, έστω z, του K:
$$z_{n_k} \to z \quad \text{και} \quad z \in K.$$
Τότε ισχύει
$$0 \leq |w_{n_k} - z| \leq |w_{n_k} - z_{n_k}| + |z_{n_k} - z| < \frac{1}{n_k} + |z_{n_k} - z| \to 0$$
και, επομένως, $w_{n_k} \to z$.
Η ακολουθία (w_{n_k}) είναι στο F, οπότε το z είναι οριακό σημείο του F. Επειδή το F είναι κλειστό σύνολο, συνεπάγεται $z \in F$. Άρα $z \in K$ και $z \in F$ και καταλήγουμε σε άτοπο διότι τα K και F είναι ξένα. $\square$

Παράδειγμα 2.3.6. Ο δίσκος $K = \mathrm{cl}\, D(2;1)$ είναι συμπαγής και το ημιεπίπεδο $F = \{x+iy \mid x \leq 0\}$ είναι κλειστό. Είναι φανερό (γεωμετρικά) ότι τα σημεία $z_0 = 1$ του K και $w_0 = 0$ του F είναι τα πιο κοντινά σημεία των δυο συνόλων. Άρα ισχύει $|z - w| \geq 1$ για κάθε $z \in K$, $w \in F$.

Παράδειγμα 2.3.7. Ο δίσκος $K = \mathrm{cl}\, D(0;2)$ είναι συμπαγής και ο δακτύλιος $F = \mathrm{cl}\, R(0;3,+\infty)$ είναι κλειστός. Αν πάρουμε οποιοδήποτε $z_0 \in C(0;2) \subseteq K$ και το αντίστοιχο $w_0 = \frac{3}{2}z_0 \in C(0;3) \subseteq F$, τότε ισχύει $|z_0 - w_0| = 1 \leq |z-w|$ για κάθε $z \in K$, $w \in F$. Δηλαδή, η απόσταση των z_0, w_0 είναι η ελάχιστη από τις αποστάσεις ανάμεσα σε σημεία των K, F.

Παράδειγμα 2.3.8. Τα $F_1 = \{x+iy \,|\, y \leq 0\}$ και $F_2 = \{x+iy \,|\, x > 0, y \geq \frac{1}{x}\}$ είναι ξένα κλειστά σύνολα. Όμως, δεν υπάρχει κανένα $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|z-w| \geq \delta$ για κάθε $z \in F_1$, $w \in F_2$. Αν υπήρχε τέτοιο δ, τότε θα ίσχυε $|(x+i0) - (x+i\frac{1}{x})| \geq \delta$ ή, ισοδύναμα, $\frac{1}{x} \geq \delta$ για κάθε $x > 0$. Αυτό είναι αδύνατο διότι $\frac{1}{x} \to 0$ όταν $x \to +\infty$.
Βλέπουμε ότι κανένα από τα F_1 και F_2 δεν είναι συμπαγές, διότι κανένα δεν είναι φραγμένο.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.12. *Έστω (K_n) μια ακολουθία εγκιβωτισμένων μη-κενών συμπαγών συνόλων, δηλαδή $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \cdots \supseteq K_n \supseteq K_{n+1} \supseteq \cdots$. Τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα z το οποίο ανήκει σε κάθε K_n. Με άλλα λόγια η τομή $\bigcap_{n=1}^{+\infty} K_n$ είναι μη-κενή.*

Απόδειξη. Επειδή κάθε K_n είναι μη-κενό, επιλέγουμε για κάθε n ένα οποιοδήποτε $z_n \in K_n$ και σχηματίζουμε μια ακολουθία (z_n) η οποία περιέχεται στο K_1, δηλαδή στο μεγαλύτερο από τα K_n. Επειδή το K_1 είναι συμπαγές, υπάρχει κάποια υποακολουθία (z_{n_k}) η οποία συγκλίνει. Έστω, λοιπόν, $z_{n_k} \to z$.
Σταθεροποιούμε ένα *οποιοδήποτε* n. Επειδή $n_k \to +\infty$, θα ισχύει $n_k \geq n$ από κάποιο k και πέρα και, επομένως, θα ισχύει

$$z_{n_k} \in K_{n_k} \subseteq K_n$$

από κάποιο k και πέρα.
Άρα η υποακολουθία (z_{n_k}) είναι τελικά μέσα στο K_n, οπότε το z είναι οριακό σημείο του K_n και, επειδή το K_n είναι κλειστό, το z ανήκει στο K_n. Άρα το z ανήκει σε κάθε K_n. □

Ασκήσεις.

2.3.1. Αποδείξτε ότι κάθε πεπερασμένο σύνολο είναι συμπαγές.

2.3.2. Αποδείξτε ότι οποιαδήποτε πολυγωνική γραμμή, δηλαδή ένωση διαδοχικών ευθύγραμμων τμημάτων $[z_0, z_1] \cup [z_1, z_2] \cup \cdots \cup [z_{n-1}, z_n]$, είναι συμπαγές σύνολο.

2.3.3. Έστω συμπαγές σύνολο K και κλειστό σύνολο F ώστε $F \subseteq K$. Αποδείξτε ότι το F είναι συμπαγές σύνολο.

2.3.4. Έστω φραγμένο σύνολο A. Αποδείξτε ότι τα $\mathrm{cl}\, A$ και $\mathrm{bd}\, A$ είναι συμπαγή σύνολα.

2.3.5. [α] Έστω ακολουθία (z_n) ώστε $z_n \to z$ και $z_n \neq z$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι το $\{z_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ δεν είναι συμπαγές.
[β] Έστω ακολουθία (z_n) ώστε $z_n \to z$. Αποδείξτε ότι το $\{z_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} \cup \{z\}$ είναι συμπαγές.

2.3.6. Αποδείξτε ότι η ένωση πεπερασμένης συλλογής συμπαγών συνόλων είναι συμπαγές σύνολο και ότι η τομή οποιασδήποτε συλλογής συμπαγών συνόλων είναι συμπαγές σύνολο.

2.3.7. [α] Δείτε την άσκηση 2.1.3 και αποδείξτε ότι, αν το μη-κενό σύνολο K είναι συμπαγές, τότε υπάρχουν $z_0, w_0 \in K$ ώστε $|z_0 - w_0| = \mathrm{diam}\, K$.
[β] Δείτε την άσκηση 2.1.4 και αποδείξτε ότι, αν το μή-κενό σύνολο F είναι κλειστό, τότε υπάρχει $w_0 \in F$ ώστε $|z - w_0| = \mathrm{dist}(z, F)$.
[γ] Αν το μη-κενό K είναι συμπαγές και το μη-κενό F είναι κλειστό, αποδείξτε ότι υπάρχουν $z_0 \in K$ και $w_0 \in F$ ώστε να ισχύει $|z_0 - w_0| \leq |z - w|$ για κάθε $z \in K$, $w \in F$.

2.4 Συνεκτικά σύνολα.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω σύνολα A, B, C. Λέμε ότι τα B, C αποτελούν **διάσπαση** του A αν (i) $B \cup C = A$, (ii) $B \cap C = \emptyset$, (iii) $B \neq \emptyset$, $C \neq \emptyset$, (iv) κανένα από τα B, C δεν περιέχει οριακό σημείο του άλλου.*

Όταν ισχύουν τα (i), (ii), (iii), λέμε ότι τα B, C αποτελούν *διαμέριση* του A. Η διαμέριση είναι συνολοθεωρητική έννοια ενώ η διάσπαση είναι τοπολογική έννοια.

Παράδειγμα 2.4.1. Έστω $B = \mathrm{cl}\, D(0; 1)$, $C = \mathrm{cl}\, D(3; 1)$ και $A = B \cup C$.
Είναι σαφές ότι τα B, C αποτελούν διάσπαση του A.

Παράδειγμα 2.4.2. Έστω $B = D(0; 1)$, $C = D(2; 1)$ και $A = B \cup C$.
Οι δίσκοι B, C εφάπτονται αλλά, και πάλι, αποτελούν διάσπαση του A.

Παράδειγμα 2.4.3. Έστω $B = \mathrm{cl}\, D(0; 1)$, $C = D(2; 1)$ και $A = B \cup C$.
Τώρα, οι δίσκοι B, C εφάπτονται αλλά *δεν* αποτελούν διάσπαση του A. Το B περιέχει το σημείο 1 το οποίο είναι οριακό σημείο του C.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ένα σύνολο A χαρακτηρίζεται **συνεκτικό** αν δεν υπάρχει καμιά διάσπασή του, δηλαδή αν δεν υπάρχει κανένα ζευγάρι συνόλων B, C με τις ιδιότητες (i) - (iv) του προηγούμενου ορισμού.*

Παράδειγμα 2.4.4. Το A του παραδείγματος 2.4.1 καθώς και το A του παραδείγματος 2.4.2 είναι και τα δυο μη-συνεκτικά διότι για το καθένα υπάρχει συγκεκριμένη διάσπαση.
Δεν μπορούμε, όμως, να αποφασίσουμε αυτή τη στιγμή αν το A του παραδείγματος 2.4.3 είναι συνεκτικό ή όχι. Γνωρίζουμε ότι τα συγκεκριμένα B, C που αναφέρονται στο παράδειγμα δεν αποτελούν διάσπαση του A. *Όμως, για να είναι αποφασίσουμε ότι το A είναι συνεκτικό πρέπει να αποδείξουμε ότι, όχι μόνο το συγκεκριμένο ζευγάρι, αλλά ότι ένα οποιοδήποτε ζευγάρι συνόλων δεν αποτελεί διάσπαση του A.*

Παράδειγμα 2.4.5. Είναι προφανές ότι το $\emptyset$ αλλά και κάθε μονοσύνολο $\{z\}$ είναι συνεκτικό σύνολο. Τα σύνολα αυτά δεν έχουν καν διαμέριση αφού για να επιδέχεται ένα σύνολο διαμέριση πρέπει να έχει τουλάχιστον δύο στοιχεία.

ΛΗΜΜΑ 2.2. *Έστω σύνολα B, C ώστε $B \cap C = \emptyset$ και κανένα από τα B, C δεν περιέχει οριακό σημείο του άλλου. Αν το A είναι συνεκτικό και $A \subseteq B \cup C$, τότε είτε $A \subseteq B$ είτε $A \subseteq C$.*

Απόδειξη. Ορίζουμε
$$B' = A \cap B, \qquad C' = A \cap C.$$
Προφανώς, είναι $B' \cup C' = A$ και $B' \cap C' = \emptyset$.
Τώρα, έστω $z \in B'$. Τότε $z \in B$, οπότε το z δεν είναι οριακό σημείο του C. Άρα υπάρχει $r > 0$ ώστε το C να μην τέμνει τον δίσκο $D(z; r)$ και τότε, επειδή $C' \subseteq C$, ούτε το C' τέμνει τον $D(z; r)$. Άρα το z δεν είναι οριακό σημείο ούτε του C'. Καταλήγουμε στο ότι το B' δεν περιέχει οριακό σημείο του C'. Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι το C' δεν περιέχει οριακό σημείο του B'.
Αν ήταν $B' \neq \emptyset$ και $C' \neq \emptyset$, τότε τα B', C' θα αποτελούσαν διάσπαση του A αλλά αυτό είναι αδύνατο, αφού το A είναι συνεκτικό. Άρα είτε $B' = \emptyset$ είτε $C' = \emptyset$ και, επομένως, είτε $A \subseteq C$ είτε $A \subseteq B$, αντιστοίχως. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.13. *Έστω μια συλλογή συνεκτικών συνόλων A και έστω ότι όλα τα σύνολα A της συλλογής έχουν ένα κοινό σημείο. Τότε η ένωση όλων των συνόλων A της συλλογής είναι συνεκτικό σύνολο.*

Απόδειξη. Ονομάζουμε A_0 την ένωση όλων των συνόλων A της συλλογής και θα αποδείξουμε ότι το A_0 είναι συνεκτικό σύνολο. Έστω, επίσης, z_0 το κοινό σημείο όλων των A της συλλογής. Έστω ότι το A_0 δεν είναι συνεκτικό σύνολο, οπότε υπάρχουν σύνολα B, C ώστε $B \cup C = A_0$,

$B \cap C = \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $C \neq \emptyset$ και κανένα από τα B, C δεν περιέχει οριακό σημείο του άλλου.
Προφανώς, ισχύει $z_0 \in A_0$, οπότε $z_0 \in B$ ή $z_0 \in C$. Ας υποθέσουμε ότι $z_0 \in B$ (η απόδειξη είναι ίδια αν $z_0 \in C$).
Για κάθε σύνολο A της συλλογής ισχύει $A \subseteq A_0$ και, επομένως, $A \subseteq B \cup C$. Σύμφωνα με το Λήμμα 2.2, κάθε σύνολο A της συλλογής περιέχεται είτε στο B είτε στο C. Η δεύτερη περίπτωση αποκλείεται: αν ένα A περιείχετο στο C, δεν θα μπορύσε να περιέχει το κοινό σημείο z_0 το οποίο βρίσκεται στο B. Άρα, λοιπόν, κάθε σύνολο A της συλλογής περιέχεται στο B. Άρα και η ένωση A_0 των συνόλων A της συλλογής περιέχεται στο B. Δηλαδή $A_0 \subseteq B$ και καταλήγουμε σε άτοπο διότι το C είναι μη-κενό υποσύνολο του A_0.
Άρα το A_0 είναι συνεκτικό σύνολο. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.14. *Αν το A είναι συνεκτικό και $A \subseteq D \subseteq \operatorname{cl} A$, τότε και το D είναι συνεκτικό.*

Απόδειξη. Έστω ότι το D δεν είναι συνεκτικό, οπότε υπάρχουν σύνολα B, C ώστε $B \cup C = D$, $B \cap C = \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $C \neq \emptyset$ και κανένα από τα B, C δεν περιέχει οριακό σημείο του άλλου.
Επειδή $A \subseteq D$, συνεπάγεται $A \subseteq B \cup C$. Επειδή το A είναι συνεκτικό, από το Λήμμα 2.2 συνεπάγεται $A \subseteq B$ ή $A \subseteq C$. Έστω $A \subseteq B$. (Η απόδειξη είναι ίδια αν $A \subseteq C$.)
Επειδή $D \subseteq \operatorname{cl} A$, κάθε σημείο του D είναι οριακό σημείο του A και, επομένως, οριακό σημείο και του B (αφού $A \subseteq B$). Άρα κανένα σημείο του D δεν ανήκει στο C (αφού το C δεν περιέχει οριακά σημεία του B). Αυτό είναι άτοπο διότι το C είναι μη-κενό υποσύνολο του D.
Άρα το D είναι συνεκτικό. □

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω σημεία a, b και $r > 0$. Κάθε πεπερασμένο σύνολο $\{z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n\}$ με $z_0 = a$, $z_n = b$ και $|z_{k-1} - z_k| < r$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$ ονομάζεται **r-αλληλουχία σημείων που συνδέει τα** a, b. Αν, επιπλέον, ισχύει $z_k \in A$ για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n$, τότε λέμε ότι η r-αλληλουχία σημείων είναι στο A.*

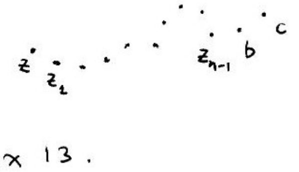
ΘΕΩΡΗΜΑ 2.3. *Έστω συμπαγές σύνολο K. Το K είναι συνεκτικό αν και μόνο αν για κάθε $z, w \in K$ και για κάθε $r > 0$ υπάρχει r-αλληλουχία σημείων στο K η οποία συνδέει τα z, w.*

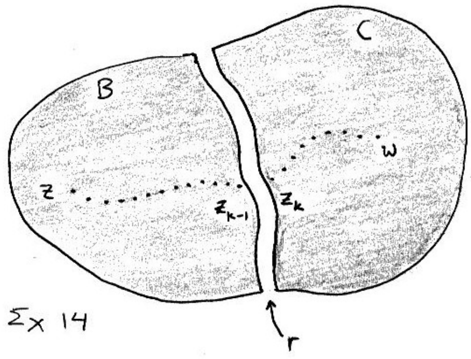
Απόδειξη. Έστω ότι το K είναι συνεκτικό.
Θεωρούμε οποιαδήποτε $z, w \in K$ και οποιοδήποτε $r > 0$ και θα αποδείξουμε ότι υπάρχει r-αλληλουχία σημείων στο K που συνδέει τα z, w.
Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει r-αλληλουχία σημείων στο K που συνδέει τα z, w και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Ορίζουμε τα σύνολα

$$B = \{b \in K \,|\, \text{υπάρχει } r\text{-αλληλουχία σημείων στο } K \text{ που συνδέει τα } z, b\},$$

$$C = \{c \in K \,|\, \text{δεν υπάρχει } r\text{-αλληλουχία σημείων στο } K \text{ που συνδέει τα } z, c\}.$$

Είναι φανερό ότι $B \cup C = K$, $B \cap C = \emptyset$, $B \neq \emptyset$ (διότι $z \in B$) και $C \neq \emptyset$ (διότι $w \in C$).
Ας υποθέσουμε ότι το B περιέχει κάποιο οριακό σημείο, έστω b, του C. Δείτε το σχήμα 13. Τότε (επειδή $b \in B$) υπάρχει r-αλληλουχία σημείων στο K που συνδέει τα z, b και, επίσης, (επειδή το b είναι οριακό σημείο του C) υπάρχει $c \in C$ ώστε $|b - c| < r$. Αν στην r-αλληλουχία σημείων του K που συνδέει τα z, b επισυνάψουμε (ως τελευταίο σημείο μετά το b) το c, τότε προκύπτει r-αλληλουχία σημείων του K που συνδέει τα z, c. Αυτό, όμως, είναι άτοπο διότι $c \in C$. Άρα *το B δεν περιέχει οριακό σημείο του C.*





Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι το C περιέχει κάποιο οριακό σημείο, έστω c, του B. Τότε (επειδή το c είναι οριακό σημείο του B) υπάρχει $b \in B$ ώστε $|b - c| < r$ και (επειδή $b \in B$) υπάρχει r-αλληλουχία σημείων του K που συνδέει τα z, b. Αν στην r-αλληλουχία σημείων του K που συνδέει τα z, b επισυνάψουμε (ως τελευταίο σημείο μετά το b) το c, τότε προκύπτει r-αλληλουχία σημείων του K που συνδέει τα z, c. Αυτό, όμως, είναι άτοπο διότι $c \in C$. Άρα *το C δεν περιέχει οριακό σημείο του B*.
Επιτέλους, από τις ιδιότητες των B, C προκύπτει ότι αυτά αποτελούν διάσπαση του K και αυτό είναι άτοπο διότι το K είναι συνεκτικό.
Άρα υπάρχει r-αλληλουχία σημείων στο K που συνδέει τα z, w.

Αντιστρόφως, έστω ότι για κάθε $z, w \in K$ και για κάθε $r > 0$ υπάρχει r-αλληλουχία σημείων στο K η οποία συνδέει τα z, w.
Υποθέτουμε ότι το K δεν είναι συνεκτικό και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Επειδή το K δεν είναι συνεκτικό, υπάρχουν σύνολα B, C ώστε $B \cup C = K$, $B \cap C = \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $C \neq \emptyset$ και κανένα από τα B, C δεν περιέχει οριακό σημείο του άλλου.
Έστω z οριακό σημείο του B. Επειδή $B \subseteq K$, το z είναι οριακό σημείο και του K. Επειδή το K είναι κλειστό σύνολο, συνεπάγεται $z \in K$. Επειδή $z \notin C$ (διότι το C δεν περιέχει οριακό σημείο του B) συνεπάγεται $z \in B$. Άρα το B περιέχει όλα τα οριακά σημεία του και, επομένως, είναι κλειστό σύνολο. Τέλος, επειδή $B \subseteq K$ και το K είναι φραγμένο, συνεπάγεται ότι το B είναι φραγμένο. Άρα το B, ως κλειστό και φραγμένο, είναι συμπαγές.
Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο αποδεικνύεται ότι και το C είναι συμπαγές.
Συμπεραίνουμε ότι τα B, C είναι συμπαγή και ξένα, οπότε, από την Πρόταση 2.11, υπάρχει $r > 0$ ώστε να ισχύει $|b - c| \geq r$ για κάθε $b \in B$ και $c \in C$. Δείτε το σχήμα 14. Αφού $B \neq \emptyset$, $C \neq \emptyset$, θεωρούμε κάποιο $z \in B$ και κάποιο $w \in C$. Τώρα, είναι εύκολο να δούμε ότι δεν υπάρχει r-αλληλουχία σημείων στο K που να συνδέει τα z, w, οπότε καταλήγουμε σε άτοπο.
Πράγματι, έστω ότι υπάρχει r-αλληλουχία $\{z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n\}$ σημείων στο K ώστε $z_0 = z$, $z_n = w$ και $|z_{k-1} - z_k| < r$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$. Επειδή $z_0 \in B$, $z_n \in C$, συνεπάγεται ότι υπάρχει κάποιο k ώστε $z_{k-1} \in B$, $z_k \in C$. Τότε το $|z_{k-1} - z_k| < r$ αντιφάσκει με το ότι ισχύει $|b - c| \geq r$ για κάθε $b \in B$, $c \in C$. □

Παράδειγμα 2.4.6. Κάθε ευθύγραμμο τμήμα $[a, b]$ είναι συμπαγές σύνολο και, αν πάρουμε δυο οποιαδήποτε σημεία z, w του $[a, b]$ και ένα οποιοδήποτε $r > 0$, είναι φανερό ότι μπορούμε να βρούμε πεπερασμένου πλήθους σημεία πάνω στο $[a, b]$, ξεκινώντας από το z και καταλήγοντας στο w, ώστε καθένα από αυτά να απέχει από τα γειτονικά του απόσταση $< r$. (Όσο μικρότερος είναι ο r τόσο περισσότερα σημεία πρέπει να πάρουμε.)
Άρα κάθε ευθύγραμμο τμήμα $[a, b]$ είναι συνεκτικό σύνολο.

Παράδειγμα 2.4.7. Από το παράδειγμα 2.4.6 και από την Πρόταση 2.13 συνεπάγεται ότι μια οποιαδήποτε πολυγωνική γραμμή $[z_0, z_1] \cup [z_1, z_2] \cup \cdots \cup [z_{n-1}, z_n]$ είναι συνεκτικό σύνολο.
Πράγματι, τα ευθύγραμμα τμήματα $[z_0, z_1]$, $[z_1, z_2]$ είναι συνεκτικά σύνολα με ένα κοινό σημείο, το z_1, οπότε η ένωσή τους $[z_0, z_1] \cup [z_1, z_2]$ είναι συνεκτικό σύνολο. Κατόπιν, το $[z_0, z_1] \cup [z_1, z_2]$ και το $[z_2, z_3]$ είναι συνεκτικά σύνολα με ένα κοινό σημείο, το z_2, οπότε η ένωσή τους $[z_0, z_1] \cup$

$[z_1, z_2] \cup [z_2, z_3]$ είναι συνεκτικό σύνολο. Συνεχίζουμε επαγωγικά μέχρι να αποδείξουμε ότι ολόκληρη η πολυγωνική γραμμή είναι συνεκτικό σύνολο.

Παράδειγμα 2.4.8. Οποιοδήποτε διάστημα πάνω σε οποιαδήποτε ευθεία, ακόμη κι αν το διάστημα δεν περιέχει κάποιο από τα άκρα του ή κι αν δεν είναι φραγμένο (όλη η ευθεία, για παράδειγμα) είναι συνεκτικό.
Πράγματι, έστω I ένα διάστημα μιας ευθείας l. Είναι φανερό ότι μπορούμε να βρούμε μια ακολουθία ευθύγραμμων τμημάτων $[a_n, b_n]$ τα οποία να αυξάνονται και η ένωσή τους να είναι το διάστημα I. Καθένα από αυτά τα ευθ. τμήματα είναι συνεκτικό, οπότε από την Πρόταση 2.13 συνεπάγεται ότι το διάστημα I είναι κι αυτό συνεκτικό.
Από την άλλη μεριά ισχύει και το αντίστροφο. Έστω ότι το I είναι συνεκτικό υποσύνολο μιας ευθείας l. Αν το I δεν είναι διάστημα, υπάρχουν δύο σημεία $z, w \in I$ και κάποιο σημείο $a \in l$ το οποίο είναι ανάμεσα στα z, w και δεν ανήκει στο I. Τότε το σύνολο B που αποτελείται από τα σημεία του I που βρίσκονται στην μία από τις δύο ημιευθείες της l με κορυφή το a και το σύνολο C που αποτελείται από τα σημεία του I που βρίσκονται στην δεύτερη από τις δύο ημιευθείες της l με κορυφή το a σχηματίζουν διάσπαση του I. Άρα το I είναι διάστημα.
Έχουμε λοιπόν, ότι *ένα υποσύνολο μιας ευθείας είναι συνεκτικό αν και μόνο αν είναι διάστημα.*

Παράδειγμα 2.4.9. Όπως κάθε ευθύγραμμο τμήμα είναι συνεκτικό, έτσι και κάθε τόξο κύκλου είναι συνεκτικό.
Αν το τόξο περιέχει τα άκρα του, τότε είναι συμπαγές, οπότε μπορούμε να επαναλάβουμε τον συλλογισμό του παραδείγματος 2.4.6. Αν το τόξο δεν περιέχει κάποιο από τα άκρα του, τότε επαναλαμβάνουμε τον συλλογισμό του παραδείγματος 2.4.8 με μια ακολουθία τόξων που περιέχουν τα άκρα τους και τα οποία αυξάνονται και η ένωσή τους είναι το αρχικό τόξο.
Όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, μπορούμε εύκολα να δούμε ότι ένα συνεκτικό υποσύνολο ενός κύκλου είναι οπωσδήποτε τόξο του κύκλου (πιθανόν μονοσύνολο ή και ολόκληρος ο κύκλος).
Άρα *ένα υποσύνολο ενός κύκλου είναι συνεκτικό αν και μόνο αν είναι τόξο.*

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ένα σύνολο A χαρακτηρίζεται* **πολυγωνικά συνεκτικό** *αν για κάθε δυο σημεία του A υπάρχει πολυγωνική γραμμή στο A η οποία συνδέει τα δυο αυτά σημεία.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.15. *Κάθε πολυγωνικά συνεκτικό σύνολο είναι συνεκτικό.*

Απόδειξη. Έστω πολυγωνικά συνεκτικό σύνολο A και έστω οποιοδήποτε σημείο $z_0 \in A$. Για κάθε $z \in A$ υπάρχει πολυγωνική γραμμή L_z η οποία περιέχεται στο A και συνδέει το z_0 με το z. Τότε, κατ' αρχάς, η ένωση όλων αυτών των πολυγωνικών γραμμών L_z περιέχεται στο A. Αντιστρόφως, επειδή κάθε $z \in A$ περιέχεται στην αντίστοιχη πολυγωνική γραμμή L_z και, επομένως, και στην ένωσή τους, συνεπάγεται ότι το A περιέχεται στην ένωση των πολυγωνικών γραμμών L_z.
Άρα το A ταυτίζεται με την ένωση όλων των πολυγωνικών γραμμών L_z.
Τώρα, επειδή κάθε πολυγωνική γραμμή L_z είναι συνεκτική και επειδή όλες έχουν κοινό σημείο το z_0, συνεπάγεται ότι η ένωσή τους, δηλαδή το A, είναι συνεκτική. □

Παράδειγμα 2.4.10. Κάθε κυρτό σύνολο A είναι πολυγωνικά συνεκτικό και, επομένως, συνεκτικό. Για παράδειγμα, κάθε δίσκος και κάθε ημιεπίπεδο είναι συνεκτικό σύνολο.
Πράγματι, αν πάρουμε δυο οποιαδήποτε σημεία του A το ευθύγραμμο τμήμα που τα ενώνει περιέχεται ολόκληρο στο A.

Παράδειγμα 2.4.11. Ένα σύνολο A χαρακτηρίζεται **αστρόμορφο** αν υπάρχει ένα συγκεκριμένο σημείο $z_0 \in A$ ώστε για κάθε $z \in A$ το ευθ. τμήμα $[z_0, z]$ να περιέχεται ολόκληρο στο A. Ένα τέτοιο z_0 χαρακτηρίζεται *κέντρο* του αστρόμορφου A. Το κέντρο μπορεί να μην είναι μοναδικό, αλλά αυτό δεν σημαίνει ότι κάθε σημείο του αστρόμορφου A είναι κέντρο του. Είναι φανερό ότι ένα αστρόμορφο A είναι πολυγωνικά συνεκτικό και, επομένως, συνεκτικό.
Πράγματι, δυο οποιαδήποτε σημεία του A μπορούν να συνδεθούν με μια πολυγωνική γραμμή στο A η οποία αποτελείται από δυο ευθύγραμμα τμήματα: ένα ευθ. τμήμα από το ένα σημείο στο z_0 και ένα ευθ. τμήμα από το z_0 στο άλλο σημείο.

Παράδειγμα 2.4.12. Κάθε δακτύλιος είναι συνεκτικό σύνολο.

Παράδειγμα 2.4.13. Έστω $A = \mathrm{cl}\, D(0;1) \cup D(2;1)$.
Είδαμε το σύνολο αυτό στο παράδειγμα 2.4.3 και τώρα μπορούμε να πούμε ότι το A είναι συνεκτικό, διότι είναι αστρόμορφο με κέντρο το σημείο 1.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.4. *Ένα ανοικτό σύνολο είναι συνεκτικό αν και μόνο αν είναι πολυγωνικά συνεκτικό.*

Απόδειξη. Έστω ανοικτό σύνολο U.
Αν το U είναι πολυγωνικά συνεκτικό, τότε, σύμφωνα με την Πρόταση 2.15, είναι συνεκτικό.
Αντιστρόφως, έστω ότι το U είναι συνεκτικό.
Θεωρούμε οποιαδήποτε $z, w \in U$ και θα αποδείξουμε ότι υπάρχει πολυγωνική γραμμή στο U η οποία συνδέει τα z, w.
Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει τέτοια πολυγωνική γραμμή και θα καταλήξουμε σε άτοπο.
Ορίζουμε τα σύνολα

$$B = \{b \in U \,|\, \text{υπάρχει πολυγωνική γραμμή στο } U \text{ που συνδέει τα } z, b\},$$

$$C = \{c \in U \,|\, \text{δεν υπάρχει πολυγωνική γραμμή στο } U \text{ που συνδέει τα } z, c\}.$$

Είναι φανερό ότι $B \cup C = U$, $B \cap C = \emptyset$, $B \neq \emptyset$ (διότι $z \in B$) και $C \neq \emptyset$ (διότι $w \in C$).
Υποθέτουμε ότι το B περιέχει κάποιο οριακό σημείο, έστω b, του C. Τότε (επειδή $b \in B$) υπάρχει πολυγωνική γραμμή στο U η οποία συνδέει τα z, b. Επειδή το U είναι ανοικτό σύνολο, υπάρχει $r > 0$ ώστε $D(b;r) \subseteq U$ και (επειδή το b είναι οριακό σημείο του C) υπάρχει $c \in D(b;r) \cap C$. Αν στην πολυγωνική γραμμή στο U που συνδέει τα z, b επισυνάψουμε (ως τελευταίο) το ευθ. τμήμα $[b, c]$ (το οποίο περιέχεται στον δίσκο $D(b;r)$, οπότε και στο U), προκύπτει πολυγωνική γραμμή στο U που συνδέει τα z, c. Αυτό, όμως, είναι άτοπο διότι $c \in C$. Άρα *το B δεν περιέχει οριακό σημείο του C.*
Υποθέτουμε, τώρα, ότι το C περιέχει κάποιο οριακό σημείο, έστω c, του B. Επειδή το U είναι ανοικτό, υπάρχει $r > 0$ ώστε $D(c;r) \subseteq U$. Τότε (επειδή το c είναι οριακό σημείο του B) υπάρχει $b \in D(c;r) \cap B$. Όπως πριν, (επειδή $b \in B$) υπάρχει πολυγωνική γραμμή στο U που συνδέει τα z, b και, αν σ' αυτήν επισυνάψουμε (ως τελευταίο) το ευθ. τμήμα $[b, c]$ (το οποίο περιέχεται στον δίσκο $D(c;r)$, οπότε και στο U), προκύπτει πολυγωνική γραμμή στο U που συνδέει τα z, c. Αυτό, όμως, είναι άτοπο διότι $c \in C$. Άρα *το C δεν περιέχει οριακό σημείο του B.*
Από τις ιδιότητες των B, C προκύπτει ότι αυτά αποτελούν διάσπαση του U και αυτό είναι άτοπο διότι το U είναι συνεκτικό. Άρα υπάρχει πολυγωνική γραμμή στο U που συνδέει τα z, w. $\square$

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ένα ανοικτό και συνεκτικό σύνολο χαρακτηρίζεται* **χωρίο** *ή* **τόπος**.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ένα $C \subseteq A$ χαρακτηρίζεται* ***συνεκτική συνιστώσα*** *του A αν το C είναι συνεκτικό σύνολο με την εξής ιδιότητα: αν $C \subseteq C' \subseteq A$ και το C' είναι συνεκτικό σύνολο, τότε $C = C'$.*

Με άλλα λόγια, το C είναι συνεκτική συνιστώσα του A αν *είναι συνεκτικό υποσύνολο του A και δεν υπάρχει γνησίως μεγαλύτερο συνεκτικό υποσύνολο του A.*

Ας δούμε μια χαρακτηριστική ιδιότητα των συνεκτικών συνιστωσών. Έστω ότι το C είναι συνεκτική συνιστώσα του A και έστω B οποιοδήποτε συνεκτικό υποσύνολο του A ώστε $C \cap B \neq \emptyset$. Τότε το $C \cup B$ είναι συνεκτικό σύνολο, ως ένωση συνεκτικών συνόλων με κοινό σημείο, και είναι $C \subseteq C \cup B \subseteq A$. Επειδή το C είναι συνεκτική συνιστώσα του A, συνεπάγεται $C \cup B = C$ και, επομένως, $B \subseteq C$. Με άλλα λόγια:
Μια συνεκτική συνιστώσα του A "καταπίνει" οποιοδήποτε συνεκτικό υποσύνολο του A την τέμνει.

Έστω C_1, C_2 δυο *διαφορετικές* συνεκτικές συνιστώσες του A και ας υποθέσουμε ότι $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$. Επειδή το C_1 είναι συνεκτικό υποσύνολο του A και τέμνει την συνεκτική συνιστώσα C_2 του A, συνεπάγεται $C_1 \subseteq C_2$. Με συμμετρικό τρόπο συνεπάγεται $C_2 \subseteq C_1$ και, επομένως, $C_1 = C_2$. Καταλήγουμε σε άτοπο, οπότε $C_1 \cap C_2 = \emptyset$. Συμπεραίνουμε ότι:
Διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του A είναι ξένες.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.16. *Κάθε σύνολο είναι ίσο με την ένωση των (ξένων ανά δύο) συνεκτικών συνιστωσών του.*

Απόδειξη. Θεωρούμε σύνολο A και θα αποδείξουμε ότι κάθε σημείο του A ανήκει σε μια συνεκτική συνιστώσα του A.
Παίρνουμε $z \in A$ και ορίζουμε $C(z)$ να είναι η ένωση όλων των συνεκτικών υποσυνόλων B του A που περιέχουν το z. (Ένα τέτοιο σύνολο είναι το μονοσύνολο $\{z\}$.) Δηλαδή

$$C(z) = \bigcup \{B \mid B \text{ συνεκτικό} \subseteq A \text{ και } z \in B\}.$$

Το $C(z)$ είναι υποσύνολο του A, αφού είναι ένωση υποσυνόλων B του A. Το $C(z)$ περιέχει το z και είναι συνεκτικό, διότι είναι ένωση συνεκτικών συνόλων B με κοινό σημείο το z.
Τώρα, αν $C(z) \subseteq C' \subseteq A$ και το C' είναι συνεκτικό σύνολο, τότε το C' είναι ένα από τα συνεκτικά υποσύνολα B του A που περιέχουν το z, οπότε από τον ορισμό του $C(z)$ συνεπάγεται $C' \subseteq C(z)$ και, επομένως, $C(z) = C'$.
Άρα το $C(z)$ είναι συνεκτική συνιστώσα του A και περιέχει το z. □

Είναι προφανές ότι το σύνολο A είναι συνεκτικό αν και μόνο αν το A είναι η μοναδική συνεκτική συνιστώσα του A.

Παράδειγμα 2.4.14. Έστω $A = D(0;1) \cup D(3;1)$.
Οι δίσκοι $D(0;1)$ και $D(3;1)$ είναι συνεκτικά υποσύνολα του A.
Εφαρμόζοντας το Λήμμα 2.2 με $B = D(0;1)$ και $C = D(3;1)$, βλέπουμε ότι οποιοδήποτε συνεκτικό υποσύνολο του A περιέχεται είτε ολόκληρο στο $D(0;1)$ είτε ολόκληρο στο $D(3;1)$. Δηλαδή δεν υπάρχει συνεκτικό υποσύνολο του A γνησίως μεγαλύτερο είτε του $D(0;1)$ είτε του $D(3;1)$.
Άρα οι $D(0;1)$ και $D(3;1)$ είναι οι συνεκτικές συνιστώσες του A.

Παράδειγμα 2.4.15. Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{Z}$ και οποιοδήποτε μονοσύνολο $\{n\}$ με $n \in \mathbb{Z}$.
Το $\{n\}$ είναι συνεκτικό σύνολο. Έστω $\{n\} \subseteq C' \subseteq \mathbb{Z}$ και $C' \neq \{n\}$. Τότε $C' = \{n\} \cup \big(C' \setminus \{n\}\big)$. Τα $\{n\}$ και $C' \setminus \{n\}$ αποτελούν διάσπαση του C', αφού κανένα από τα δυο δεν περιέχει οριακό σημείο του άλλου. Άρα το C' δεν είναι συνεκτικό σύνολο. Επομένως, το $\{n\}$ είναι συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{Z}$.
Άρα το $\mathbb{Z}$ έχει άπειρες συνεκτικές συνιστώσες, όλες μονοσύνολα.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.17. *Κάθε συνεκτική συνιστώσα ενός ανοικτού συνόλου είναι ανοικτό σύνολο.*

Απόδειξη. Έστω συνεκτική συνιστώσα C του ανοικτού συνόλου U και έστω $z \in C$.
Τότε $z \in U$ και, επειδή το U είναι ανοικτό σύνολο, υπάρχει $r > 0$ ώστε $D(z;r) \subseteq U$. Επειδή ο δίσκος $D(z;r)$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του U και τέμνει τη συνεκτική συνιστώσα C του A, συνεπάγεται $D(z;r) \subseteq C$. Άρα το z είναι εσωτερικό σημείο του C.
Άρα το C είναι ανοικτό σύνολο. □

Άρα, σύμφωνα με τις Προτάσεις 2.16 και 2.17, κάθε ανοικτό σύνολο είναι ένωση ξένων ανά δύο χωρίων (δηλαδή ανοικτών και συνεκτικών συνόλων).

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.18. *Κάθε συνεκτική συνιστώσα ενός κλειστού συνόλου είναι κλειστό σύνολο.*

Απόδειξη. Έστω συνεκτική συνιστώσα C του κλειστού συνόλου F.
Επειδή $C \subseteq F$ και το F είναι κλειστό και το $\mathrm{cl}\, C$ είναι το μικρότερο κλειστό υπερσύνολο του C, συνεπάγεται $C \subseteq \mathrm{cl}\, C \subseteq F$.
Από την Πρόταση 2.14, το $\mathrm{cl}\, C$ είναι συνεκτικό σύνολο και επειδή το C είναι συνεκτική συνιστώσα του F, συνεπάγεται $C = \mathrm{cl}\, C$. Άρα το C είναι κλειστό σύνολο. □

Ασκήσεις.

2.4.1. Ποιά από τα παρακάτω σύνολα είναι συνεκτικά; Για όποια σύνολα δεν είναι συνεκτικά προσδιορίστε τις συνεκτικές συνιστώσες τους.
[α] $\mathrm{cl}\, D(0;1) \cup \mathrm{cl}\, D(3;1) \cup [1,2]$.
[β] $D(0;1) \cup D(3;1) \cup [1,2]$.
[γ] $\mathbb{C} \setminus C(i;2)$.
[δ] $\{z \,|\, |z-i| \geq |z|\}$.
[ε] $\{z \,|\, \mathrm{Re}\, z < 1\} \cup D(3+i;1)$.
[στ] $\mathbb{C} \setminus \big([1,1+i] \cup [1+i,2i]\big)$.
[ζ] $\mathbb{C} \setminus \big([1,1+i] \cup [1+i,2i] \cup [2i,1]\big)$.
[η] $\bigcup_{n=1}^{+\infty} D(ni;\frac{1}{2})$.
[θ] $\{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.
[ι] $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.
[κ] $[0,1] \cup \bigcup_{n=1}^{+\infty} [\frac{i}{n}, 1+\frac{i}{n}]$.
[λ] $(0,1] \cup \bigcup_{n=1}^{+\infty} [\frac{1}{n}, \frac{1}{n}+i]$.
[μ] $(0,1] \cup [0,i] \cup \bigcup_{n=1}^{+\infty} [\frac{1}{n}, \frac{1}{n}+i]$.
[ν] $(0,1] \cup [\frac{i}{2}, i] \cup \bigcup_{n=1}^{+\infty} [\frac{1}{n}, \frac{1}{n}+i]$.
[ξ] $\bigcup_{n=1}^{+\infty} C(0;1+\frac{1}{n})$.
[ο] $\mathrm{cl}\, D(0;1) \cup \bigcup_{n=1}^{+\infty} C(0;1+\frac{1}{n})$.
[π] $\mathbb{Q}$.
[ρ] $\{x+iy \,|\, x,y \in \mathbb{Q}\}$.

2.4.2. [α] Έστω ανοικτό και συνεκτικό σύνολο U και $a \in U$. Αποδείξτε ότι το $U \setminus \{a\}$ είναι ανοικτό και συνεκτικό.
[β] Γενικεύστε το [α]. Έστω ανοικτό και συνεκτικό σύνολο U και $a_1, \ldots, a_n \in U$. Αποδείξτε ότι το $U \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ είναι ανοικτό και συνεκτικό.

2.4.3. Έστω ότι για κάθε n το A_n είναι συνεκτικό σύνολο και έστω $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η ένωση $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ είναι συνεκτικό σύνολο.

2.4.4. Βρείτε απλό παράδειγμα δυο συνεκτικών συνόλων των οποίων η τομή *δεν* είναι συνεκτικό σύνολο.

2.4.5. [α] Βρείτε απλό παράδειγμα συνεκτικού συνόλου A ώστε το $\mathrm{bd}\, A$ να μην είναι συνεκτικό.
[β] Βρείτε απλό παράδειγμα συνεκτικού συνόλου A ώστε το $\mathrm{int}\, A$ να μην είναι συνεκτικό.

2.4.6. Έστω ανοικτό και συνεκτικό σύνολο U. Αποδείξτε ότι οποιαδήποτε δυο σημεία του U μπορούν να ενωθούν με πολυγωνική γραμμή στο U η οποία αποτελείται μόνο από οριζόντια και κατακόρυφα ευθύγραμμα τμήματα.

2.4.7. Έστω ότι το A είναι συνεκτικό (όχι αναγκαστικά συμπαγές). Αποδείξτε ότι για κάθε $r > 0$ και για κάθε $z, w \in A$ υπάρχει r-αλληλουχία σημείων στο A η οποία συνδέει τα z, w.

2.4.8. (α) Έστω A κλειστό $\subseteq \mathbb{C}$. Αποδείξτε ότι το A είναι συνεκτικό αν και μόνο αν δεν υπάρχουν B, C κλειστά ώστε $B \cup C = A$, $B \cap C = \emptyset$, $B, C \neq \emptyset$.
(β) Έστω A ανοικτό $\subseteq \mathbb{C}$. Αποδείξτε ότι το A είναι συνεκτικό αν και μόνο αν δεν υπάρχουν B, C ανοικτά ώστε $B \cup C = A$, $B \cap C = \emptyset$, $B, C \neq \emptyset$.

2.4.9. Έστω ανοικτό σύνολο U. Αποδείξτε ότι το πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών του U είναι αριθμήσιμο (δηλαδή είτε πεπερασμένο είτε άπειρο αριθμήσιμο).

2.4.10. Βρείτε όλα τα σύνολα $A \subseteq \mathbb{C}$ που είναι ανοικτά και, συγχρόνως, κλειστά.

Κεφάλαιο 3

Όρια και συνέχεια συναρτήσεων.

3.1 Όρια συναρτήσεων.

Έστω $A \subseteq \mathbb{C}$ και
$$f : A \to \mathbb{C}.$$
Η f χαρακτηρίζεται **μιγαδική συνάρτηση μιας μιγαδικής μεταβλητής**. Αν είναι $f(A) \subseteq \mathbb{R}$ ή, ισοδύναμα, αν ισχύει $f(z) \in \mathbb{R}$ για κάθε $z \in A$, τότε η f χαρακτηρίζεται **πραγματική συνάρτηση μιας μιγαδικής μεταβλητής**. Κάθε μιγαδική συνάρτηση $f : A \to \mathbb{C}$ καθορίζει δυο πραγματικές συναρτήσεις, τις
$$\operatorname{Re} f : A \to \mathbb{R}, \qquad \operatorname{Im} f : A \to \mathbb{R}$$
με τύπους
$$(\operatorname{Re} f)(z) = \operatorname{Re} f(z) = \frac{f(z) + \overline{f(z)}}{2}, \qquad (\operatorname{Im} f)(z) = \operatorname{Im} f(z) = \frac{f(z) - \overline{f(z)}}{2i}.$$
Η $\operatorname{Re} f$ ονομάζεται **πραγματικό μέρος** της f και η $\operatorname{Im} f$ ονομάζεται **φανταστικό μέρος** της f. Επίσης, από μια μιγαδική συνάρτηση $f : A \to \mathbb{C}$ ορίζεται η λεγόμενη **συζυγής συνάρτηση**
$$\overline{f} : A \to \mathbb{C}$$
με τύπο
$$\overline{f}(z) = \overline{f(z)}.$$

Οι σχέσεις
$$\operatorname{Re} f = \frac{f + \overline{f}}{2}, \quad \operatorname{Im} f = \frac{f - \overline{f}}{2i}, \quad f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f, \quad \overline{f} = \operatorname{Re} f - i \operatorname{Im} f$$
είναι προφανείς.

Όπως, αντί να γράφουμε $z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$ προτιμάμε να γράφουμε $z = x + iy$, υπονοώντας ότι $x, y \in \mathbb{R}$ και, επομένως, ότι $x = \operatorname{Re} z$ και $y = \operatorname{Im} z$, έτσι και στην περίπτωση των τιμών $f(z)$ προτιμάμε να γράφουμε
$$f(z) = u(z) + iv(z)$$
υπονοώντας ότι $u(z), v(z) \in \mathbb{R}$ και, επομένως, ότι $u(z) = \operatorname{Re} f(z)$ και $v(z) = \operatorname{Im} f(z)$. Επίσης, θα χρησιμοποιούμε ελεύθερα τους διπλούς συμβολισμούς
$$z = x + iy = (x, y), \qquad f = u + iv = (u, v)$$
και, φυσικά, τους πιο αναλυτικούς
$$f(z) = u(z)+iv(z) = (u(z), v(z)), \quad f(x+iy) = u(x+iy)+iv(x+iy) = (u(x+iy), v(x+iy)),$$
$$f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) = (u(x, y), v(x, y)).$$

Θεωρούμε γνωστό τον παρακάτω ορισμό του ορίου.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω $f : A \to \mathbb{C}$ και $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Λέμε ότι το $w_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ είναι* **όριο** *της f στο z_0 ή ότι η f έχει όριο w_0 στο z_0 αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $f(z) \in D(w_0;\epsilon)$ για κάθε $z \in A \cap (D(z_0;\delta) \setminus \{z_0\})$. Σ' αυτήν την περίπτωση συμβολίζουμε*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0 \qquad ή \qquad f(z) \to w_0 \ \text{όταν} \ z \to z_0.$$

Το ότι "ισχύει $f(z) \in D(w_0;\epsilon)$ για κάθε $z \in A \cap (D(z_0;\delta) \setminus \{z_0\})$" σημαίνει, σε κάπως πιο γεωμετρική γλώσσα, ότι "η f απεικονίζει ολόκληρο το μέρος του A που βρίσκεται μέσα στην δ-περιοχή του z_0, εκτός από το z_0, μέσα στην ϵ-περιοχή του w_0".

Εξειδικεύουμε τον ορισμό στις εξής τέσσερις περιπτώσεις:

Περίπτωση 1. $z_0, w_0 \in \mathbb{C}$.

Το $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$ σημαίνει ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(z) - w_0| < \epsilon$ για κάθε $z \in A$ με $0 < |z - z_0| < \delta$.

Περίπτωση 2. $z_0 \in \mathbb{C}$, $w_0 = \infty$.

Το $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$ σημαίνει ότι για κάθε $M > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(z)| > M$ για κάθε $z \in A$ με $0 < |z - z_0| < \delta$.

Περίπτωση 3. $z_0 = \infty$, $w_0 \in \mathbb{C}$.

Το $\lim_{z\to \infty} f(z) = w_0$ σημαίνει ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $N > 0$ ώστε να ισχύει $|f(z)-w_0| < \epsilon$ για κάθε $z \in A$ με $|z| > N$.

Περίπτωση 4. $z_0 = w_0 = \infty$.

Το $\lim_{z\to \infty} f(z) = \infty$ σημαίνει ότι για κάθε $M > 0$ υπάρχει $N > 0$ ώστε να ισχύει $|f(z)| > M$ για κάθε $z \in A$ με $|z| > N$.

Έστω $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$. Αν $w_0 \in \mathbb{C}$, τότε λέμε ότι η f **συγκλίνει** στο w_0 και, αν $w_0 = \infty$, τότε λέμε ότι η f **αποκλίνει** στο ∞. Σε κάθε περίπτωση λέμε ότι η f **έχει όριο** w_0 και ότι το w_0 **είναι όριο** της f. Αν η f δεν έχει κανένα όριο καθώς το z τείνει στο z_0, τότε λέμε ότι η f **αποκλίνει**.

Σ' αυτό το μάθημα θα θεωρήσουμε ότι είμαστε εξοικειωμένοι με όλα τα παραπάνω από προηγούμενα μαθήματα. Θα θυμηθούμε, επίσης, κάποια χαρακτηριστικά αποτελέσματα χωρίς αποδείξεις.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.1. *Αν υπάρχει το όριο μιας συνάρτησης (σε κάποιο σημείο), τότε αυτό το όριο είναι μοναδικό.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.2. *Έστω $f : A \to \mathbb{C}$ και $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Έστω $f = u + iv$, όπου $u, v : A \to \mathbb{R}$ είναι το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της f.*

[α] *Αν $w_0 = u_0 + iv_0 \in \mathbb{C}$, τότε $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$ αν και μόνο αν $\lim_{z\to z_0} u(z) = u_0$ και $\lim_{z\to z_0} v(z) = v_0$.*

[β] *Αν $w_0 = \infty$, τότε $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$ αν και μόνο αν $\lim_{z\to z_0} \sqrt{u^2(z) + v^2(z)} = +\infty$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.3. *Έστω $f, g : A \to \mathbb{C}$ και $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Στα παρακάτω θεωρούμε ότι $z \to z_0$.*

[α] *Αν $f(z) \to p_0$ και $g(z) \to q_0$ και το $p_0 \pm q_0$ δεν αποτελεί απροσδιόριστη μορφή (δηλαδή δεν είναι και τα δυο p_0, q_0 ίσα με ∞), τότε $f(z) \pm g(z) \to p_0 \pm q_0$.*

[β] *Αν $f(z) \to p_0$ και $g(z) \to q_0$ και το p_0q_0 δεν αποτελεί απροσδιόριστη μορφή (δηλαδή δεν είναι το ένα από τα p_0, q_0 ίσο με 0 και το άλλο ίσο με ∞), τότε $f(z)g(z) \to p_0q_0$.*

[γ] *Αν $f(z) \to p_0$, τότε $\frac{1}{f(z)} \to \frac{1}{p_0}$.*

[δ] *Αν $f(z) \to p_0$ και $g(z) \to q_0$ και το $\frac{p_0}{q_0}$ δεν αποτελεί απροσδιόριστη μορφή (δηλαδή δεν είναι και τα δυο p_0, q_0 ίσα με ∞ ούτε και τα δυο ίσα με 0), τότε $\frac{f(z)}{g(z)} \to \frac{p_0}{q_0}$.*

[ε] *Αν $f(z) \to p_0$, τότε $|f(z)| \to |p_0|$.*

[στ] *Αν $f(z) \to p_0$, τότε $\overline{f(z)} \to \overline{p_0}$.*

Τα επόμενα παραδείγματα είναι κι αυτά γνωστά.

Παράδειγμα 3.1.1. Έστω πολυωνυμική συνάρτηση

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

όπου $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ και $a_n \neq 0$. Το πεδίο ορισμού της p είναι το $\mathbb{C}$.
Για κάθε $z_0 \in \mathbb{C}$ είναι

$$\lim_{z\to z_0} p(z) = p(z_0).$$

Αυτό αποδεικνύεται με πολλαπλή εφαρμογή των κανόνων αθροίσματος και γινομένου στα στοιχειώδη όρια $\lim_{z\to z_0} c = c$ και $\lim_{z\to z_0} z = z_0$.
Αν η πολυωνυμική συνάρτηση είναι βαθμού ≥ 1, δηλαδή αν $n \geq 1$ και $a_n \neq 0$, τότε

$$\lim_{z\to\infty} p(z) = \infty.$$

Αυτό αποδεικνύεται ως εξής:

$$p(z) = z^n \Big(a_n + a_{n-1}\frac{1}{z} + \cdots + a_0 \frac{1}{z^n} \Big) \to \infty \cdot a_n = \infty$$

Το όριο a_n της παρένθεσης προκύπτει με εφαρμογή των κανόνων αθροίσματος και γινομένου και από το ότι $\frac{1}{z} \to 0$ όταν $z \to \infty$. Το όριο του z^n προκύπτει από το ότι $|z^n| = |z|^n \to +\infty$ όταν $z \to \infty$ (επειδή $|z| \to +\infty$) ή από τον κανόνα γινομένου: $z^n = z \cdots z \to \infty \cdots \infty = \infty$.

Παράδειγμα 3.1.2. Έστω ρητή συνάρτηση

$$r(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0}{b_m z^m + \cdots + b_1 z + b_0},$$

όπου $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_m \in \mathbb{C}$ και $a_n \neq 0$ και $b_m \neq 0$. Το πεδίο ορισμού της r είναι το $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_s\}$, όπου $z_1, \ldots, z_s$ είναι οι ρίζες της πολυωνυμικής συνάρτησης q. Είναι γνωστό ότι $0 \leq s \leq m$. Τότε, κατ' αρχάς:

$$\lim_{z\to\infty} r(z) = \begin{cases} \infty, & \text{αν } n > m \\ \frac{a_n}{b_m}, & \text{αν } n = m \\ 0, & \text{αν } n < m \end{cases}$$

Όλα αποδεικνύονται γράφοντας

$$r(z) = z^{n-m} \Big(a_n + a_{n-1}\frac{1}{z} + \cdots + a_0 \frac{1}{z^n} \Big) \Big/ \Big(b_m + b_{m-1}\frac{1}{z} + \cdots + b_0 \frac{1}{z^m} \Big).$$

Αν $z_0 \in \mathbb{C}$ και $q(z_0) \neq 0$, τότε με εφαρμογή του κανόνα λόγου:

$$\lim_{z\to z_0} r(z) = r(z_0).$$

Τέλος, έστω $z_0 \in \mathbb{C}$ και $q(z_0) = 0$. Δηλαδή το z_0 είναι μια οποιαδήποτε από τις ρίζες $z_1, \ldots, z_s$ της πολυωνυμικής συνάρτησης q. Τότε το πολυώνυμο $z - z_0$ διαιρεί το πολυώνυμο $q(z)$, οπότε υπάρχει $k \geq 1$ και πολυώνυμο $q_1(z)$ ώστε για κάθε z να είναι

$$q(z) = (z - z_0)^k q_1(z) \qquad \text{και} \qquad q_1(z_0) \neq 0.$$

Αυτό, φυσικά, σημαίνει ότι η **πολλαπλότητα** της ρίζας z_0 του $q(z)$ είναι k. Επίσης, είτε $p(z_0) = 0$ είτε $p(z_0) \neq 0$, υπάρχει $l \geq 0$ και πολυώνυμο $p_1(z)$ ώστε για κάθε z να είναι

$$p(z) = (z - z_0)^l p_1(z) \qquad \text{και} \qquad p_1(z_0) \neq 0.$$

Πράγματι, αν $p(z_0) = 0$, τότε το $l \geq 1$ είναι η πολλαπλότητα του z_0 ως ρίζα του $p(z)$ και, αν $p(z_0) \neq 0$, τότε θεωρούμε $l = 0$ (και λέμε ότι η πολλαπλότητα του z_0 ως ρίζα του $p(z)$ είναι μηδέν) και $p_1(z) = p(z)$. Άρα για κάθε z διαφορετικό από τις ρίζες του $q(z)$ ισχύει

$$r(z) = (z - z_0)^{l-k} \frac{p_1(z)}{q_1(z)} \qquad \text{και} \qquad p_1(z_0) \neq 0,\ q_1(z_0) \neq 0.$$

Το $\frac{p_1(z_0)}{q_1(z_0)}$ δεν είναι ούτε ∞ ούτε 0, οπότε

$$\lim_{z \to z_0} r(z) = \begin{cases} \infty, & \text{αν } k > l \\ \frac{p_1(z_0)}{q_1(z_0)}, & \text{αν } k = l \\ 0, & \text{αν } k < l \end{cases}$$

Έχουμε, επίσης, τον γνωστό κανόνα σύνθεσης για τον υπολογισμό ορίων.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.4. *Έστω $f : A \to B$, $g : B \to \mathbb{C}$, z_0 σημείο συσσώρευσης του A, w_0 σημείο συσσώρευσης του B, $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$ και έστω ότι υπάρχει το $\lim_{w \to w_0} g(w)$. Υποθέτουμε, επίσης, ότι ισχύει $f(z) \neq w_0$ για κάθε $z \in A$ κοντά στο z_0. Τότε*

$$\lim_{z \to z_0} g(f(z)) = \lim_{w \to w_0} g(w).$$

Τέλος, έχουμε την ισοδύναμη διατύπωση του ορίου συνάρτησης μέσω της έννοιας του ορίου ακολουθίας.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.5. *Έστω $f : A \to \mathbb{C}$ και z_0 σημείο συσσώρευσης του A. Τότε είναι $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$ αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία (z_n) στο A για την οποία ισχύει $z_n \to z_0$ και $z_n \neq z_0$ για κάθε n συνεπάγεται $f(z_n) \to w_0$.*

Ασκήσεις.

3.1.1. Ποιά από τα $\lim_{z \to 0} \operatorname{Re} z$, $\lim_{z \to \infty} \operatorname{Re} z$, $\lim_{z \to 0} \frac{z}{|z|}$, $\lim_{z \to \infty} \frac{z}{|z|}$ υπάρχουν;

3.1.2. Υποθέτουμε ότι υπάρχει το $\lim_{z \to 0} f(z) = w_0$ και ότι ισχύει $f(\frac{i}{n}) = \frac{(-1)^n}{2^n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Βρείτε το w_0.

3.1.3. Έστω $f, g : D(0;1) \to \mathbb{C}$ και $g(z) = f(-iz)$ για κάθε $z \in D(0;1)$. Αποδείξτε ότι $\lim_{z \to 0} f(z) = w_0$ αν και μόνο αν $\lim_{z \to 0} g(z) = w_0$.

3.1.4. Αποδείξτε με κάθε λεπτομέρεια ότι $\lim_{z \to \infty} f(z) = w_0$ αν και μόνο αν $\lim_{z \to 0} f(\frac{1}{z}) = w_0$.

3.1.5. Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ώστε $f(\frac{1}{n}) - f(-\frac{1}{n}) = (-1)^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Υπάρχει το $\lim_{z \to 0} f(z)$; Είναι δυνατό να είναι η f ρητή συνάρτηση; Υπάρχει τέτοια συνάρτηση f;

3.2 Συνέχεια συναρτήσεων.

Όλα όσα είναι σ' αυτήν την ενότητα θεωρούνται κι αυτά γνωστά από προηγούμενα μαθήματα.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω $f : A \to \mathbb{C}$ και $z_0 \in A$ (οπότε $z_0 \in \mathbb{C}$). Η f χαρακτηρίζεται **συνεχής** στο z_0 αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $f(z) \in D(f(z_0); \epsilon)$ για κάθε $z \in D(z_0; \delta) \cap A$ ή, ισοδύναμα, ώστε να ισχύει $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ για κάθε $z \in A$ με $|z - z_0| < \delta$.*

Το ότι "ισχύει $f(z) \in D(f(z_0); \epsilon)$ για κάθε $z \in D(z_0; \delta) \cap A$" σημαίνει, σε γεωμετρική γλώσσα, ότι "η f απεικονίζει ολόκληρο το μέρος του A που βρίσκεται μέσα στην δ-περιοχή του z_0 μέσα στην ϵ-περιοχή του $f(z_0)$".

Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις.

Περίπτωση 1. Έστω ότι το z_0 είναι μεμονωμένο σημείο του A, δηλαδή ότι υπάρχει $r_0 > 0$ ώστε $D(z_0; r_0) \cap A = \{z_0\}$.

Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ επιλέγουμε $\delta = r_0 > 0$ και τότε για κάθε $z \in A$ με $|z - z_0| < \delta = r_0$, *δηλαδή για* $z = z_0$, ισχύει $|f(z) - f(z_0)| = |f(z_0) - f(z_0)| = 0 < \epsilon$. Άρα η f είναι συνεχής στο z_0. Συνοψίζουμε:

Αν το z_0 είναι μεμονωμένο σημείο του A, τότε η f είναι (αυτομάτως) συνεχής στο z_0.

Περίπτωση 2. Έστω ότι το z_0 δεν είναι μεμονωμένο σημείο του A ή, ισοδύναμα, ότι είναι σημείο συσσώρευσης του A.

Έστω ότι η f είναι συνεχής στο z_0. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ για κάθε $z \in A$ με $|z - z_0| < \delta$. Προφανώς, συνεπάγεται ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ για κάθε $z \in A$ με $0 < |z - z_0| < \delta$. Άρα $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Αντιστρόφως, έστω $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ για κάθε $z \in A$ με $0 < |z - z_0| < \delta$. Παρατηρούμε ότι για $z = z_0$ έτσι κι αλλιώς ισχύει $|f(z) - f(z_0)| = |f(z_0) - f(z_0)| = 0 < \epsilon$. Άρα για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ για κάθε $z \in A$ με $|z - z_0| < \delta$. Άρα η f είναι συνεχής στο z_0. Συνοψίζουμε:

Αν το z_0 είναι σημείο συσσώρευσης του A, τότε η f είναι συνεχής στο z_0 αν και μόνο αν

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Στην πράξη, η περίπτωση μεμονωμένου σημείου του πεδίου ορισμού συνάρτησης είναι αρκετά σπάνια, οπότε θα αντιμετωπίζουμε περιπτώσεις όπου η συνέχεια μιας συνάρτησης σε σημείο του πεδίου ορισμού της ισοδυναμεί με το ότι το όριό της στο σημείο αυτό είναι ίσο με την τιμή της στο ίδιο σημείο.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Η $f : A \to \mathbb{C}$ χαρακτηρίζεται* ***συνεχής στο πεδίο ορισμού της*** *ή, απλώς,* ***συνεχής*** *αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του A.*

Παράδειγμα 3.2.1. Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση p είναι συνεχής (δηλαδή, συνεχής στο $\mathbb{C}$). Πράγματι, ισχύει $\lim_{z \to z_0} p(z) = p(z_0)$ για κάθε z_0.

Παρατηρήστε ότι, αν ο βαθμός της πολυωνυμικής συνάρτησης p είναι ≥ 1 και ορίσουμε $p(\infty) = \infty$, τότε, επειδή $\lim_{z \to \infty} p(z) = \infty$, η συνάρτηση $p : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ με τύπο

$$p(z) = \begin{cases} a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, & \text{αν } z \in \mathbb{C} \\ \infty, & \text{αν } z = \infty \end{cases}$$

είναι συνεχής από τον μετρικό χώρο $\widehat{\mathbb{C}}$ με τη χορδική μετρική στον μετρικό χώρο $\widehat{\mathbb{C}}$ με τη χορδική μετρική.

Αν ο βαθμός της πολυωνυμικής συνάρτησης p είναι $= 0$, τότε η συνάρτηση είναι σταθερή: $p(z) = a_0$ για κάθε z. Επομένως, $\lim_{z \to \infty} p(z) = a_0$ και, αν ορίσουμε $p(\infty) = a_0$, τότε η συνάρτηση $p : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ είναι σταθερή στο $\widehat{\mathbb{C}}$ και άρα είναι συνεχής από τον μετρικό χώρο $\widehat{\mathbb{C}}$ με τη χορδική μετρική στον μετρικό χώρο $\widehat{\mathbb{C}}$ με τη χορδική μετρική.

Σε κάθε περίπτωση, λοιπόν, μπορούμε να ορίσουμε την πολυωνυμική συνάρτηση p και στο ∞ ώστε να είναι συνεχής από το $\widehat{\mathbb{C}}$ στο $\widehat{\mathbb{C}}$.

Παράδειγμα 3.2.2. Κάθε ρητή συνάρτηση r είναι συνεχής, διότι ισχύει $\lim_{z \to z_0} r(z) = r(z_0)$ για κάθε z_0 στο πεδίο ορισμού της r, δηλαδή για κάθε z_0 που δεν είναι ρίζα του πολυωνύμου στον

παρονομαστή της r.
Στο παράδειγμα 3.1.2 είδαμε ότι τα όρια της ρητής συνάρτησης $r = \frac{p}{q}$ στις ρίζες της πολυωνυμικής συνάρτησης q καθώς και στο ∞ υπάρχουν. Άρα μπορούμε, όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα με την πολυωνυμική συνάρτηση, να ορίσουμε τη συνάρτηση r και στο σημείο ∞ και στις ρίζες $z_1, \dots, z_s$ της συνάρτησης q έτσι ώστε η προκύπτουσα συνάρτηση $r : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ με τύπο

$$r(z) = \begin{cases} \frac{a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0}{b_m z^m + \cdots + b_1 z + b_0}, & \text{αν } z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_s\} \\ \lim_{\zeta \to z} r(\zeta), & \text{αν } z \in \{z_1, \dots, z_s\} \\ \lim_{\zeta \to \infty} r(\zeta), & \text{αν } z = \infty \end{cases}$$

να είναι συνεχής από τον μετρικό χώρο $\widehat{\mathbb{C}}$ με τη χορδική μετρική στον μετρικό χώρο $\widehat{\mathbb{C}}$ με τη χορδική μετρική.

Οι επόμενες προτάσεις είναι κι αυτές γνωστές και αποδεικνύονται εύκολα.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.6. *Έστω $f : A \to \mathbb{C}$ και $z_0 \in A$. Έστω $f = u + iv$, όπου $u, v : A \to \mathbb{R}$ είναι το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της f. Τότε η f είναι συνεχής στο z_0 αν και μόνο αν οι u, v είναι και οι δυο συνεχείς στο z_0.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.7. *Έστω $f, g : A \to \mathbb{C}$ και $z_0 \in A$. Αν οι f, g είναι συνεχείς στο z_0, τότε και οι $f + g, f - g, fg, |f|, \overline{f} : A \to \mathbb{C}$ είναι συνεχείς στο z_0. Αν, επιπλέον, ισχύει $g(z) \neq 0$ για κάθε $z \in A$, τότε και η $\frac{f}{g} : A \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής στο z_0.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.8. *Έστω $f : A \to B$, $g : B \to \mathbb{C}$, $z_0 \in A$ και $w_0 = f(z_0) \in B$. Αν η f είναι συνεχής στο z_0 και η g είναι συνεχής στο w_0, τότε η $g \circ f : A \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής στο z_0.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.9. *Έστω $f : A \to \mathbb{C}$ και $z_0 \in A$. Τότε η f είναι συνεχής στο z_0 αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία (z_n) στο A για την οποία ισχύει $z_n \to z_0$ συνεπάγεται $f(z_n) \to f(z_0)$.*

Ασκήσεις.

3.2.1. Ποιές από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς στο 0;

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\operatorname{Re} z}{1+|z|}, & \text{αν } z \neq 0 \\ 0, & \text{αν } z = 0 \end{cases} \qquad f(z) = \begin{cases} \frac{\operatorname{Re}^2 z}{|z|}, & \text{αν } z \neq 0 \\ 0, & \text{αν } z = 0 \end{cases} \qquad f(z) = \begin{cases} \frac{\operatorname{Re} z^2}{|z|^2}, & \text{αν } z \neq 0 \\ 0, & \text{αν } z = 0 \end{cases}$$

3.2.2. Υπάρχει $f : \operatorname{cl} D(0;1) \to \mathbb{C}$ συνεχής στο $\operatorname{cl} D(0;1)$ ώστε να ισχύει $f(1 - \frac{1}{n}) = 1 - \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $|f(z)| < 1$ για κάθε $z \in \operatorname{cl} D(0;1)$;

3.2.3. [α] Έστω ανοικτό A και $f : A \to \mathbb{C}$ συνεχής στο A. Αν το $U \subseteq \mathbb{C}$ είναι ανοικτό, αποδείξτε ότι το $f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό.

[β] Έστω κλειστό A και $f : A \to \mathbb{C}$ συνεχής στο A. Αν το $F \subseteq \mathbb{C}$ είναι κλειστό, αποδείξτε ότι το $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό.

3.2.4. Θεωρήστε τη συνάρτηση $\operatorname{Arg} : \mathbb{C} \to (-\pi, \pi]$ και την ημιευθεία $l = \{z \in \mathbb{C} \,|\, z \leq 0\}$. Αποδείξτε ότι η Arg είναι συνεχής στο $\mathbb{C} \setminus l$ και ότι για κάθε $z_0 \in l$ δεν υπάρχει το $\lim_{z \to z_0} \operatorname{Arg} z$. Υπάρχει το $\lim_{z \to \infty} \operatorname{Arg} z$;

3.2.5. Δύο μετρικοί χώροι (X, d) και (Y, ρ) χαρακτηρίζονται **ομοιομορφικοί** αν υπάρχει αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση $f : X \to Y$ επί του Y ώστε η f και η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : Y \to X$ να είναι συνεχείς.
Δείτε την άσκηση 2.1.8 και αποδείξτε ότι το $\mathbb{C}$ με την Ευκλείδεια μετρική και το $\mathbb{C}$ με τον περιορισμό της χορδικής μετρικής είναι ομοιομορφικοί μετρικοί χώροι. (Θεωρήστε την ταυτοτική συνάρτηση του $\mathbb{C}$ στον εαυτό του.)

3.3 Συνεχείς συναρτήσεις και συμπαγή σύνολα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.1. *Έστω συμπαγές $K \subseteq \mathbb{C}$ και $f : K \to \mathbb{C}$ συνεχής στο K. Τότε το $f(K)$ είναι συμπαγές.*

Απόδειξη. Έστω οποιαδήποτε ακολουθία (w_n) στο $f(K)$.
Για κάθε n υπάρχει $z_n \in K$ ώστε $f(z_n) = w_n$. Επειδή το K είναι συμπαγές, υπάρχει υποακολουθία (z_{n_k}) ώστε $z_{n_k} \to z$ για κάποιο $z \in K$. Επειδή η f είναι συνεχής στο z, συνεπάγεται $w_{n_k} = f(z_{n_k}) \to f(z) \in f(K)$.
Άρα κάθε ακολουθία στο $f(K)$ έχει υποακολουθία η οποία συγκλίνει σε στοιχείο του $f(K)$ και, επομένως, το $f(K)$ είναι συμπαγές. □

Ένα πρώτο πόρισμα του Θεωρήματος 3.1 είναι το εξής.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.10. *Έστω συμπαγές $K \subseteq \mathbb{C}$ και $f : K \to \mathbb{C}$ συνεχής στο K. Τότε η f είναι φραγμένη στο K.*

Απόδειξη. Το σύνολο τιμών $f(K)$ είναι συμπαγές, οπότε είναι φραγμένο. Αυτό σημαίνει ότι η f είναι φραγμένη στο K. □

ΛΗΜΜΑ 3.1. *Κάθε συμπαγές σύνολο $K \subseteq \mathbb{R}$ έχει μέγιστο και ελάχιστο στοιχείο.*

Απόδειξη. Το K είναι κλειστό και φραγμένο. Επειδή το K είναι φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, συνεπάγεται ότι το supremum του και το infimum του είναι (πραγματικοί) αριθμοί.
Έστω $u = \sup K$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το $u - \frac{1}{n}$ δεν είναι άνω φράγμα του K, οπότε υπάρχει $u_n \in K$ ώστε $u - \frac{1}{n} < u_n \leq u$. Τότε η ακολουθία (u_n) είναι στο K και $u_n \to u$. Άρα το u είναι οριακό σημείο του K και, επειδή το K είναι κλειστό σύνολο, συνεπάγεται $u \in K$. Άρα το u είναι το supremum του K και ανήκει στο K, οπότε είναι το μέγιστο στοιχείο του K.
Με τον ίδιο τρόπο, με το infimum του K, αποδεικνύεται ότι το K έχει ελάχιστο στοιχείο. □

Μετά από το Λήμμα 3.1 έχουμε ένα ακόμη πόρισμα του Θεωρήματος 3.1.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.11. *Έστω συμπαγές $K \subseteq \mathbb{C}$ και $f : K \to \mathbb{R}$ συνεχής στο K. Τότε η f έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο K.*

Απόδειξη. Επειδή το K είναι συμπαγές, το $f(K)$ είναι, επίσης, συμπαγές. Επειδή το $f(K)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$, έχει μέγιστο και ελάχιστο στοιχείο, τα οποία είναι, φυσικά, η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της f στο K. □

Παρατηρούμε ότι μια ειδική περίπτωση της Πρότασης 3.11 είναι το γνωστό από τα βασικά μαθήματα Ανάλυσης **Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής** που λέει ότι, *αν η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a, b]$, τότε έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο $[a, b]$*. Πράγματι, στην περίπτωση αυτή το κλειστό και φραγμένο ευθ. τμήμα $[a, b]$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Η $f : A \to \mathbb{C}$ χαρακτηρίζεται* **ομοιόμορφα συνεχής** *στο A αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(z') - f(z'')| < \epsilon$ για κάθε $z', z'' \in A$ με $|z' - z''| < \delta$.*

Μια ακόμη γενίκευση γνωστού αποτελέσματος από τα βασικά μαθήματα Ανάλυσης (όπου $K = [a, b]$) είναι το εξής αποτέλεσμα.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.12. *Έστω συμπαγές $K \subseteq \mathbb{C}$ και $f : K \to \mathbb{C}$ συνεχής στο K. Τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο K.*

Απόδειξη. Έστω ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Τότε υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε για κάθε $\delta > 0$ να υπάρχουν $z', z'' \in K$ με $|z' - z''| < \delta$ και $|f(z') - f(z'')| \geq \epsilon$. Άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχουν

$z_n', z_n'' \in K$ με $|z_n' - z_n''| < \frac{1}{n}$ και $|f(z_n') - f(z_n'')| \geq \epsilon$.
Το K είναι συμπαγές, οπότε υπάρχει (z_{n_k}') ώστε $z_{n_k}' \to z$ για κάποιο $z \in K$. Τότε

$$|z_{n_k}'' - z| \leq |z_{n_k}'' - z_{n_k}'| + |z_{n_k}' - z| < \frac{1}{n_k} + |z_{n_k}' - z| \to 0,$$

οπότε $z_{n_k}'' \to z$.
Η f είναι συνεχής στο z, οπότε $f(z_{n_k}') \to f(z)$ και $f(z_{n_k}'') \to f(z)$. Άρα $f(z_{n_k}') - f(z_{n_k}'') \to 0$ και καταλήγουμε σε άτοπο, αφού ισχύει $|f(z_{n_k}') - f(z_{n_k}'')| \geq \epsilon$ για κάθε k. □

Ασκήσεις.

3.3.1. Έστω ευθεία l. Για κάθε z ορίζουμε $P_l(z)$ να είναι η ορθογώνια προβολή του z στην l. Έτσι ορίζεται η συνάρτηση $P_l : \mathbb{C} \to l$.
[α] Αποδείξτε ότι ισχύει $|P_l(z) - P_l(w)| \leq |z - w|$ για κάθε z, w.
[β] Αποδείξτε ότι η $P_l : \mathbb{C} \to l$ είναι συνεχής.
[γ] Αποδείξτε ότι η ορθογώνια προβολή ενός συμπαγούς συνόλου σε μια ευθεία είναι συμπαγές σύνολο.

3.3.2. Για κάθε $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ ορίζουμε $R(z) = \frac{z}{|z|}$ να είναι η ακτινική προβολή του z στον μοναδιαίο κύκλο $C(0;1)$. Έτσι ορίζεται συνάρτηση $R : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to C(0;1)$.
[α] Αποδείξτε ότι η $R : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to C(0;1)$ είναι συνεχής.
[β] Αποδείξτε ότι η ακτινική προβολή ενός συμπαγούς υποσυνόλου του $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ στον μοναδιαίο κύκλο είναι συμπαγές σύνολο.

3.3.3. Έστω κλειστό και φραγμένο σύνολο K, πολυγωνική γραμμή L και $f : K \to \mathbb{C}$ συνεχής στο K ώστε να ισχύει $f(z) \notin L$ για κάθε $z \in K$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε να ισχύει $|f(z) - w| \geq \epsilon$ για κάθε $z \in K$ και $w \in L$.

3.3.4. Έστω $f : \mathrm{cl}\, D(0;1) \to \mathbb{C}$ συνεχής στο $\mathrm{cl}\, D(0;1)$ ώστε να ισχύει $|f(z)| < 3$ για κάθε $z \in \mathrm{cl}\, D(0;1)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $M < 3$ ώστε να ισχύει $|f(z)| \leq M$ για κάθε $z \in \mathrm{cl}\, D(0;1)$.

3.3.5. Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ συνεχής στο $\mathbb{C}$ ώστε $\lim_{z\to\infty} f(z) = w_0$ με $w_0 \in \mathbb{C}$. Αποδείξτε ότι η f είναι φραγμένη και ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{C}$.

3.3.6. [α] Αποδείξτε ότι, αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A, τότε η f είναι συνεχής στο A.
[β] Είναι η $f : D(0;1) \to \mathbb{C}$ με τύπο $f(z) = \frac{1}{1-z}$ συνεχής στο $D(0;1)$; ομοιόμορφα συνεχής στο $D(0;1)$;

3.3.7. Η $f : A \to \mathbb{C}$ χαρακτηρίζεται **συνάρτηση Lipschitz** στο A αν υπάρχει $M \geq 0$ ώστε να ισχύει $|f(z') - f(z'')| \leq M|z' - z''|$ για κάθε $z', z'' \in A$. Αποδείξτε ότι, αν η f είναι συνάρτηση Lipschitz στο A, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A.

3.3.8. Έστω $f : A \to \mathbb{C}$ ομοιόμορφα συνεχής στο A. Έστω $z \in \mathrm{cl}\, A \setminus A$. Αποδείξτε ότι για κάθε ακολουθία (z_n) στο A για την οποία ισχύει $z_n \to z$ συνεπάγεται ότι υπάρχει το $\lim_{n\to+\infty} f(z_n)$ και ότι το όριο αυτό είναι μιγαδικός αριθμός ανεξάρτητος της συγκεκριμένης (z_n). Κατόπιν, ορίζουμε $f(z) = \lim_{n\to+\infty} f(z_n)$. Με αυτόν τον τρόπο επεκτείνουμε την f ώστε να είναι ορισμένη και στα σημεία του $\mathrm{cl}\, A \setminus A$, δηλαδή επεκτείνουμε την f σε συνάρτηση $f : \mathrm{cl}\, A \to \mathbb{C}$. Αποδείξτε ότι η $f : \mathrm{cl}\, A \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής στο $\mathrm{cl}\, A$.

3.4 Συνεχείς συναρτήσεις και συνεκτικά σύνολα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.2. *Έστω $f : A \to \mathbb{C}$ συνεχής στο A. Αν το A είναι συνεκτικό, τότε το $f(A)$ είναι συνεκτικό.*

Απόδειξη. Έστω ότι το $f(A)$ δεν είναι συνεκτικό.
Τότε υπάρχουν σύνολα B', C' ώστε $B' \cup C' = f(A)$, $B' \cap C' = \emptyset$, $B' \neq \emptyset$, $C' \neq \emptyset$ και κανένα από τα B', C' δεν περιέχει οριακό σημείο του άλλου.
Θεωρούμε τις αντίστροφες εικόνες των B', C' μέσα στο A, δηλαδή τα σύνολα

$$B = f^{-1}(B') = \{z \in A \,|\, f(z) \in B'\}, \qquad C = f^{-1}(C') = \{z \in A \,|\, f(z) \in C'\}.$$

Είναι φανερό (από τις απλές πρωταρχικές ιδιότητες συνόλων, συναρτήσεων και αντίστροφων εικόνων) ότι ισχύει $B \cup C = A$, $B \cap C = \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $C \neq \emptyset$.
Τώρα, έστω ότι το B περιέχει οριακό σημείο του C, δηλαδή έστω $b \in B$ και b οριακό σημείο του C. Τότε υπάρχει ακολουθία (c_n) στο C ώστε $c_n \to b$. Επειδή η f είναι συνεχής στο b, συνεπάγεται $f(c_n) \to f(b)$. Παρατηρούμε ότι η ακολουθία $(f(c_n))$ είναι στο C' και, επομένως, το $f(b)$ είναι οριακό σημείο του C'. Όμως, $f(b) \in B'$ και καταλήγουμε σε άτοπο (διότι το B' δεν περιέχει οριακό σημείο του C'). Το άτοπο προέκυψε από την υπόθεση ότι το B περιέχει οριακό σημείο του C. Άρα το B δεν περιέχει οριακό σημείο του C.
Τελείως συμμετρικά αποδεικνύεται ότι το C δεν περιέχει οριακό σημείο του B.
Άρα τα B, C αποτελούν διάσπαση του A. Αυτό είναι άτοπο διότι το A είναι συνεκτικό σύνολο.
Άρα το $f(A)$ είναι συνεκτικό. □

Τώρα έχουμε το εξής πόρισμα του Θεωρήματος 3.2.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.13. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ συνεχής στο A. Αν το A είναι συνεκτικό, τότε η f έχει την ιδιότητα ενδιάμεσης τιμής στο A.*

Απόδειξη. Το $f(A)$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και γνωρίζουμε ότι κάθε συνεκτικό υποσύνολο μιας οποιασδήποτε ευθείας είναι διάστημα. Άρα και το $f(A)$ είναι διάστημα στο $\mathbb{R}$.
Έστω, τώρα, ότι οι (πραγματικοί) αριθμοί u_1, u_2 είναι τιμές της f στο A. Δηλαδή υπάρχουν $z_1, z_2 \in A$ ώστε

$$f(z_1) = u_1, \quad f(z_2) = u_2.$$

Επειδή οι u_1, u_2 ανήκουν στο διάστημα $f(A)$, κάθε (πραγματικός, εννοείται) αριθμός u με $u_1 < u < u_2$ ανήκει κι αυτός στο διάστημα $f(A)$, οπότε υπάρχει $z \in A$ ώστε

$$f(z) = u.$$

Δηλαδή, κάθε αριθμός ενδιάμεσος των τιμών u_1, u_2 της f στο A είναι τιμή της f στο A. □

Παρατηρούμε πάλι ότι μια ειδική περίπτωση της Πρότασης 3.13 είναι το γνωστό μας **Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής** που λέει ότι, *αν η $f : I \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο διάστημα $I \subseteq R$, τότε έχει την ιδιότητα ενδιάμεσης τιμής στο I*. Πράγματι, στην περίπτωση αυτή το οποιοδήποτε διάστημα I είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{C}$.

Ασκήσεις.

3.4.1. Δείτε την άσκηση 3.3.1 και αποδείξτε ότι η ορθογώνια προβολή ενός συνεκτικού συνόλου σε μια ευθεία είναι συνεκτικό σύνολο.

3.4.2. Δείτε την άσκηση 3.3.2 και αποδείξτε ότι η ακτινική προβολή ενός συνεκτικού υποσυνόλου του $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ στον $C(0;1)$ είναι συνεκτικό σύνολο.

3.4.3. Έστω πολυγωνική γραμμή L που συνδέει τα z_0, z_1 και $f : L \to \mathbb{C}$ συνεχής στην L ώστε $f(z_0) = 2 + i$ και $f(z_1) = 1 - 2i$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $z \in L$ ώστε $f(z) \in \mathbb{R}$.
Ισχύει το ίδιο αν το L περιέχει τα z_0, z_1 και είναι δίσκος; ημιεπίπεδο; ένωση δυο ξένων δίσκων;

3.4.4. Αποδείξτε ότι είναι συνεκτικά τα σύνολα $\{x + i\sin x \,|\, x \in \mathbb{R}\}$, $\{x + i\sin\frac{1}{x} \,|\, 0 < x \leq 1\}$, $\{x + i\sin\frac{1}{x} \,|\, 0 < x \leq 1\} \cup [-i, i]$.

3.4.5. Έστω $f : A \to \mathbb{C}$ συνεχής στο συμπαγές και συνεκτικό A. Έστω $z, w \in A$ και $\epsilon > 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $a_0, \dots, a_n \in A$ ώστε $a_0 = z, a_n = w$ και ώστε να ισχύει $|a_{k-1} - a_k| < \epsilon$ και $|f(a_{k-1}) - f(a_k)| < \epsilon$ για κάθε $k = 1, \dots, n$.

3.4.6. [α] Έστω $A \subseteq \mathbb{C}$. Αποδείξτε ότι το A είναι συνεκτικό αν και μόνο αν οι μόνες συναρτήσεις $f : A \to \{0, 1\}$ που είναι συνεχείς στο A είναι οι σταθερές συναρτήσεις.

[β] Έστω $A \subseteq \mathbb{C}$. Αποδείξτε ότι το A είναι συνεκτικό αν και μόνο αν οι μόνες συναρτήσεις $f : A \to \mathbb{Z}$ που είναι συνεχείς στο A είναι οι σταθερές συναρτήσεις.

Κεφάλαιο 4

Επικαμπύλια ολοκληρώματα

4.1 Παράγωγοι μιγαδικών συναρτήσεων πραγματικής μεταβλητής.

Πριν από τα μαθήματα περί μιγαδικών συναρτήσεων, στα μαθήματα του Απειροστικού Λογισμού και της Ανάλυσης μαθαίνουμε για την παράγωγο συνάρτησης ορισμένης σε υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με τιμές, επίσης, στο $\mathbb{R}$. Τώρα θα μιλήσουμε για παράγωγο συνάρτησης ορισμένης σε υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με τιμές, όμως, γενικότερα στο $\mathbb{C}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω $\gamma : A \to \mathbb{C}$ και $A \subseteq \mathbb{R}$ και $t_0 \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Λέμε ότι η γ είναι* **παραγωγίσιμη** *στο t_0 αν υπάρχει το όριο $\lim_{t\to t_0} \frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0}$ και είναι μιγαδικός αριθμός (δηλαδή, όχι ∞). Την τιμή του ορίου ονομάζουμε* **παράγωγο** *της γ στο t_0 και συμβολίζουμε*

$$\gamma'(t_0) = \frac{d\gamma}{dt}(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0}.$$

Συνήθως, το A είναι διάστημα του $\mathbb{R}$ και το t_0 είναι εσωτερικό σημείο ή άκρο του διαστήματος. Στην περίπτωση άκρου, το όριο που ορίζει την παράγωγο είναι, φυσικά, πλευρικό "μέσα από" το διάστημα.

Η σύνδεση με την ήδη γνωστή έννοια παραγώγου γίνεται μέσω του πραγματικού και του φανταστικού μέρους της συνάρτησης, τα οποία είναι συναρτήσεις με τιμές στο $\mathbb{R}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.1. *Έστω $\gamma : A \to \mathbb{C}$ και $A \subseteq \mathbb{R}$ και $t_0 \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Επίσης, έστω $\gamma = x + iy$, όπου x και y είναι το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της γ. Δηλαδή, είναι $x, y : A \to \mathbb{R}$ και*

$$\gamma(t) = x(t) + iy(t) \qquad \text{για κάθε } t \in A.$$

Η γ είναι παραγωγίσιμη στο $t_0 \in A$ αν και μόνο αν οι x και y είναι και οι δυο παραγωγίσιμες στο t_0 και, σ' αυτήν την περίπτωση,

$$\gamma'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0).$$

Απόδειξη. Γράφουμε

$$\frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0} = \frac{(x(t)+iy(t))-(x(t_0)+iy(t_0))}{t-t_0} = \frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0} + i\frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0} \tag{4.1}$$

και παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις $\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}$ και $\frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0}$ είναι πραγματικές, οπότε είναι το πραγματικό και το φανταστικό μέρος, αντιστοίχως, της συνάρτησης $\frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0}$.

Τώρα εφαρμόζουμε την Πρόταση 3.2[α] και έχουμε ότι το $\lim_{t\to t_0} \frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0}$ υπάρχει και είναι μιγαδικός αν και μόνο αν τα όρια $\lim_{t\to t_0} \frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}$ και $\lim_{t\to t_0} \frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0}$ υπάρχουν και είναι πραγματικοί. Η απόδειξη τελειώνει παίρνοντας όρια στην (4.1) όταν $t \to t_0$. □

Θα διατυπώσουμε τα επόμενα χωρίς τις αποδείξεις τους. Οι αποδείξεις γίνονται είτε με κατά γράμμα επανάληψη των αποδείξεων των αντίστοιχων αποτελεσμάτων για πραγματικές συναρτήσεις είτε με αναγωγή στα ήδη γνωστά αντίστοιχα αποτελέσματα για πραγματικές συναρτήσεις μέσω της Πρότασης 4.1.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.2. *Έστω $\gamma : A \to \mathbb{C}$ και $A \subseteq \mathbb{R}$ και $t_0 \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν η γ είναι παραγωγίσιμη στο t_0, τότε είναι συνεχής στο t_0.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.3. *Έστω $\gamma_1, \gamma_2 : A \to \mathbb{C}$ και $A \subseteq \mathbb{R}$ και $t_0 \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν οι γ_1, γ_2 είναι παραγωγίσιμες στο t_0, τότε και οι $\gamma_1 + \gamma_2$, $\gamma_1 - \gamma_2$, $\gamma_1\gamma_2$ είναι παραγωγίσιμες στο t_0. Επίσης, αν ισχύει επιπλέον ότι $\gamma_2(t) \neq 0$ για κάθε $t \in A$, τότε και η $\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$ είναι παραγωγίσιμη στο t_0. Τέλος έχουμε τις ισότητες:*

$$(\gamma_1 + \gamma_2)'(t_0) = {\gamma_1}'(t_0) + {\gamma_2}'(t_0), \qquad (\gamma_1 - \gamma_2)'(t_0) = {\gamma_1}'(t_0) - {\gamma_2}'(t_0),$$

$$(\gamma_1\gamma_2)'(t_0) = {\gamma_1}'(t_0)\gamma_2(t_0) + \gamma_1(t_0){\gamma_2}'(t_0), \qquad \Big(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\Big)'(t_0) = \frac{{\gamma_1}'(t_0)\gamma_2(t_0) - \gamma_1(t_0){\gamma_2}'(t_0)}{\gamma_2(t_0)^2}.$$

Έχουμε και τον αντίστοιχο κανόνα αλυσίδας.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.4. *Έστω $\sigma : B \to A$ και $\gamma : A \to \mathbb{C}$ και $B \subseteq \mathbb{R}$ και $A \subseteq \mathbb{R}$ και $s_0 \in B$ σημείο συσσώρευσης του B και $t_0 = \sigma(s_0) \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν η σ είναι παραγωγίσιμη στο s_0 και η γ είναι παραγωγίσμη στο t_0, τότε και η $\gamma \circ \sigma : B \to \mathbb{C}$ είναι παραγωγίσιμη στο s_0 και*

$$(\gamma \circ \sigma)'(s_0) = \gamma'(\sigma(s_0))\sigma'(s_0) = \gamma'(t_0)\sigma'(s_0).$$

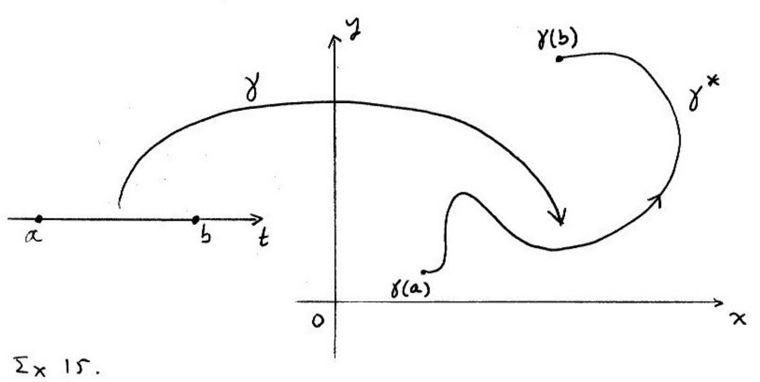
Ασκήσεις.

4.1.1. Ισχύει το γνωστό θεώρημα μέσης τιμής για παραγώγους μιγαδικών συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής; Δηλαδή, αν η $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής στο $[a,b]$ και παραγωγίσμη στο (a,b) είναι σωστό ότι υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε $\gamma'(\xi) = \frac{\gamma(b)-\gamma(a)}{b-a}$; Αν είναι σωστό αποδείξτε το. Αν δεν είναι σωστό βρείτε αντιπαράδειγμα.

4.2 Καμπύλες στο μιγαδικό επίπεδο.

Τώρα θα δούμε μια ειδική κατηγορία μιγαδικών συναρτήσεων πραγματικής μεταβλητής: θα υποθέσουμε ότι το πεδίο ορισμού είναι κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a,b]$ του $\mathbb{R}$ και ότι η συνάρτηση είναι συνεχής σ' ολόκληρο το $[a,b]$.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, όπου $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ και η γ είναι συνεχής στο $[a,b]$. Τότε η γ χαρακτηρίζεται* **καμπύλη** *στο μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}$.*



Σχ 15.

Αν $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ είναι οποιαδήποτε καμπύλη (τονίζουμε: αυτό σημαίνει ότι το $[a, b]$ είναι διάστημα του $\mathbb{R}$ και η γ είναι συνεχής στο $[a, b]$), τότε το σύνολο τιμών, δηλαδή το

$$\gamma^* = \{\gamma(t) \,|\, t \in [a, b]\} \subseteq \mathbb{C}$$

ονομάζεται **τροχιά** της καμπύλης γ και αποτελεί ένα υποσύνολο του $\mathbb{C}$ το οποίο είναι *συμπαγές και συνεκτικό*, διότι η γ είναι συνεχής και το διάστημα $[a, b]$ είναι συμπαγές και συνεκτικό. Το σημείο $\gamma(a)$ ονομάζεται **αρχή** ή **αρχικό άκρο** της καμπύλης και το σημείο $\gamma(b)$ ονομάζεται **τέλος** ή **τελικό άκρο** της καμπύλης. Η μεταβλητή $t \in [a, b]$ ονομάζεται και **παράμετρος** της καμπύλης. Όταν η παράμετρος t διατρέχει αυξανόμενη το διάστημα $[a, b]$, το αντίστοιχο σημείο $\gamma(t)$ διατρέχει το σύνολο γ^* με μια συγκεκριμένη φορά η οποία χαρακτηρίζεται **φορά διαγραφής** της καμπύλης. Όταν ζωγραφίζουμε την τροχιά μιας καμπύλης δηλώνουμε την φορά διαγραφής της με ένα βέλος. Δείτε το σχήμα 15. Τέλος, η

$$z = \gamma(t), \qquad t \in [a, b]$$

ονομάζεται **παραμετρική αναπαράσταση** ή **παραμετρική εξίσωση** της καμπύλης γ.

Η ονομασία "καμπύλη" για τη συνάρτηση γ δικαιολογείται διότι το σχήμα του συνόλου τιμών γ^* είναι, συνήθως, αυτό που στην καθημερινή γλώσσα ονομάζουμε "καμπύλη στο επίπεδο". Μάλιστα, πολλές φορές θα χρησιμοποιούμε καταχρηστικά τον όρο "καμπύλη" για το σύνολο τιμών γ^* αν και κάτι τέτοιο *δεν είναι τυπικά σωστό*. Το πρόβλημα είναι ότι μπορεί δυο διαφορετικές καμπύλες γ_1 και γ_2 να έχουν το ίδιο σύνολο τιμών, δηλαδή την ίδια τροχιά ${\gamma_1}^* = {\gamma_2}^*$.

Παράδειγμα 4.2.1. Έστω $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$, $z_0 \neq z_1$. Η $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ με παραμετρική εξίσωση

$$z = \gamma(t) = \frac{t-a}{b-a} z_1 + \frac{b-t}{b-a} z_0, \qquad t \in [a, b]$$

είναι καμπύλη και η τροχιά γ^* είναι το ευθύγραμμο τμήμα $[z_0, z_1]$ με άκρα τα σημεία z_0, z_1. Η αρχή της καμπύλης είναι το σημείο z_0 και το τέλος της το σημείο z_1.
Παρατηρήστε ότι, αν αλλάξουμε το διάστημα και θεωρήσουμε την $\gamma : [c, d] \to \mathbb{C}$ με παραμετρική εξίσωση

$$z = \gamma(t) = \frac{t-c}{d-c} z_1 + \frac{d-t}{d-c} z_0, \qquad t \in [c.d],$$

τότε η τροχιά γ^* είναι πάλι το ίδιο ευθύγραμμο τμήμα $[z_0, z_1]$ με άκρα τα σημεία z_0, z_1.
Το απλούστερο είναι να θεωρήσουμε ως διάστημα το $[0, 1]$, οπότε η παραμετρική εξίσωση της $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ γίνεται

$$z = \gamma(t) = t z_1 + (1-t) z_0, \qquad t \in [0, 1].$$

Η φορά διαγραφής της καμπύλης είναι από το σημείο z_0 προς το σημείο z_1.

Παράδειγμα 4.2.2. Έστω z_0 και $r > 0$. Η $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ με παραμετρική εξίσωση

$$z = \gamma(t) = z_0 + r(\cos t + i \sin t), \qquad t \in [0, 2\pi]$$

είναι καμπύλη και η τροχιά γ^* είναι ο κύκλος $C(z_0; r)$. Η αρχή και το τέλος της καμπύλης είναι το ίδιο σημείο $z_0 + r$. Η φορά διαγραφής της καμπύλης είναι η θετική φορά περιστροφής στον κύκλο, δηλαδή η φορά περιστροφής που είναι αντίθετη με την φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού.
Αν θεωρήσουμε την $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ στο ίδιο διάστημα $[0, 2\pi]$ αλλά με διαφορετική παραμετρική εξίσωση

$$z = \gamma(t) = z_0 + r(\cos 2t + i \sin 2t), \qquad t \in [0, 2\pi]$$

τότε έχουμε μια διαφορετική καμπύλη από την προηγούμενη (ίδιο πεδίο ορισμού αλλά διαφορετικός τύπος). Όμως, η τροχιά γ^* είναι ο ίδιος κύκλος $C(z_0; r)$ και η αρχή και το τέλος της καμπύλης είναι το ίδιο σημείο $z_0 + r$, όπως και της προηγούμενης καμπύλης. Η φορά διαγραφής της καμπύλης είναι πάλι η θετική φορά περιστροφής στον κύκλο, δηλαδή η φορά περιστροφής που είναι αντίθετη με τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού.

Με τις δυο αυτές καμπύλες πειθόμαστε για την αναγκαιότητα να θεωρούμε μια καμπύλη ως συνάρτηση και όχι ως γεωμετρικό σχήμα (τροχιά). Παρά το ότι και οι δυο καμπύλες έχουν την ίδια τροχιά, τα ίδια άκρα και την ίδια φορά διαγραφής, η δεύτερη καμπύλη διαγράφει την τροχιά της δυο φορές ενώ η πρώτη καμπύλη διαγράφει την (ίδια) τροχιά της μια φορά.

Αν, όπως στο τελευταίο παράδειγμα, μια καμπύλη $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ έχει το ίδιο σημείο ως αρχή και τέλος, δηλαδή αν $\gamma(a) = \gamma(b)$, τότε η καμπύλη χαρακτηρίζεται **κλειστή**.

Επίσης, αν $\gamma : [a, b] \to A$ είναι μια καμπύλη, όπου $A \subseteq \mathbb{C}$, τότε ισχύει $\gamma(t) \in A$ για κάθε $t \in [a, b]$ ή, ισοδύναμα, η τροχιά γ^* περιέχεται στο σύνολο A. Τότε θα μιλάμε για **καμπύλη στο** A ή θα λέμε **η καμπύλη είναι στο** A.

Έστω καμπύλη $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ και $t_0 \in [a, b]$. Υποθέτουμε ότι η γ είναι παραγωγίσιμη στο t_0 και θεωρούμε την παράγωγο της γ στο t_0, δηλαδή το όριο

$$\gamma'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} \in \mathbb{C}.$$

Αν $t_0 = a$, τότε το όριο αυτό είναι, φυσικά, δεξιό πλευρικό όριο και, αν $t_0 = b$, τότε το όριο αυτό είναι αριστερό πλευρικό όριο.

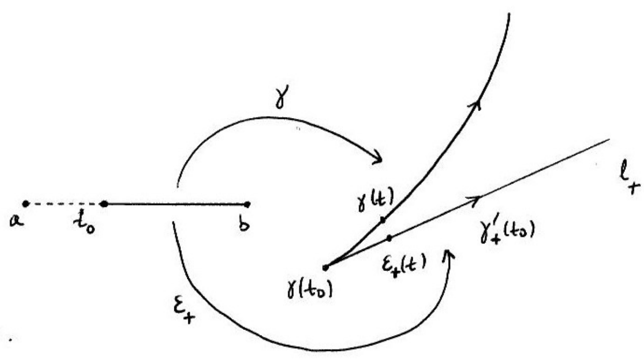
Έστω καμπύλη $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ και $t_0 \in [a, b]$ το οποίο είναι είτε εσωτερικό σημείο είτε αριστερό άκρο του διαστήματος I. Έστω ότι υπάρχει η δεξιά πλευρική παράγωγος $\gamma'_+(t_0)$ και είναι μιγαδικός αριθμός $\neq 0$. Θεωρούμε και την ημιευθεία l_+ με παραμετρική εξίσωση

$$z = \varepsilon_+(t) = \gamma(t_0) + (t - t_0)\gamma'_+(t_0), \qquad t \geq t_0,$$

με κορυφή το σημείο $\gamma(t_0)$ και κατεύθυνση που καθορίζεται από το διάνυσμα $\gamma'_+(t_0)$. Παρατηρήστε ότι

$$\begin{aligned}\lim_{t \to t_0+} \frac{|\gamma(t) - \varepsilon_+(t)|}{|\varepsilon_+(t) - \gamma(t_0)|} &= \lim_{t \to t_0+} \Big| \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0) - (t - t_0)\gamma'_+(t_0)}{(t - t_0)\gamma'_+(t_0)} \Big| \\ &= \frac{1}{|\gamma'_+(t_0)|} \lim_{t \to t_0+} \Big| \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} - \gamma'_+(t_0) \Big| = 0.\end{aligned}$$

Άρα, καθώς το t πλησιάζει το t_0 από τα δεξιά του, η απόσταση του σημείου $\gamma(t)$ (το οποίο κινείται πάνω στην τροχιά γ^*) από το σημείο $\varepsilon_+(t)$ (το οποίο κινείται πάνω στην ημιευθεία l_+) μικραίνει πιο γρήγορα από την απόσταση του σημείου $\varepsilon_+(t)$ από το κοινό σημείο $\gamma(t_0)$ της τροχιάς της καμπύλης και της ημιευθείας l_+. Δείτε το σχήμα 16. Αυτό σημαίνει ότι η τροχιά γ^* εφάπτεται με την ημιευθεία l_+ στο κοινό σημείο τους $\gamma(t_0)$. Γι αυτό λέμε ότι η l_+ είναι η **εφαπτόμενη ημιευθεία** της καμπύλης γ στο σημείο $\gamma(t_0)$ *προς τη φορά διαγραφής* και ότι το $\gamma'_+(t_0)$ (που καθορίζει την κατεύθυνση της ημιευθείας) είναι το **εφαπτόμενο διάνυσμα** της καμπύλης γ στο σημείο $\gamma(t_0)$ *προς τη φορά διαγραφής* της καμπύλης.



Σχ 16.

Έστω καμπύλη $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ και $t_0 \in [a, b]$ το οποίο είναι είτε εσωτερικό σημείο είτε δεξιό άκρο του διαστήματος $[a, b]$. Έστω ότι υπάρχει η $\gamma'_-(t_0)$ και είναι μιγαδικός αριθμός $\neq 0$. Θεωρούμε την ημιευθεία l_- με παραμετρική εξίσωση

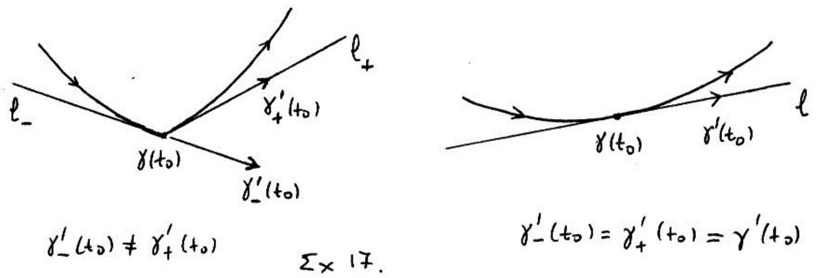
$$z = \varepsilon_-(t) = \gamma(t_0) + (t - t_0)\gamma'_-(t_0), \qquad t \leq t_0,$$

με κορυφή το σημείο $\gamma(t_0)$ και κατεύθυνση που καθορίζεται από το διάνυσμα $-\gamma'_-(t_0)$ (προσέξτε το πρόσημο). Τώρα είναι

$$\begin{aligned}\lim_{t \to t_0-} \frac{|\gamma(t) - \varepsilon_-(t)|}{|\varepsilon_-(t) - \gamma(t_0)|} &= \lim_{t \to t_0-} \Big|\frac{\gamma(t) - \gamma(t_0) - (t - t_0)\gamma'_-(t_0)}{(t - t_0)\gamma'_-(t_0)}\Big| \\ &= \frac{1}{|\gamma'_-(t_0)|} \lim_{t \to t_0-} \Big|\frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} - \gamma'_-(t_0)\Big| = 0.\end{aligned}$$

Άρα, καθώς το t πλησιάζει το t_0 από τα αριστερά του, η απόσταση του σημείου $\gamma(t)$ (το οποίο κινείται πάνω στην τροχιά γ^*) από το σημείο $\varepsilon_-(t)$ (το οποίο κινείται πάνω στην ημιευθεία l_-) μικραίνει πιο γρήγορα από την απόσταση του σημείου $\varepsilon_-(t)$ από το κοινό σημείο $\gamma(t_0)$ της τροχιάς της καμπύλης και της ημιευθείας l_-. Αυτό σημαίνει ότι η τροχιά γ^* εφάπτεται με την ημιευθεία l_- στο κοινό σημείο τους $\gamma(t_0)$ και λέμε ότι η l_- είναι η **εφαπτόμενη ημιευθεία** της καμπύλης γ στο σημείο $\gamma(t_0)$ *προς τη φορά την αντίθετη της φοράς διαγραφής* και ότι το $-\gamma'_-(t_0)$ (που καθορίζει την κατεύθυνση της ημιευθείας) είναι το **εφαπτόμενο διάνυσμα** της καμπύλης γ στο σημείο $\gamma(t_0)$ *προς τη φορά την αντίθετη της φοράς διαγραφής* της καμπύλης.

Αν το t_0 είναι εσωτερικό σημείο του I, τότε συνδυάζουμε τα προηγούμενα και βλέπουμε ότι η καμπύλη γ έχει δυο εφαπτόμενες ημιευθείες l_+ και l_- στο σημείο $\gamma(t_0)$, μια προς τη φορά διαγραφής της με κατεύθυνση που καθορίζεται από το $\gamma'_+(t_0)$ και μια προς την αντίθετη φορά με κατεύθυνση που καθορίζεται από το $-\gamma'_-(t_0)$. Δείτε το σχήμα 17. Στην περίπτωση που είναι $\gamma'_+(t_0) = \gamma'_-(t_0) = \gamma'(t_0) \neq 0$, οι δυο ημιευθείες είναι αντίθετες και η ένωσή τους σχηματίζει ευθεία l η οποία ονομάζεται **εφαπτόμενη ευθεία** της καμπύλης γ στο σημείο $\gamma(t_0)$. Το $\gamma'(t_0)$ είναι το **εφαπτόμενο διάνυσμα** της καμπύλης γ στο σημείο $\gamma(t_0)$ *προς τη φορά διαγραφής* της καμπύλης και το $-\gamma'(t_0)$ είναι το **εφαπτόμενο διάνυσμα** της καμπύλης *προς τη φορά την αντίθετη της φοράς διαγραφής* της καμπύλης.



Η παραμετρική εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας l είναι η

$$z = \varepsilon(t) = \gamma(t_0) + (t - t_0)\gamma'(t_0), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Προσέξτε τον ρόλο της παραδοχής $\gamma'(t_0) \neq 0$. Αν $\gamma'(t_0) = 0$, τότε το εφαπτόμενο διάνυσμα είναι μηδενικό και *δεν ορίζει εφαπτόμενη ευθεία*. Πράγματι, τότε η παραμετρική εξίσωση $z = \gamma(t_0) + (t - t_0)\gamma'(t_0) = \gamma(t_0)$ καταλήγει σε παραμετρική εξίσωση σημείου και όχι ευθείας.

Τέλος, αν $\gamma'_+(t_0) \neq \gamma'_-(t_0)$, τότε οι δυο εφαπτόμενες ημιευθείες l_+ και l_- δεν είναι αντίθετες και δεν σχηματίζουν εφαπτόμενη ευθεία. Τότε λέμε ότι η καμπύλη γ **σχηματίζει γωνία** στο σημείο $\gamma(t_0)$, υπονοώντας ότι η κυρτή γωνία θ ανάμεσα στις δυο εφαπτόμενες ημιευθείες είναι μικρότερη των 180 μοιρών, δηλαδή $0 \leq \theta < \pi$.

Εκτός από το γεωμετρικό περιεχόμενο της παραγώγου, το οποίο αναλύσαμε προηγουμένως, υπάρχει και το φυσικό περιεχόμενό της. Αν θεωρήσουμε ότι η παράμετρος t εκφράζει *χρόνο*, τότε η $\gamma'(t_0)$ εκφράζει την *(διανυσματική) ταχύτητα* του σημείου $\gamma(t)$ στη θέση $\gamma(t_0)$. Φυσικά, το μέτρο $|\gamma'(t_0)|$ εκφράζει τη *βαθμωτή ταχύτητα* και η γωνία $\arg\gamma'(t_0)$ εκφράζει τη διεύθυνση της (διανυσματικής) ταχύτητας του σημείου $\gamma(t)$ στη θέση $\gamma(t_0)$.

Παράδειγμα 4.2.3. Έστω $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$, $z_0 \neq z_1$. Η $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ με παραμετρική αναπαράσταση

$$z = \gamma(t) = \frac{t-a}{b-a}z_1 + \frac{b-t}{b-a}z_0, \qquad t \in [a,b]$$

είναι καμπύλη με τροχιά γ^* το ευθύγραμμο τμήμα $[z_0, z_1]$. Το εφαπτόμενο διάνυσμα σε οποιοδήποτε σημείο $\gamma(t)$ του ευθυγράμμου τμήματος είναι το

$$\gamma'(t) = \frac{z_1 - z_0}{b-a}$$

και είναι σταθερό.

Παράδειγμα 4.2.4. Έστω z_0 και $r > 0$. Η $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ με παραμετρική αναπαράσταση

$$\gamma(t) = z_0 + r(\cos t + i\sin t), \qquad t \in [0, 2\pi]$$

είναι καμπύλη με τροχιά γ^* τον κύκλο $C(z_0; r)$. Το εφαπτόμενο διάνυσμα σε οποιοδήποτε σημείο $\gamma(t)$ της καμπύλης είναι το

$$\gamma'(t) = r(-\sin t + i\cos t).$$

Παρατηρούμε ότι τα διανύσματα $\gamma(t) - z_0$ και $\gamma'(t)$ (το "ακτινικό" διάνυσμα και το εφαπτόμενο διάνυσμα) είναι κάθετα, αφού έχουν εσωτερικό γινόμενο

$$(\gamma(t) - z_0) \cdot \gamma'(t) = (r\cos t, r\sin t) \cdot (-r\sin t, r\cos t) = -r^2 \cos t \sin t + r^2 \sin t \cos t = 0.$$

Παρατηρήστε ότι το μέτρο του εφαπτόμενου διανύσματος είναι σταθερό

$$|\gamma'(t)| = r.$$

Δηλαδή, το σημείο $\gamma(t)$ κινείται με σταθερή βαθμωτή ταχύτητα r πάνω στην τροχιά του.
Θα ξαναδούμε τη διαφορά με την άλλη καμπύλη $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ με παραμετρική αναπαράσταση

$$\gamma(t) = z_0 + r(\cos 2t + i\sin 2t), \qquad t \in [0, 2\pi],$$

η οποία έχει την ίδια τροχιά $C(z_0; r)$. Τώρα το εφαπτόμενο διάνυσμα σε οποιοδήποτε σημείο $\gamma(t)$ της καμπύλης είναι το

$$\gamma'(t) = 2r(-\sin 2t + i\cos 2t).$$

Το μέτρο του εφαπτόμενου διανύσματος είναι πάλι σταθερό

$$|\gamma'(t)| = 2r.$$

Όμως, τώρα το σημείο $\gamma(t)$ κινείται με διπλάσια βαθμωτή ταχύτητα από την βαθμωτή ταχύτητα του σημείου $\gamma(t)$ της προηγούμενης καμπύλης. Αυτό είναι αναμενόμενο αφού στο *ίδιο χρονικό διάστημα* $[0, 2\pi]$ το $\gamma(t)$ της δεύτερης καμπύλης διαγράφει την ίδια τροχιά με το $\gamma(t)$ της πρώτης καμπύλης αλλά *δυο φορές* αντί μιας.

Έστω συνεχώς παραγωγίσιμη καμπύλη $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$. Δηλαδή, υποθέτουμε ότι υπάρχει η $\gamma'(t)$ για κάθε $t \in [a,b]$ και ότι η $\gamma' : [a,b] \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής στο $[a,b]$. Είναι γνωστό από τον Απειροστικό Λογισμό ότι το μήκος της γ είναι ίσο με

$$\text{μήκος}\,\gamma = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt. \tag{4.2}$$

Παράδειγμα 4.2.5. Έστω $z_0 \neq z_1$ και $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ με παραμετρική εξίσωση

$$z = \gamma(t) = \frac{b-t}{b-a} z_0 + \frac{t-a}{b-a} z_1, \qquad t \in [a, b].$$

Τότε το μήκος της γ είναι ίσο με

$$\text{μήκος}\, \gamma = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt = \int_a^b \left| \frac{z_1 - z_0}{b-a} \right| dt = \left| \frac{z_1 - z_0}{b-a} \right| \int_a^b dt = |z_1 - z_0|,$$

δηλαδή ίσο με το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος $[z_0, z_1]$.

Παράδειγμα 4.2.6. Έστω z_0 και $r > 0$ και $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ με παραμετρική εξίσωση

$$z = \gamma(t) = z_0 + r(\cos t + i \sin t), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Το μήκος της γ είναι ίσο με

$$\text{μήκος}\, \gamma = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt = \int_0^{2\pi} |r(-\sin t + i \cos t)|\, dt = \int_0^{2\pi} r\, dt = 2\pi r,$$

δηλαδή ίσο με το μήκος του κύκλου $C(z_0; r)$.
Πάλι, αν θεωρήσουμε την $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ με παραμετρική εξίσωση

$$z = \gamma(t) = z_0 + r(\cos 2t + i \sin 2t), \qquad t \in [0, 2\pi],$$

τότε το μήκος αυτής της γ είναι ίσο με

$$\text{μήκος}\, \gamma = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt = \int_0^{2\pi} |2r(-\sin 2t + i \cos 2t)|\, dt = \int_0^{2\pi} 2r\, dt = 4\pi r,$$

δηλαδή ίσο με το διπλάσιο του μήκους του κύκλου $C(z_0; r)$.

Ας δούμε μια σύντομη αιτιολόγηση (όχι απόδειξη) του τύπου (4.2) για το μήκος της καμπύλης. Θεωρούμε μια διαμέριση $\Delta = \{t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n\}$ του παραμετρικού διαστήματος $[a, b]$, δηλαδή $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$. Αυτή η διαμέριση ορίζει ένα αντίστοιχο σύνολο διαδοχικών σημείων

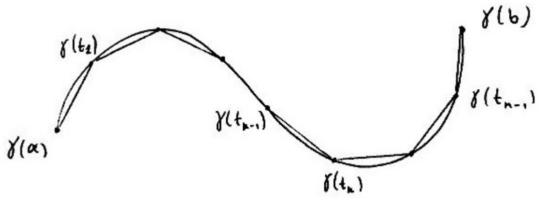
$$\{\gamma(t_0), \gamma(t_1), \ldots, \gamma(t_{n-1}), \gamma(t_n)\}$$

της τροχιάς γ^* της καμπύλης $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ από το αρχικό άκρο $\gamma(t_0) = \gamma(a)$ μέχρι το τελικό άκρο $\gamma(t_n) = \gamma(b)$. Το μήκος της αντίστοιχης πολυγωνικής γραμμής που δημιουργείται είναι, φυσικά, ίσο με

$$|\gamma(t_1) - \gamma(t_0)| + \cdots + |\gamma(t_n) - \gamma(t_{n-1})| = \sum_{k=1}^{n} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})|. \tag{4.3}$$

Δείτε το σχήμα 18.

Σx 18.



Αν θεωρήσουμε ένα οποιοδήποτε ενδιάμεσο σημείο $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, τότε, επειδή η γ' είναι συνεχής, ο λόγος $\frac{\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})}{t_k-t_{k-1}}$ είναι περίπου ίσος με την παράγωγο $\gamma'(\xi_k)$ και όσο πιο λεπτή είναι η διαμέριση τόσο πιο κοντά είναι το $\frac{\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})}{t_k-t_{k-1}}$ στο $\gamma'(\xi_k)$. Άρα όσο πιο λεπτή είναι η διαμέριση τόσο πιο κοντά είναι το μήκος της πολυγωνικής γραμμής στο άθροισμα

$$\sum_{k=1}^{n} |\gamma'(\xi_k)|(t_k - t_{k-1}). \tag{4.4}$$

Δηλαδή, η διαφορά των αθροισμάτων (4.3) και (4.4) τείνει στο 0 όταν το πλάτος της Δ τείνει στο 0. Όμως το άθροισμα (4.4) είναι το άθροισμα Riemann της συνεχούς συνάρτησης $|\gamma'|$ στο $[a, b]$ που αντιστοιχεί στη διαμέριση $\Delta = \{t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n\}$ και στην επιλογή $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ ενδιάμεσων σημείων. Τώρα, όταν το πλάτος της Δ τείνει στο 0 το μεν μήκος (4.3) της αντίστοιχης πολυγωνικής γραμμής τείνει στο μήκος της καμπύλης το δε άθροισμα Riemann (4.4) τείνει στο ολοκλήρωμα $\int_a^b |\gamma'(t)|\,dt$. Παίρνοντας, λοιπόν, διαμερίσεις με πλάτη που τείνουν στο 0, προκύπτει ο τύπος (4.2).

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Λέμε ότι η καμπύλη $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ είναι* **ομαλή** *αν είναι συνεχώς παραγωγίσιμη (δηλαδή η γ' είναι συνεχής στο $[a, b]$) και ισχύει $\gamma'(t) \neq 0$ για κάθε $t \in [a, b]$.*

Αν η γ είναι ομαλή, τότε σε κάθε σημείο $\gamma(t)$ έχει μη-μηδενικό εφαπτόμενο διάνυσμα $\gamma'(t)$ (οπότε ορίζεται η αντίστοιχη εφαπτόμενη ευθεία) και το εφαπτόμενο διάνυσμα μεταβάλλεται με συνεχή τρόπο όταν το t διατρέχει το διάστημα $[a, b]$ (και το σημείο $\gamma(t)$ διατρέχει με συνεχή τρόπο την τροχιά της γ).

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Λέμε ότι η καμπύλη $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ είναι* **τμηματικά ομαλή** *αν υπάρχουν $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$ στο παραμετρικό διάστημα $[a, b]$ ώστε σε καθένα από τα υποδιαστήματα στα οποία το $[a, b]$ χωρίζεται από τα $t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n$ ο αντίστοιχος περιορισμός της γ να είναι ομαλή καμπύλη.*

Αυτό σημαίνει ότι σε κάθε $t \in [a, b] \setminus \{t_0, \dots, t_n\}$ υπάρχει η $\gamma'(t)$ και είναι $\neq 0$, ότι σε κάθε t_k υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι $\gamma'_-(t_k)$, $\gamma'_+(t_k)$ και είναι $\neq 0$ και ότι σε κάθε υποδιάστημα $[t_{k-1}, t_k]$ η γ' είναι συνεχής αν στα άκρα του υποδιαστήματος θεωρήσουμε ως τιμές της γ' τις αντίστοιχες πλευρικές παραγώγους "από μέσα" από το υποδιάστημα. Η καμπύλη γ πιθανόν να σχηματίζει γωνία στα σημεία $\gamma(t_1), \dots, \gamma(t_{n-1})$.

Είναι φανερό ότι το μήκος μιας τμηματικά ομαλής καμπύλης $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ δίνεται και πάλι από τον τύπο (4.2), όπου το ολοκλήρωμα είναι το ολοκλήρωμα Riemann της τμηματικά συνεχούς συνάρτησης $|\gamma'| : [a, b] \to \mathbb{C}$. Αυτό, φυσικά, προκύπτει αν θεωρήσουμε τους περιορισμούς $\gamma_k : [t_{k-1}, t_k] \to \mathbb{C}$ της $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$. Τότε κάθε γ_k είναι ομαλή καμπύλη και, επομένως, ισχύει ο τύπος (4.2) γι αυτήν, δηλαδή

$$\text{μήκος}\,\gamma_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\gamma_k'(t)|\,dt = \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\gamma'(t)|\,dt.$$

Τέλος, αθροίζουμε ως προς $k = 1, \dots, n$ και βρίσκουμε τον τύπο (4.2).

Από τώρα και στο εξής θα κάνουμε την εξής σύμβαση:

Όλες οι καμπύλες θα είναι ομαλές ή στη χειρότερη περίπτωση τμηματικά ομαλές.

Έστω καμπύλη $\gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{C}$. Θεωρούμε οποιαδήποτε συνάρτηση $\sigma : [c, d] \to [a, b]$ η οποία είναι ένα-προς-ένα στο $[c, d]$ και επί του $[a, b]$, έχει συνεχή παράγωγο στο $[c, d]$ και ισχύει $\sigma'(s) > 0$ για κάθε $s \in [c, d]$. Επομένως, η σ είναι γνησίως αύξουσα στο $[c, d]$ και $\sigma(c) = a$ και $\sigma(d) = b$. Κάθε τέτοια συνάρτηση σ χαρακτηρίζεται **αλλαγή παραμέτρου**. Τότε ορίζεται η $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \sigma : [c, d] \to \mathbb{C}$ και είναι συνεχής στο $[c, d]$, οπότε αποτελεί καμπύλη. Η γ_2 χαρακτηρίζεται

αναπαραμετρικοποίηση της γ_1 : η παράμετρος της γ_1 είναι το $t \in [a,b]$ ενώ η παράμετρος της γ_2 είναι το $s \in [c,d]$. Παρατηρούμε ότι

$$\gamma_2{}^* = \{\gamma_2(s) \,|\, s \in [c,d]\} = \{\gamma_1(\sigma(s)) \,|\, s \in [c,d]\} = \{\gamma_1(t) \,|\, t \in [a,b]\} = \gamma_1{}^*.$$

Δηλαδή, οι τροχιές των δυο καμπυλών είναι το ίδιο υποσύνολο του επιπέδου. Επίσης, τα άκρα των δυο καμπυλών ταυτίζονται: αρχικό άκρο $= \gamma_2(c) = \gamma_1(\sigma(c)) = \gamma_1(a)$ και τελικό άκρο $= \gamma_2(d) = \gamma_1(\sigma(d)) = \gamma_1(b)$. Βλέπουμε, ακόμη, ότι η φορά διαγραφής των δυο καμπυλών είναι ίδια. Καθώς το s αυξάνεται διατρέχοντας το $[c,d]$, το $t = \sigma(s)$ αυξάνεται διατρέχοντας το $[a,b]$ και το σημείο $\gamma_2(s) = \gamma_1(\sigma(s)) = \gamma_1(t)$ διατρέχει την κοινή τροχιά των δυο καμπυλών από το κοινό αρχικό άκρο μέχρι το κοινό τελικό άκρο. Μια δεύτερη παρατήρηση είναι η εξής. Αν η γ_1 είναι ομαλή, τότε και η γ_2 είναι ομαλή. Πράγματι, ισχύει

$$\gamma_2{}'(s) = (\gamma_1 \circ \sigma)'(s) = \gamma_1{}'(\sigma(s))\sigma'(s) = \gamma_1{}'(t)\sigma'(s)$$

για κάθε $s \in [c,d]$ με το αντίστοιχο $t = \sigma(s) \in [a,b]$. Επειδή υποθέτουμε ότι ισχύει $\sigma'(s) > 0$ για κάθε $s \in [c,d]$, το εφαπτόμενο διάνυσμα $\gamma_2{}'(s)$ στο σημείο $\gamma_2(s) = \gamma_1(\sigma(s)) = \gamma_1(t)$ είναι θετικό πολλαπλάσιο του εφαπτόμενου διανύσματος $\gamma_1{}'(t)$ στο ίδιο σημείο $\gamma_1(t)$. Επομένως, μια αναπαραμετρικοποίηση διατηρεί τις διευθύνσεις των εφαπτόμενων διανυσμάτων (οπότε διατηρεί και τις εφαπτόμενες ευθείες) και αλλάζει μόνο τα μέτρα τους σε κάθε σημείο της τροχιάς. Με άλλα λόγια, αλλάζει η βαθμωτή ταχύτητα διαγραφής της καμπύλης αλλά όχι η διεύθυνση της ταχύτητας: τα σημεία $\gamma_2(s)$ και $\gamma_1(t)$ διατρέχουν την ίδια τροχιά με διαφορετική βαθμωτή ταχύτητα. Αυτά, φυσικά, επεκτείνονται και στην περίπτωση τμηματικά ομαλών καμπυλών. Τότε διατηρούνται και οι γωνίες που τυχόν σχηματίζει η καμπύλη σε κάποια πεπερασμένου πλήθους σημεία.

Εκτός από την τροχιά, τα άκρα, τη φορά διαγραφής και την κατεύθυνση των εφαπτόμενων διανυσμάτων, υπάρχει κάτι ακόμη που μένει αμετάβλητο μετά από αλλαγή παραμέτρου μιας καμπύλης: το μήκος της. Πράγματι, με την απλή αλλαγή μεταβλητής $t = \sigma(s)$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\text{μήκος}\,\gamma_2 &= \int_c^d |\gamma_2{}'(s)|\,ds = \int_c^d |\gamma_1{}'(\sigma(s))||\sigma'(s)|\,ds \\ &= \int_c^d |\gamma_1{}'(\sigma(s))|\sigma'(s)\,ds = \int_a^b |\gamma_1{}'(t)|\,dt = \text{μήκος}\,\gamma_1.\end{aligned}$$

Παράδειγμα 4.2.7. Θεωρούμε τις καμπύλες $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$ και $\gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{C}$ με παραμετρικές εξισώσεις

$$z = \gamma_1(t) = \frac{b-t}{b-a}z_0 + \frac{t-a}{b-a}z_1, \quad t \in [a,b], \qquad z = \gamma_2(s) = \frac{d-s}{d-c}z_0 + \frac{s-c}{d-c}z_1, \quad s \in [c,d].$$

Τότε η γ_2 είναι αναπαραμετρικοποίηση της γ_1. Πράγματι, αν θεωρήσουμε την $\sigma : [c,d] \to [a,b]$ με τύπο

$$t = \sigma(s) = \frac{d-s}{d-c}a + \frac{s-c}{d-c}b, \qquad s \in [c,d]$$

τότε η σ έχει τις κατάλληλες ιδιότητες ώστε να χαρακτηριστεί *αλλαγή παραμέτρου* και ισχύει

$$\gamma_2(s) = \gamma_1(\sigma(s)) \qquad \text{για κάθε}\;\; s \in [c,d].$$

Όπως έχουμε δει, και οι δυο καμπύλες έχουν τροχιά το ευθ. τμήμα $[z_0, z_1]$. Το μήκος και των δυο καμπυλών είναι ίσο με το μήκος $|z_1 - z_0|$ του ευθ. τμήματος.

Δεν είναι δύσκολο να δει κανείς ότι η *σχέση αναπαραμετρικοποίησης* ανάμεσα στις καμπύλες του μιγαδικού επιπέδου είναι *σχέση ισοδυναμίας*.

Τώρα, αν έχουμε οποιαδήποτε καμπύλη $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ και ένα οποιοδήποτε διάστημα $[c,d]$ διαφορετικό από το $[a,b]$, τότε υπάρχει καμπύλη η οποία είναι αναπαραμετρικοποίηση της γ και ορίζεται στο $[c,d]$ αντί του $[a,b]$. Αυτό επιτυγχάνεται αρκεί να βρούμε κατάλληλη αλλαγή παραμέτρου $\sigma : [c,d] \to [a,b]$. Υπάρχουν άπειρες τέτοιες σ. Μια απλή τέτοια αλλαγή παραμέτρου είναι αυτή που χρησιμοποιήθηκε στο τελευταίο παράδειγμα και έχει τύπο

$$t = \phi(s) = \frac{d-s}{d-c}a + \frac{s-c}{d-c}b, \qquad s \in [c,d].$$

Αυτό σημαίνει ότι το διάστημα στο οποίο είναι ορισμένη μια καμπύλη δεν έχει ιδιαίτερη σημασία αφού υπάρχει αναπαραμετρικοποίηση της καμπύλης ορισμένη σε οποιοδήποτε άλλο διάστημα μας βολεύει καλύτερα.

Έστω καμπύλες $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$ και $\gamma_2 : [b,c] \to \mathbb{C}$ ώστε $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$. Δηλαδή, υποθέτουμε ότι το τέλος της γ_1 ταυτίζεται με την αρχή της γ_2. Τότε λέμε ότι οι καμπύλες γ_1 και γ_2 (με αυτήν τη σειρά) είναι **διαδοχικές** και τότε ορίζεται η καμπύλη $\gamma_1 \dot{+} \gamma_2 : [a,c] \to \mathbb{C}$ με τύπο

$$(\gamma_1 \dot{+} \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & \text{αν } a \le t \le b \\ \gamma_2(t), & \text{αν } b \le t \le c \end{cases}$$

Η $\gamma_1 \dot{+} \gamma_2$ είναι καμπύλη (διότι είναι συνεχής στο $[a,c]$) και ονομάζεται **άθροισμα** των γ_1 και γ_2. Επίσης, επειδή οι γ_1 και γ_2 είναι τμηματικά ομαλές, η $\gamma_1 \dot{+} \gamma_2$ είναι κι αυτή τμηματικά ομαλή.

Παρατηρούμε ότι καθώς το t αυξάνεται στο $[a,c]$, από το a μέχρι το b το σημείο $(\gamma_1 \dot{+} \gamma_2)(t)$ ταυτίζεται με το σημείο $\gamma_1(t)$ και διαγράφει την τροχιά $\gamma_1{}^*$ από το $\gamma_1(a)$ μέχρι το $\gamma_1(b)$ και, κατόπιν, από το b μέχρι το c το σημείο $(\gamma_1 \dot{+} \gamma_2)(t)$ ταυτίζεται με το $\gamma_2(t)$ και διαγράφει την τροχιά $\gamma_2{}^*$ από το $\gamma_2(b)$ μέχρι το $\gamma_2(c)$. Βλέπουμε, λοιπόν, ότι η τροχιά $(\gamma_1 \dot{+} \gamma_2)^*$ είναι η ένωση των τροχιών $\gamma_1{}^*$ και $\gamma_2{}^*$.

Φυσικά, το άθροισμα καμπυλών γενικεύεται και για περισσότερες από δύο πεπερασμένου πλήθους καμπύλες αρκεί αυτές να είναι διαδοχικές.

Παράδειγμα 4.2.8. Μια οποιαδήποτε πολυγωνική γραμμή μπορεί, προφανώς, να θεωρηθεί άθροισμα διαδοχικών καμπυλών καθεμιά από τις οποίες έχει ως τροχιά ένα από τα ευθύγραμμα τμήματα που αποτελούν την πολυγωνική γραμμή.

Μέσω της "πράξης" της άθροισης διαδοχικών καμπυλών μπορούμε να θεωρήσουμε διαδοχικές καμπύλες ως μία καμπύλη (*σύνθεση*) αλλά και να θεωρήσουμε μία καμπύλη ως άθροισμα διαδοχικών καμπυλών (*ανάλυση*).

Ας δούμε και μια απλή ιδιότητα του αθροίσματος καμπυλών σε σχέση με το μήκος τους:

$$\begin{aligned} \text{μήκος}\, \gamma_1 \dot{+} \gamma_2 &= \int_a^c |(\gamma_1 \dot{+} \gamma_2)'(t)|dt = \int_a^b |(\gamma_1 \dot{+} \gamma_2)'(t)|dt + \int_b^c |(\gamma_1 \dot{+} \gamma_2)'(t)|dt \\ &= \int_a^b |\gamma_1{}'(t)|dt + \int_b^c |\gamma_2{}'(t)|dt = \text{μήκος}\, \gamma_1 + \text{μήκος}\, \gamma_2. \end{aligned}$$

Δηλαδή *το μήκος του αθροίσματος διαδοχικών καμπυλών είναι ίσο με το άθροισμα των μηκών των καμπυλών.*

Τέλος, έστω καμπύλη $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$. Ορίζουμε την καμπύλη $-\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ με τύπο

$$(-\gamma)(t) = \gamma(a+b-t), \qquad t \in [a,b].$$

Η $-\gamma$ είναι καμπύλη (διότι είναι συνεχής στο $[a,b]$) και ονομάζεται **αντίθετη** της γ. Επίσης, επειδή η γ είναι τμηματικά ομαλή, η $-\gamma$ είναι κι αυτή τμηματικά ομαλή.

Παρατηρούμε ότι $(-\gamma)(a) = \gamma(b)$ και $(-\gamma)(b) = \gamma(a)$. Οι δυο καμπύλες αλλάζουν τα άκρα τους. Πιο συγκεκριμένα, καθώς ο t αυξάνεται στο $[a,b]$ το σημείο $\gamma(t)$ διατρέχει την τροχιά γ^* από το $\gamma(a)$ προς το $\gamma(b)$ ενώ το σημείο $(-\gamma)(t)$ διατρέχει την ίδια τροχιά αλλά με την αντίθετη φορά. Δηλαδή, οι δυο αντίθετες καμπύλες έχουν την ίδια τροχιά αλλά αντίθετη φορά διαγραφής. Πάντως, το μήκος τους είναι το ίδιο, όπως φαίνεται με την απλή αλλαγή μεταβλητής $s = a+b-t$:

$$\begin{aligned}\text{μήκος}\, -\gamma &= \int_a^b |(-\gamma)'(t)|\, dt = \int_a^b |\gamma'(a+b-t)|\, dt \\ &= -\int_b^a |\gamma'(s)|\, ds = \int_a^b |\gamma'(s)|\, ds = \text{μήκος}\, \gamma.\end{aligned}$$

Ασκήσεις.

4.2.1. Έστω ανοικτό σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ και καμπύλη $\gamma : [a,b] \to \Omega$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|\gamma(t) - z| \geq \delta$ για κάθε $t \in [a,b]$ και κάθε $z \notin \Omega$.

4.2.2. Αποδείξτε ότι η σχέση αναπαραμετρικοποίησης ανάμεσα στις καμπύλες του μιγαδικού επιπέδου είναι σχέση ισοδυναμίας:
Κάθε καμπύλη γ είναι αναπαραμετρικοποίηση της γ.
Αν η γ_2 είναι αναπαραμετρικοποίηση της γ_1, τότε η γ_1 είναι αναπαραμετρικοποίηση της γ_2.
Αν η γ_2 είναι αναπαραμετρικοποίηση της γ_1 και η γ_3 είναι αναπαραμετρικοποίηση της γ_2, τότε η γ_3 είναι αναπαραμετρικοποίηση της γ_1.

4.3 Ολοκληρώματα μιγαδικών συναρτήσεων σε πραγματικά διαστήματα.

Τώρα θα δούμε την επέκταση της έννοιας του ολοκληρώματος από το ολοκλήρωμα *πραγματικής* συνάρτησης σε διάστημα του $\mathbb{R}$ στο ολοκλήρωμα *μιγαδικής* συνάρτησης και πάλι σε διάστημα του $\mathbb{R}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ και $u = \mathrm{Re}\, f : [a,b] \to \mathbb{R}$ και $v = \mathrm{Im}\, f : [a,b] \to \mathbb{R}$ το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της f, αντιστοίχως, οπότε*

$$f = u + iv.$$

Η f χαρακτηρίζεται **(Riemann) ολοκληρώσιμη** *στο $[a,b]$ αν οι u, v είναι και οι δυο (Riemann) ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$ και, σ' αυτήν την περίπτωση, ορίζουμε το* **ολοκλήρωμα (Riemann)** *της f στο $[a,b]$ να είναι το*

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b u(t)\, dt + i \int_a^b v(t)\, dt. \tag{4.5}$$

Επειδή οι αριθμοί $\int_a^b u(t)\, dt$ και $\int_a^b v(t)\, dt$ είναι πραγματικοί (ως ολοκληρώματα πραγματικών συναρτήσεων), συμπεραίνουμε ότι

$$\mathrm{Re} \int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b \mathrm{Re}\, f(t)\, dt, \qquad \mathrm{Im} \int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b \mathrm{Im}\, f(t)\, dt.$$

Εύκολα βλέπουμε ότι, αν θεωρήσουμε διαμερίσεις $\Delta = \{t_0, \ldots, t_n\}$ του $[a,b]$ και αντίστοιχες επιλογές $\Xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ ενδιάμεσων σημείων $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$ και τα αντίστοιχα αθροίσματα Riemann $\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(t_k - t_{k-1})$ τότε όταν το πλάτος της διαμέρισης τείνει στο 0 συνεπάγεται ότι το άθροισμα Riemann τείνει στο ολοκλήρωμα $\int_a^b f(t)\, dt$. Συμβολικά:

$$\lim_{\text{πλάτος}\,(\Delta) \to 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(t_k - t_{k-1}) = \int_a^b f(t)\, dt.$$

Αυτό προκύπτει από την ισότητα

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(t_k - t_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} u(\xi_k)(t_k - t_{k-1}) + i \sum_{k=1}^{n} v(\xi_k)(t_k - t_{k-1}),$$

από τα γνωστά για πραγματικές συναρτήσεις όρια

$$\lim_{\text{πλάτος}\,(\Delta)\to 0} \sum_{k=1}^{n} u(\xi_k)(t_k - t_{k-1}) = \int_a^b u(t)\,dt,$$

$$\lim_{\text{πλάτος}\,(\Delta)\to 0} \sum_{k=1}^{n} v(\xi_k)(t_k - t_{k-1}) = \int_a^b v(t)\,dt$$

και, τέλος, από την (4.5).

Παράδειγμα 4.3.1. Αν η f είναι τμηματικά συνεχής στο $[a,b]$, τότε οι $u = \operatorname{Re} f$ και $v = \operatorname{Im} f$ είναι τμηματικά συνεχείς στο $[a,b]$, οπότε είναι ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$ και, επομένως, η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.

Θα δούμε, τώρα, διάφορες ιδιότητες του ολοκληρώματος μιγαδικών συναρτήσεων και θα τις αποδείξουμε χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες ιδιότητες του ολοκληρώματος πραγματικών συναρτήσεων. Όλες οι ιδιότητες θεωρούνται γνωστές και δίνουμε τις αποδείξεις τους μόνο χάριν πληρότητας.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.5. *Έστω $f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{C}$ ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$. Τότε η $f_1 + f_2 : [a,b] \to \mathbb{C}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και*

$$\int_a^b (f_1(t) + f_2(t))\,dt = \int_a^b f_1(t)\,dt + \int_a^b f_2(t)\,dt.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τις $u_1 = \operatorname{Re} f_1$, $v_1 = \operatorname{Im} f_1$, $u_2 = \operatorname{Re} f_2$, $v_2 = \operatorname{Im} f_2$. Αυτές είναι ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$, οπότε και οι $\operatorname{Re}(f_1 + f_2) = u_1 + u_2$ και $\operatorname{Im}(f_1 + f_2) = v_1 + v_2$ είναι ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$. Άρα και η $f_1 + f_2$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και

$$\begin{aligned}
\int_a^b (f_1(t) + f_2(t))\,dt &= \int_a^b (u_1(t) + u_2(t))\,dt + i\int_a^b (v_1(t) + v_2(t))\,dt \\
&= \int_a^b u_1(t)\,dt + \int_a^b u_2(t)\,dt + i\int_a^b v_1(t)\,dt + i\int_a^b v_2(t)\,dt \\
&= \int_a^b f_1(t)\,dt + \int_a^b f_2(t)\,dt.
\end{aligned}$$

□

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.6. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και αριθμός $\lambda \in \mathbb{C}$. Τότε η $\lambda f : [a,b] \to \mathbb{C}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και*

$$\int_a^b \lambda f(t)\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt.$$

Απόδειξη. Τώρα θεωρούμε τις $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$ και τους αριθμούς $\mu = \operatorname{Re}\lambda$, $\nu = \operatorname{Im}\lambda$. Οι u, v είναι ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$, οπότε και οι $\operatorname{Re}(\lambda f) = \mu u - \nu v$ και $\operatorname{Im}(\lambda f) = \nu u + \mu v$ είναι ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$. Άρα και η λf είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και

$$\begin{aligned}
\int_a^b \lambda f(t)\,dt &= \int_a^b (\mu u(t) - \nu v(t))\,dt + i\int_a^b (\nu u(t) + \mu v(t))\,dt \\
&= \mu\int_a^b u(t)\,dt - \nu\int_a^b v(t)\,dt + i\nu\int_a^b u(t)\,dt + i\mu\int_a^b v(t)\,dt \\
&= (\mu + i\nu)\Big(\int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt\Big) = \lambda\int_a^b f(t)\,dt.
\end{aligned}$$

□

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.7. *Έστω $f : [a, c] \to \mathbb{C}$ και $a < b < c$. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και στο $[b, c]$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, c]$ και*

$$\int_a^c f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τις $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$. Οι u, v είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$ και στο $[b, c]$, οπότε είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, c]$. Άρα η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, c]$ και

$$\begin{aligned}
\int_a^c f(t)\,dt &= \int_a^c u(t)\,dt + i\int_a^c v(t)\,dt \\
&= \int_a^b u(t)\,dt + \int_b^c u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt + i\int_b^c v(t)\,dt \\
&= \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt.
\end{aligned}$$

□

Η απόδειξη της Πρότασης 4.8 *δεν* είναι τετριμμένη.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.8. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Τότε η $|f| : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και*

$$\Big|\int_a^b f(t)\,dt\Big| \le \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

Ισχύει η ισότητα $|\int_a^b f(t)\,dt| = \int_a^b |f(t)|\,dt$ αν και μόνο αν υπάρχει μια ημιευθεία l με κορυφή το 0 ώστε να ισχύει $f(t) \in l$ για κάθε σημείο συνέχειας t της f.

Απόδειξη. Θεωρούμε τις $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$. Οι u, v είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$, οπότε η $|f| = \sqrt{u^2 + v^2}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Τώρα διακρίνουμε δυο περιπτώσεις.
(i) Αν $\int_a^b f(t)\,dt = 0$, τότε η ανισότητα $|\int_a^b f(t)\,dt| \le \int_a^b |f(t)|\,dt$ γίνεται $0 \le \int_a^b |f(t)|\,dt$ και είναι σωστή διότι ισχύει $|f(t)| \ge 0$ για κάθε $t \in [a, b]$.
(ii) Έστω $\int_a^b f(t)\,dt \ne 0$. Τότε θεωρούμε μια πολική αναπαράσταση του αριθμού $\int_a^b f(t)\,dt$, δηλαδή έστω

$$\int_a^b f(t)\,dt = \Big|\int_a^b f(t)\,dt\Big|(\cos\theta + i\sin\theta) = \Big|\int_a^b f(t)\,dt\Big|\,z,$$

όπου θ είναι μια οποιαδήποτε τιμή του ορίσματος του αριθμού $\int_a^b f(t)\,dt$ και όπου θέτουμε (για συντομία) $z = \cos\theta + i\sin\theta$. Παρατηρήστε ότι ο z έχει μέτρο

$$|z| = |\cos\theta + i\sin\theta| = 1.$$

Τώρα, είναι

$$\Big|\int_a^b f(t)\,dt\Big| = z^{-1}\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b (z^{-1}f(t))\,dt. \tag{4.6}$$

Παρατηρούμε ότι το αριστερό μέρος της (4.6) είναι πραγματικός αριθμός. Άρα και το δεξιό μέλος της (4.6) είναι πραγματικός αριθμός και, επομένως, είναι ίσος με το πραγματικό μέρος του! Άρα

$$\begin{aligned}
\Big|\int_a^b f(t)\,dt\Big| &= \operatorname{Re}\int_a^b (z^{-1}f(t))\,dt = \int_a^b \operatorname{Re}(z^{-1}f(t))\,dt \le \int_a^b |z^{-1}f(t)|\,dt \\
&= \int_a^b |f(t)|\,dt.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Τώρα έστω ότι ισχύει η ισότητα $|\int_a^b f(t)\,dt| = \int_a^b |f(t)|\,dt$.
Στην περίπτωση (i) έχουμε ότι $\int_a^b |f(t)|\,dt = 0$ και άρα ισχύει $|f(t)| = 0$ ή, ισοδύναμα, $f(t) = 0$ για κάθε σημείο συνέχειας $t \in [a, b]$ της f.
Στην περίπτωση (ii) από την (4.7) συνεπάγεται ότι ισχύει $|\int_a^b f(t)\,dt| = \int_a^b |f(t)|\,dt$ αν και μόνο αν ισχύει $\int_a^b \mathrm{Re}(z^{-1}f(t))\,dt = \int_a^b |z^{-1}f(t)|\,dt$ αν και μόνο αν ισχύει $\mathrm{Re}(z^{-1}f(t)) = |z^{-1}f(t)|$ για κάθε σημείο συνέχειας t της f. Η τελευταία ισότητα ισοδυναμεί με $\mathrm{Re}(z^{-1}f(t)) \geq 0$ και $\mathrm{Im}(z^{-1}f(t)) = 0$ και αυτό με το ότι το $z^{-1}f(t)$ είναι μη-αρνητικός πραγματικός αριθμός και αυτό με το ότι το $f(t)$ είναι μη-αρνητικό πραγματικό πολλαπλάσιο του σταθερού μιγαδικού z (με $|z| = 1$).
Άρα και στις δύο περιπτώσεις έχουμε ότι ισχύει $|\int_a^b f(t)\,dt| = \int_a^b |f(t)|\,dt$ αν και μόνο αν υπάρχει μια ημιευθεία l με κορυφή το 0 ώστε να ισχύει $f(t) \in l$ για κάθε σημείο συνέχειας t της f. $\square$

4.4 Επικαμπύλια ολοκληρώματα μιγαδικών συναρτήσεων.

Τέλος θα δούμε την επέκταση της έννοιας του ολοκληρώματος από το ολοκλήρωμα μιγαδικής συνάρτησης σε *διάστημα* του $\mathbb{R}$ στο ολοκλήρωμα μιγαδικής συνάρτησης σε *καμπύλη* του $\mathbb{C}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω καμπύλη $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$. Υπενθυμίζουμε ότι η γ είναι συνεχής στο $[a, b]$ και ότι υποθέτουμε, επιπλέον, ότι η γ είναι τμηματικά ομαλή στο $[a, b]$. Θεωρούμε, επίσης, $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ συνεχή στην τροχιά $\gamma^* = \{\gamma(t) \,|\, t \in [a, b]\}$. Τότε ορίζεται η $f \circ \gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ και είναι συνεχής στο $[a, b]$. Άρα η μιγαδική συνάρτηση $(f \circ \gamma)\gamma'$ είναι τμηματικά συνεχής στο $[a, b]$ και, επομένως, είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Τέλος, ορίζουμε το*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b (f \circ \gamma)(t)\gamma'(t)\,dt = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$$

*και το ονομάζουμε **επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f στην καμπύλη** γ.*
Συνήθως θα γράφουμε

$$\oint_\gamma f(z)\,dz$$

αν η γ είναι κλειστή καμπύλη.

Παράδειγμα 4.4.1. Έστω $z_0 \neq z_1$ και η $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ με τη συγκεκριμένη παραμετρική εξίσωση

$$z = \gamma(t) = \frac{b-t}{b-a}z_0 + \frac{t-a}{b-a}z_1, \qquad t \in [a, b]$$

που την έχουμε δει αρκετές φορές μέχρι τώρα. Τότε $\gamma^* = [z_0, z_1]$ και, αν η $f : [z_0, z_1] \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής στο $[z_0, z_1]$, τότε ορίζεται το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\gamma f(z)\,dz$ και το συμβολίζουμε $\int_{[z_0,z_1]} f(z)\,dz$. Δηλαδή,

$$\int_{[z_0,z_1]} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz = \frac{z_1 - z_0}{b-a}\int_a^b f\Big(\frac{b-t}{b-a}z_0 + \frac{t-a}{b-a}z_1\Big)\,dt.$$

Θα λέμε ότι αυτό είναι **το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f κατά μήκος του ευθ. τμήματος** $[z_0, z_1]$ **με φορά από το z_0 προς το z_1.**

Παράδειγμα 4.4.2. Έστω z_0 και $r > 0$. Θεωρούμε τη γνωστή μας $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ με παραμετρική εξίσωση

$$z = \gamma(t) = z_0 + r(\cos t + i\sin t), \qquad t \in [0, 2\pi],$$

οπότε $\gamma^* = C(z_0; r)$. Αν η $f : C(z_0; r) \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής στον κύκλο $C(z_0; r)$, τότε ορίζεται το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\oint_\gamma f(z)\,dz$ και το συμβολίζουμε $\oint_{C(z_0;r)} f(z)\,dz$. Δηλαδή,

$$\oint_{C(z_0;r)} f(z)\,dz = \oint_\gamma f(z)\,dz = ir\int_0^{2\pi} f\big(z_0 + r(\cos t + i\sin t)\big)(\cos t + i\sin t)\,dt.$$

Θα λέμε ότι αυτό είναι **το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f κατά μήκος του κύκλου $C(z_0; r)$ με τη θετική φορά του.**

Παράδειγμα 4.4.3. Έστω z_0 και $r > 0$ και A, B δυο διαφορετικά σημεία του κύκλου $C(z_0; r)$. Τότε $A = z_0 + r(\cos t_1 + i \sin t_1)$ για κάποιον $t_1 \in \mathbb{R}$ και $B = z_0 + r(\cos t_2 + i \sin t_2)$ για έναν μοναδικό t_2 ώστε $t_1 < t_2 < t_1 + 2\pi$. Θεωρούμε την $\gamma : [t_1, t_2] \to \mathbb{C}$ με παραμετρική εξίσωση

$$z = \gamma(t) = z_0 + r(\cos t + i \sin t), \qquad t \in [t_1, t_2].$$

Καθώς ο t αυξάνεται στο διάστημα $[t_1, t_2]$ το σημείο $\gamma(t)$ διατρέχει με τη θετική φορά περιστροφής γύρω από το κέντρο z_0 ένα συγκεκριμένο τόξο (από τα δύο) του $C(z_0; r)$ με αρχή το άκρο A και τέλος το άκρο B. Αν η f είναι συνεχής στο τόξο αυτό, τότε ορίζεται το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\gamma f(z)\, dz$ και το συμβολίζουμε

$$\int_{\mathrm{arc}(A,B)} f(z)\, dz = \int_\gamma f(z)\, dz = ir \int_{t_1}^{t_2} f\big(z_0 + r(\cos t + i \sin t)\big)(\cos t + i \sin t)\, dt.$$

Θα λέμε ότι αυτό είναι **το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f κατά μήκος του τόξου $\mathrm{arc}(A, B)$ με τη θετική φορά του.**

Θα δούμε τώρα πώς συμπεριφέρονται τα επικαμπύλια ολοκληρώματα σε σχέση με τις τρεις πράξεις καμπυλών: αναπαραμετρικοποίηση καμπύλης, άθροισμα καμπυλών, αντίθετη καμπύλη.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.9. *Έστω καμπύλες $\gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{C}$ και $\gamma_2 : [c, d] \to \mathbb{C}$ και έστω ότι η γ_2 είναι αναπαραμετρικοποίηση της γ_1. Έστω $f : {\gamma_1}^* = {\gamma_2}^* \to \mathbb{C}$ συνεχής. Τότε*

$$\int_{\gamma_2} f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz.$$

Απόδειξη. Έστω αλλαγή παραμέτρου $\sigma : [c, d] \to [a, b]$ ώστε $\gamma_2(s) = \gamma_1(\sigma(s))$ για κάθε $s \in [c, d]$. Τότε, με μια αλλαγή μεταβλητής $t = \sigma(s)$ στα ολοκληρώματα, έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2} f(z)\, dz &= \int_c^d f(\gamma_2(s)){\gamma_2}'(s)\, ds = \int_c^d f(\gamma_1(\sigma(s))){\gamma_1}'(\sigma(s))\sigma'(s)\, ds \\ &= \int_a^b f(\gamma_1(t)){\gamma_1}'(t)\, dt = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz.\end{aligned}$$

□

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.10. *Έστω $\gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{C}$ και $\gamma_2 : [b, c] \to \mathbb{C}$ δυο καμπύλες ώστε $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ και $f : {\gamma_1}^* \cup {\gamma_2}^* \to \mathbb{C}$ συνεχής. Τότε*

$$\int_{\gamma_1 \dot{+} \gamma_2} f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz + \int_{\gamma_2} f(z)\, dz.$$

Απόδειξη. Η f είναι συνεχής στην τροχιά $(\gamma_1 \dot{+} \gamma_2)^* = {\gamma_1}^* \cup {\gamma_2}^*$ της καμπύλης $\gamma_1 \dot{+} \gamma_2$. Άρα ορίζεται το $\int_{\gamma_1 \dot{+} \gamma_2} f(z)\, dz$ και είναι

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1 \dot{+} \gamma_2} f(z)\, dz &= \int_a^c f\big((\gamma_1 \dot{+} \gamma_2)(t)\big)(\gamma_1 \dot{+} \gamma_2)'(t)\, dt \\ &= \int_a^b f(\gamma_1(t)){\gamma_1}'(t)\, dt + \int_b^c f(\gamma_2(t)){\gamma_2}'(t)\, dt \\ &= \int_{\gamma_1} f(z)\, dz + \int_{\gamma_2} f(z)\, dz.\end{aligned}$$

Στην δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήθηκε η Πρόταση 4.7. □

Παράδειγμα 4.4.4. Έστω z_0, z_1, z_2 διαφορετικά ανά δύο ώστε το σημείο z_1 να ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα $[z_0, z_2]$. Θεωρούμε την $\gamma : [a, c] \to \mathbb{C}$ με παραμετρική εξίσωση

$$z = \gamma(t) = \frac{c-t}{c-a} z_0 + \frac{t-a}{c-a} z_2, \qquad t \in [a, c].$$

Είναι σαφές ότι υπάρχει b στο $[a, c]$ ώστε $\gamma(b) = z_1$. Μάλιστα, μπορούμε να υπολογίσουμε $b = \frac{z_2-z_1}{z_2-z_0} a + \frac{z_1-z_0}{z_2-z_0} c$. Τώρα, θεωρούμε τις $\gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{C}$ και $\gamma_2 : [b, c] \to \mathbb{C}$ με παραμετρικές εξισώσεις

$$z = \gamma_1(t) = \frac{b-t}{b-a} z_0 + \frac{t-a}{b-a} z_1, \quad t \in [a, b] \qquad z = \gamma_2(t) = \frac{c-t}{c-b} z_1 + \frac{t-b}{c-b} z_2, \quad t \in [b, c].$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι $\gamma(t) = \gamma_1(t)$ για κάθε $t \in [a, b]$ και $\gamma(t) = \gamma_2(t)$ για κάθε $t \in [b, c]$. Δηλαδή,

$$\gamma = \gamma_1 \dot{+} \gamma_2.$$

Άρα, αν η f είναι συνεχής στο ευθ. τμήμα $[z_0, z_2]$, τότε $\int_\gamma f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz + \int_{\gamma_2} f(z)\, dz$ και με το συμβολισμό του παραδείγματος 4.4.1 αυτό γράφεται

$$\int_{[z_0,z_2]} f(z)\, dz = \int_{[z_0,z_1]} f(z)\, dz + \int_{[z_1,z_2]} f(z)\, dz.$$

Παράδειγμα 4.4.5. Έστω z_0, z_1, z_2 διαφορετικά ανά δύο. Αν

$$\Delta(z_0, z_1, z_2)$$

είναι το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία z_0, z_1, z_2, τότε

$$\operatorname{bd} \Delta(z_0, z_1, z_2) = [z_0, z_1] \cup [z_1, z_2] \cup [z_2, z_0].$$

Αν θεωρήσουμε την καμπύλη γ_1 η οποία διαγράφει το ευθ. τμήμα $[z_0, z_1]$ με φορά από z_0 προς z_1, την καμπύλη γ_2 η οποία διαγράφει το ευθ. τμήμα $[z_1, z_2]$ με φορά από z_1 προς z_2 και την καμπύλη γ_3 η οποία διαγράφει το ευθ. τμήμα $[z_2, z_0]$ με φορά από z_2 προς z_0 και, αν η f είναι συνεχής στο $\operatorname{bd} \Delta(z_0, z_1, z_2)$, τότε, με τα σύμβολα στο παράδειγμα 4.4.1,

$$\int_{[z_0,z_1]} f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz, \;\; \int_{[z_1,z_2]} f(z)\, dz = \int_{\gamma_2} f(z)\, dz, \;\; \int_{[z_2,z_0]} f(z)\, dz = \int_{\gamma_3} f(z)\, dz.$$

Τώρα, η κλειστή καμπύλη $\gamma = \gamma_1 \dot{+} \gamma_2 \dot{+} \gamma_3$ διαγράφει το $\operatorname{bd} \Delta(z_0, z_1, z_2)$ με φορά από το z_0 στο z_1 στο z_2 και πίσω στο z_0. Άρα ορίζεται το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\oint_\gamma f(z)\, dz$ και το συμβολίζουμε

$$\oint_{\operatorname{bd} \Delta(z_0,z_1,z_2)} f(z)\, dz = \oint_\gamma f(z)\, dz.$$

Τώρα, λόγω της $\oint_\gamma f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz + \int_{\gamma_2} f(z)\, dz + \int_{\gamma_3} f(z)\, dz$, συνεπάγεται

$$\oint_{\operatorname{bd} \Delta(z_0,z_1,z_2)} f(z)\, dz = \int_{[z_0,z_1]} f(z)\, dz + \int_{[z_1,z_2]} f(z)\, dz + \int_{[z_2,z_0]} f(z)\, dz.$$

Παράδειγμα 4.4.6. Έστω z_0 και $r > 0$ και τρία διαφορετικά σημεία A, B, C του κύκλου $C(z_0; r)$. Υποθέτουμε ότι το B ανήκει στο τόξο $\operatorname{arc}(A, C)$ το οποίο διαγράφεται με τη θετική φορά περιστροφής γύρω από το κέντρο z_0 με αρχή το A και τέλος το C. Αν θεωρήσουμε την καμπύλη γ_1 η οποία διαγράφει το τόξο $\operatorname{arc}(A, B)$ με τη θετική φορά από το A προς το B και την καμπύλη γ_2 η οποία διαγράφει το τόξο $\operatorname{arc}(B, C)$ με τη θετική φορά από το B προς το C, τότε η καμπύλη $\gamma = \gamma_1 \dot{+} \gamma_2$ διαγράφει το τόξο $\operatorname{arc}(A, C)$ με τη θετική φορά από το A προς το C. Άρα, αν η f είναι συνεχής στο τόξο $\operatorname{arc}(A, C)$, τότε $\int_\gamma f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz + \int_{\gamma_2} f(z)\, dz$ και, επομένως, βάσει του συμβολισμού στο παράδειγμα 4.4.3, έχουμε

$$\int_{\operatorname{arc}(A,C)} f(z)\, dz = \int_{\operatorname{arc}(A,B)} f(z)\, dz + \int_{\operatorname{arc}(B,C)} f(z)\, dz.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.11. *Έστω καμπύλη $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ και $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ συνεχής. Τότε*

$$\int_{-\gamma} f(z)\,dz = -\int_{\gamma} f(z)\,dz.$$

Απόδειξη. Η f είναι συνεχής στην τροχιά $(-\gamma)^* = \gamma^*$. Άρα ορίζεται το $\int_{-\gamma} f(z)\,dz$ και, με μια απλή αλλαγή μεταβλητής, είναι

$$\begin{aligned}\int_{-\gamma} f(z)\,dz &= \int_a^b f((-\gamma)(t))(-\gamma)'(t)\,dt = -\int_a^b f(\gamma(a+b-t))\gamma'(a+b-t)\,dt \\ &= \int_b^a f(\gamma(s))\gamma'(s)\,ds = -\int_a^b f(\gamma(s))\gamma'(s)\,ds = -\int_{\gamma} f(z)\,dz.\end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 4.4.7. Έστω $z_0 \neq z_1$ και γ μια καμπύλη η οποία διαγράφει το ευθ. τμήμα $[z_0, z_1]$ από το z_0 προς το z_1. Τότε η καμπύλη $-\gamma$ διαγράφει το ίδιο ευθ. τμήμα από το z_1 προς το z_0. Βάσει του συμβολισμού του παραδείγματος 4.4.1, είναι

$$\int_{[z_0,z_1]} f(z)\,dz = \int_{\gamma} f(z)\,dz, \qquad \int_{[z_1,z_0]} f(z)\,dz = \int_{-\gamma} f(z)\,dz.$$

Άρα

$$\int_{[z_1,z_0]} f(z)\,dz = -\int_{[z_0,z_1]} f(z)\,dz.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.12. *Έστω καμπύλη $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ και $f_1, f_2 : \gamma^* \to \mathbb{C}$ συνεχείς. Τότε*

$$\int_{\gamma} (f_1(z) + f_2(z))\,dz = \int_{\gamma} f_1(z)\,dz + \int_{\gamma} f_2(z)\,dz.$$

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι απλή.

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} (f_1(z) + f_2(z))\,dz &= \int_a^b (f_1(\gamma(t)) + f_2(\gamma(t)))\gamma'(t)\,dt \\ &= \int_a^b f_1(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt + \int_a^b f_2(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt \\ &= \int_{\gamma} f_1(z)\,dz + \int_{\gamma} f_2(z)\,dz.\end{aligned}$$

Στην δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήθηκε η Πρόταση 4.5. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.13. *Έστω αριθμός λ, καμπύλη $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ και $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ συνεχής. Τότε*

$$\int_{\gamma} \lambda f(z)\,dz = \lambda \int_{\gamma} f(z)\,dz.$$

Απόδειξη.

$$\int_{\gamma} \lambda f(z)\,dz = \int_a^b \lambda f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \lambda \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \lambda \int_{\gamma} f(z)\,dz.$$

Στην δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήθηκε η Πρόταση 4.6. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.14. *Έστω καμπύλη $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ και $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ συνεχής και έστω ότι ισχύει $|f(z)| \leq M$ για κάθε $z \in \gamma^*$. Τότε*

$$\Big| \int_{\gamma} f(z)\,dz \Big| \leq M \,\text{μήκος}\, \gamma.$$

Απόδειξη.

$$\Big|\int_\gamma f(z)\,dz\Big| = \Big|\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt\Big| \le \int_a^b |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|\,dt \le M\int_a^b |\gamma'(t)|\,dt$$
$$= M \text{ μήκος } \gamma.$$

Στην πρώτη ανισότητα χρησιμοποιήθηκε η Πρόταση 4.8. □

Ασκήσεις.

4.4.1. Υπολογίστε το $\int_\gamma |z|\,dz$, όπου γ είναι οποιαδήποτε από τις παρακάτω τρεις καμπύλες με αρχικό άκρο το $-i$ και τελικό άκρο το i.
[α] $\gamma_1(t) = it$ για $t \in [-1, 1]$.
[β] $\gamma_2(t) = \cos t + i \sin t$ για $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
[γ] $\gamma_3(t) = -\cos t + i \sin t$ για $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
Σχεδιάστε τις τροχιές των τριών καμπυλών και τις φορές διαγραφής τους.

4.4.2. Έστω A, B διαφορετικά σημεία του κύκλου $C(z_0; r)$ και $f : C(z_0; r) \to \mathbb{C}$ συνεχής. Ποιά είναι η σχέση ανάμεσα στα επικαμπύλια ολοκληρώματα $\int_{\mathrm{arc}(A,B)} f(z)\,dz$, $\int_{\mathrm{arc}(B,A)} f(z)\,dz$ και $\int_{-\,\mathrm{arc}(A,B)} f(z)\,dz$;

4.4.3. Έστω z_0, z_1, z_2 διαφορετικά ανά δύο και $f : \mathrm{bd}\,\Delta(z_0, z_1, z_2) \to \mathbb{C}$ συνεχής. Θεωρούμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\oint_{\mathrm{bd}\,\Delta(z_0,z_1,z_2)} f(z)\,dz$ καθώς και τα υπόλοιπα πέντε που προκύπτουν από αυτό με τις διάφορες αναδιατάξεις των z_0, z_1, z_2. Πόσες είναι οι πιθανές τιμές αυτών των επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων;

4.4.4. Έστω f συνεχής στον δακτύλιο $R(0; 0, r_0) = \{z \,|\, 0 < |z| < r_0\}$ ή στον $R(0; r_0, +\infty) = \{z \,|\, r_0 < |z| < +\infty\}$. Ορίζουμε $M(r) = \max\{|f(z)| \,|\, |z| = r\}$ και υποθέτουμε ότι $rM(r) \to 0$ καθώς $r \to 0+$ ή $r \to +\infty$, αντιστοίχως. Αν $\gamma_r(t) = r(\cos t + i \sin t)$ για $t_1 \le t \le t_2$, τότε αποδείξτε ότι $\int_{\gamma_r} f(z)\,dz \to 0$ καθώς $r \to 0+$ ή $r \to +\infty$, αντιστοίχως.

Κεφάλαιο 5

Αναλυτικές συναρτήσεις.

5.1 Παράγωγος και αναλυτικές συναρτήσεις.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω $f : A \to \mathbb{C}$ και z_0 εσωτερικό σημείο του A. Λέμε ότι η f είναι **παραγωγίσιμη** στο z_0 αν υπάρχει το όριο $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ και είναι μιγαδικός αριθμός. Το όριο αυτό, αν υπάρχει, το ονομάζουμε **παράγωγο** της f στο z_0 και το συμβολίζουμε*

$$f'(z_0) = \frac{df}{dz}(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}.$$

Παράδειγμα 5.1.1. Έστω οποιαδήποτε σταθερή συνάρτηση c στο $\mathbb{C}$. Τότε, για κάθε z_0 είναι

$$\frac{dc}{dz}(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{c-c}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0} 0 = 0.$$

Άρα μια σταθερή συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του $\mathbb{C}$ και η παράγωγός της είναι η σταθερή συνάρτηση 0 στο $\mathbb{C}$.

Παράδειγμα 5.1.2. Έστω η ταυτοτική συνάρτηση z στο $\mathbb{C}$. Τότε, για κάθε z_0 είναι

$$\frac{dz}{dz}(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{z-z_0}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0} 1 = 1.$$

Άρα η ταυτοτική συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του $\mathbb{C}$ και η παράγωγός της είναι η σταθερή συνάρτηση 1 στο $\mathbb{C}$.

Παράδειγμα 5.1.3. Έστω η συνάρτηση z^2 στο $\mathbb{C}$. Τότε, για κάθε z_0 είναι

$$\frac{dz^2}{dz}(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{z^2-{z_0}^2}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0} (z+z_0) = 2z_0.$$

Άρα η z^2 είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του $\mathbb{C}$ και η παράγωγός της είναι η συνάρτηση $2z$ στο $\mathbb{C}$.

Βλέπουμε ότι όχι μόνο ο ορισμός της παραγώγου μιγαδικής συνάρτησης μιας μιγαδικής μεταβλητής είναι εντελώς όμοιος με τον ορισμό της παραγώγου πραγματικής συνάρτησης μιας πραγματικής μεταβλητής αλλά το ίδιο όμοιος είναι και ο χειρισμός παραδειγμάτων. Θυμηθείτε από τον Απειροστικό Λογισμό: $\frac{dc}{dx} = 0$, $\frac{dx}{dx} = 1$, $\frac{dx^2}{dx} = 2x$. Θα δούμε ότι αυτή η ομοιότητα υπάρχει σε πολλά αποτελέσματα.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.1. *Έστω ότι η $f : A \to \mathbb{C}$ είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό σημείο z_0 του A. Τότε η f είναι συνεχής στο z_0.*

Απόδειξη. Είναι

$$f(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}(z - z_0) + f(z_0) \qquad \text{για } z \in A, z \neq z_0.$$

Επειδή $f'(z_0) \in \mathbb{C}$, συνεπάγεται

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f'(z_0) \cdot 0 + f(z_0) = f(z_0).$$

Άρα η f είναι συνεχής στον z_0. □

Η Πρόταση 5.2 περιέχει τους αλγεβρικούς κανόνες παραγώγισης.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.2. *Έστω ότι οι $f, g : A \to \mathbb{C}$ είναι παραγωγίσιμες στο εσωτερικό σημείο z_0 του A. Τότε οι $f+g, f-g, fg : A \to \mathbb{C}$ είναι παραγωγίσιμες στο z_0. Επίσης, αν $g(z) \neq 0$ για κάθε $z \in A$, τότε και η $\frac{f}{g} : A \to \mathbb{C}$ είναι παραγωγίσιμη στο z_0. Τέλος,*

$$(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0), \qquad (f-g)'(z_0) = f'(z_0) - g'(z_0),$$

$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0), \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g^2(z_0)}.$$

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι ταυτόσημη με την απόδειξη των ανάλογων αποτελεσμάτων για πραγματικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής. □

Στην Πρόταση 5.3 έχουμε τον κανόνα αλυσίδας.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.3. *Έστω ότι η $f : A \to B$ είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό σημείο z_0 του A και ότι η $g : B \to \mathbb{C}$ είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό σημείο $w_0 = f(z_0)$ του B. Τότε η $g \circ f : A \to \mathbb{C}$ είναι παραγωγίσιμη στο z_0. Επίσης,*

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(w_0)f'(z_0).$$

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι ταυτόσημη με την απόδειξη του ανάλογου αποτελέσματος για πραγματικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής. □

Παράδειγμα 5.1.4. Βάσει της Πρότασης 5.2 και των παραδειγμάτων των σταθερών συναρτήσεων και της ταυτοτικής συνάρτησης, μπορούμε να αποδείξουμε εύκολα ότι κάθε πολυωνυμική συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του $\mathbb{C}$ και ότι η παράγωγος είναι κι αυτή πολυωνυμική συνάρτηση: αν $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$, τότε $p'(z) = a_1 + 2a_2 z + \cdots + n a_n z^{n-1}$.

Παράδειγμα 5.1.5. Κάθε ρητή συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της και η παράγωγός της είναι κι αυτή ρητή συνάρτηση.

Παράδειγμα 5.1.6. Αν $h(z) = (z^2 - 3z + 2)^{15} - 3(z^2 - 3z + 2)^2$, τότε, από τον κανόνα αλυσίδας, $h'(z) = \big(15(z^2 - 3z + 2)^{14} - 6(z^2 - 3z + 2)\big)(2z - 3)$.

Τέλος έχουμε τον κανόνα αντίστροφης συνάρτησης.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.4. *Έστω ότι η $f : A \to B$ είναι ένα-προς-ένα στο A και επί του B, οπότε ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : B \to A$. Έστω ότι το z_0 είναι εσωτερικό σημείο του A και ότι το $w_0 = f(z_0)$ είναι εσωτερικό σημείο του B. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο z_0 και $f'(z_0) \neq 0$ και η f^{-1} είναι συνεχής στο w_0, τότε η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο w_0 και*

$$(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

Απόδειξη. Γράφουμε $w = f(z)$ και $z = f^{-1}(w)$ και σκεφτόμαστε ότι, επειδή η f^{-1} είναι συνεχής στο w_0, ισχύει $z = f^{-1}(w) \to f^{-1}(w_0) = z_0$ καθώς $w \to w_0$. Επομένως:

$$\lim_{w\to w_0} \frac{f^{-1}(w) - f^{-1}(w_0)}{w - w_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}} = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

Άρα η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο w_0 και $(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}$. □

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω $f : A \to \mathbb{C}$ και z_0 εσωτερικό σημείο του A. Η f χαρακτηρίζεται* ***αναλυτική*** *στο z_0 αν υπάρχει $r > 0$ ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του $D(z_0; r)$ (και, επομένως, $D(z_0; r) \subseteq A$).*

Παρατηρήστε ότι η έννοια της αναλυτικότητας είναι ισχυρότερη από την έννοια της παραγωγισιμότητας: για να είναι αναλυτική η συνάρτηση σε ένα σημείο πρέπει να είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό αλλά και σε όλα τα γειτονικά σημεία.

Παράδειγμα 5.1.7. Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση είναι αναλυτική σε κάθε σημείο του $\mathbb{C}$.

Παράδειγμα 5.1.8. Κάθε ρητή συνάρτηση είναι αναλυτική σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της. Πράγματι, έστω η ρητή συνάρτηση $r = \frac{p}{q}$ και έστω $z_1, \dots, z_s$ οι ρίζες του πολυωνύμου q, οπότε το πεδίο ορισμού της r είναι το $A = \mathbb{C}\setminus\{z_1, \dots, z_s\}$. Γνωρίζουμε ότι η r είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του A και παρατηρούμε ότι το A είναι ανοικτό σύνολο. Τότε για κάθε $z_0 \in A$ υπάρχει $r > 0$ ώστε $D(z_0; r) \subseteq A$, οπότε η r είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του $D(z_0; r)$ και, επομένως, η r είναι αναλυτική στο z_0.

Παράδειγμα 5.1.9. Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με τύπο $f(z) = \overline{z}$. Θεωρούμε οποιοδήποτε z_0 και θα αποδείξουμε ότι το

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{\overline{z} - \overline{z_0}}{z - z_0}$$

δεν υπάρχει, οπότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο z_0.
Αν υπάρχει το όριο του $\frac{\overline{z}-\overline{z_0}}{z-z_0}$ καθώς το z πλησιάζει το z_0, τότε θα υπάρχει *και θα έχει την ίδια τιμή* και το όριο του $\frac{\overline{z}-\overline{z_0}}{z-z_0}$ καθώς το z πλησιάζει το z_0 *πάνω στην οριζόντια ευθεία που διέρχεται από το* z_0 και, επίσης, θα υπάρχει *και θα έχει την ίδια τιμή* και το όριο του $\frac{\overline{z}-\overline{z_0}}{z-z_0}$ καθώς το z πλησιάζει το z_0 *πάνω στην κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από το* z_0. Αν $z_0 = x_0 + iy_0$, τότε το πρώτο από τα δυο αυτά όρια είναι

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\overline{(x + iy_0)} - \overline{(x_0 + iy_0)}}{(x + iy_0) - (x_0 + iy_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} 1 = 1$$

και το δεύτερο όριο είναι

$$\lim_{y\to y_0} \frac{\overline{(x_0 + iy)} - \overline{(x_0 + iy_0)}}{(x_0 + iy) - (x_0 + iy_0)} = \lim_{y\to y_0} \frac{-iy + iy_0}{iy - iy_0} = \lim_{y\to y_0} (-1) = -1.$$

Επειδή τα δυο αυτά όρια δεν είναι ίσα, συνεπάγεται ότι δεν υπάρχει το $\lim_{z\to z_0} \frac{\overline{z}-\overline{z_0}}{z-z_0}$ και, επομένως, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο z_0. Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη σε κανένα σημείο, οπότε δεν είναι αναλυτική σε κανένα σημείο.

Παράδειγμα 5.1.10. Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με τύπο $f(z) = |z|^2$.
Είναι

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z\to 0} \frac{|z|^2}{z} = \lim_{z\to 0} \overline{z} = 0.$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και $f'(0) = 0$.
Θεωρούμε οποιοδήποτε $z_0 \neq 0$ και θα αποδείξουμε ότι το

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{|z|^2 - |z_0|^2}{z - z_0}$$

δεν υπάρχει, οπότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο z_0.
Αν υπάρχει το όριο του $\frac{|z|^2-|z_0|^2}{z-z_0}$ καθώς το z πλησιάζει το z_0, τότε θα υπάρχει *και θα έχει την ίδια τιμή* και το όριο του $\frac{|z|^2-|z_0|^2}{z-z_0}$ καθώς το z πλησιάζει το z_0 *πάνω στην οριζόντια ευθεία που διέρχεται από το* z_0 και, επίσης, θα υπάρχει *και θα έχει την ίδια τιμή* και το όριο του $\frac{|z|^2-|z_0|^2}{z-z_0}$ καθώς το z πλησιάζει το z_0 *πάνω στην κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από το* z_0. Αν $z_0 = x_0 + iy_0$, τότε το πρώτο από τα δυο αυτά όρια είναι

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|x+iy_0|^2 - |x_0+iy_0|^2}{(x+iy_0)-(x_0+iy_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0{}^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0$$

και το δεύτερο όριο είναι

$$\lim_{y \to y_0} \frac{|x_0+iy|^2 - |x_0+iy_0|^2}{(x_0+iy)-(x_0+iy_0)} = \lim_{y \to y_0} \frac{y^2 - y_0{}^2}{iy - iy_0} = -i \lim_{y \to y_0} (y + y_0) = -2iy_0.$$

Επειδή $z_0 \neq 0$, τα δυο αυτά όρια δεν είναι ίσα. Άρα δεν υπάρχει το $\lim_{z \to z_0} \frac{|z|^2-|z_0|^2}{z-z_0}$ και, επομένως, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο z_0. Άρα η f είναι παραγωγίσιμη μόνο στο 0, οπότε δεν είναι αναλυτική σε κανένα σημείο.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Το σύνολο των σημείων στα οποία η f είναι αναλυτική ονομάζεται* ***σύνολο αναλυτικότητας*** *της f.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.5. *Έστω $f : A \to \mathbb{C}$ και έστω $B \subseteq A$ το σύνολο των σημείων στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Τότε το σύνολο αναλυτικότητας της f είναι το εσωτερικό του B. Ειδικώτερα, το σύνολο αναλυτικότητας της f είναι ανοικτό σύνολο.*

Απόδειξη. Έστω U το σύνολο αναλυτικότητας της f.
Αν $z \in U$, τότε υπάρχει $r > 0$ ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του $D(z; r)$, οπότε $D(z; r) \subseteq B$. Άρα το z είναι εσωτερικό σημείο του B, δηλαδή $z \in \operatorname{int} B$.
Αντιστρόφως, αν $z \in \operatorname{int} B$, τότε υπάρχει $r > 0$ ώστε $D(z; r) \subseteq B$, οπότε η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του $D(z; r)$. Άρα η f είναι αναλυτική στο z, δηλαδή $z \in U$.
Άρα $U = \operatorname{int} B$. □

Παράδειγμα 5.1.11. Το σύνολο αναλυτικότητας κάθε πολυωνυμικής συνάρτησης είναι το $\mathbb{C}$.

Παράδειγμα 5.1.12. Το σύνολο αναλυτικότητας κάθε ρητής συνάρτησης είναι το πεδίο ορισμού της.

Παράδειγμα 5.1.13. Όπως είδαμε στα παραδείγματα 5.1.9 και 5.1.10, το σύνολο αναλυτικότητας της $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με τύπο $f(z) = \overline{z}$ καθώς και της $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με τύπο $f(z) = |z|^2$ είναι το κενό σύνολο.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω $f : A \to \mathbb{C}$ και ανοικτό σύνολο $\Omega \subseteq A$. Η f χαρακτηρίζεται* ***αναλυτική στο*** *Ω αν είναι αναλυτική σε κάθε σημείο του Ω η, ισοδύναμα, αν το Ω περιέχεται στο σύνολο αναλυτικότητας της f.*

Προφανώς, το μεγαλύτερο ανοικτό σύνολο Ω στο οποίο η f είναι αναλυτική είναι το σύνολο αναλυτικότητας της f. Επίσης, είναι σαφές ότι, *αν η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο ενός ανοικτού συνόλου Ω, τότε η f είναι αναλυτική στο* Ω. Πράγματι, για κάθε $z \in \Omega$ υπάρχει $r > 0$ ώστε $D(z; r) \subseteq \Omega$. Η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του $D(z; r)$, οπότε είναι αναλυτική στο z. Δηλαδή, η f είναι αναλυτική σε κάθε σημείο του Ω, οπότε είναι αναλυτική στο Ω.

Ας δούμε τώρα και την έννοια της παραγωγισιμότητας στο ∞.

Έστω $A \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ και έστω ότι το ∞ είναι εσωτερικό σημείο του A. Δηλαδή υπάρχει $r > 0$ ώστε η r-περιοχή $D(\infty; r)$ του ∞ να περιέχεται στο A:

$$D(\infty; r) = \left\{ z \,\middle|\, |z| > \frac{1}{r} \right\} \cup \{\infty\} \subseteq A.$$

Θεωρούμε το σύνολο

$$A^* = \Big\{w \,\Big|\, \frac{1}{w} \in A\Big\} \cup \{0\}.$$

Είναι προφανές ότι η r-περιοχή $D(0;r)$ του 0 περιέχεται στο A^*:

$$D(0;r) = \{w \mid |w| < r\} \subseteq A^*.$$

Επομένως, το 0 είναι εσωτερικό σημείο του A^*.

Αν θεωρήσουμε και μια συνάρτηση $f : A \to \widehat{\mathbb{C}}$ ορισμένη στο A τότε μπορούμε να ορίσουμε την σύνθεση της f με την $z = \frac{1}{w}$ ορισμένη στο A^*, δηλαδή την $f^* : A^* \to \widehat{\mathbb{C}}$ με τύπο

$$f^*(w) = \begin{cases} f(\frac{1}{w}), & \text{αν } w \in A^* \setminus \{0\} \\ f(\infty), & \text{αν } w = 0 \end{cases}$$

Παρατηρήστε ότι για τα σημεία z, w που συνδέονται με την $w = \frac{1}{z}$ ισχύει: $z \to \infty$ αν και μόνο αν $w \to 0$. Επομένως, η f^* είναι συνεχής στο 0 αν και μόνο αν η f είναι συνεχής στο ∞:

$$\lim_{w\to 0} f^*(w) = f^*(0) \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{z\to\infty} f(z) = f(\infty).$$

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω $f : A \to \mathbb{C}$ και $A \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ και έστω ότι το ∞ είναι εσωτερικό σημείο του A. Τότε λέμε ότι η f είναι* **παραγωγίσμη** *στο ∞ αν η $f^* : A^* \to \mathbb{C}$ είναι παραγωγίσιμη στο 0.*

Σχόλιο. Παρατηρήστε ότι περιοριζόμαστε σε συναρτήσεις που δεν έχουν το ∞ ως τιμή τους.

Το ότι η f^* είναι παραγωγίσιμη στο 0 σημαίνει ότι υπάρχει το $f^{*'}(0) = \lim_{w\to 0} \frac{f^*(w)-f^*(0)}{w-0}$ και είναι μιγαδικός αριθμός ή, ισοδύναμα, ότι

$$\lim_{z\to\infty} z(f(z) - f(\infty)) \in \mathbb{C}.$$

Προφανώς, θα λέμε ότι η f είναι **αναλυτική** στο ∞ αν είναι παραγωγίσιμη στο ∞ αλλά και σε κάθε σημείο μιας περιοχής $D(\infty; r)$ του ∞.

Παράδειγμα 5.1.14. Αν p είναι πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού ≥ 1, τότε είναι $p(\infty) = \infty$, οπότε η p δεν είναι παραγωγίσιμη στο ∞.
Αν η πολυωνυμική συνάρτηση p είναι βαθμού $= 0$, τότε είναι σταθερή: $p(z) = a_0$ για κάθε $z \in \widehat{\mathbb{C}}$.
Άρα

$$\lim_{z\to\infty} z(p(z) - p(\infty)) = \lim_{z\to\infty} 0 = 0,$$

οπότε η p είναι αναλυτική και στο ∞.

Παράδειγμα 5.1.15. Έστω ρητή συνάρτηση $r(z) = \frac{a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0}{b_m z^m + \cdots + b_1 z + b_0}$ με $a_n, b_m \neq 0$.
Αν $n > m$, τότε $r(\infty) = \infty$, οπότε η r δεν είναι παραγωγίσιμη στο ∞.
Αν $n < m$, τότε $r(\infty) = 0$ και

$$\lim_{z\to\infty} z(r(z) - r(\infty)) = \lim_{z\to\infty} zr(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{a_n z^{n+1} + \cdots + a_1 z^2 + a_0 z}{b_m z^m + \cdots + b_1 z + b_0} \in \mathbb{C},$$

διότι $n + 1 \leq m$.
Αν $n = m$, τότε $r(\infty) = \frac{a_n}{b_n}$ και

$$\begin{aligned}\lim_{z\to\infty} z(r(z) - r(\infty)) &= \lim_{z\to\infty} z\Big(\frac{a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0}{b_n z^n + \cdots + b_1 z + b_0} - \frac{a_n}{b_n}\Big) \\ &= \lim_{z\to\infty} z\frac{(a_{n-1}b_n - a_n b_{n-1})z^{n-1} + \cdots + (a_1 b_n - a_n b_1)z + (a_0 b_n - a_n b_0)}{b_n z^n + \cdots + b_1 z + b_0} \\ &= \lim_{z\to\infty} \frac{(a_{n-1}b_n - a_n b_{n-1})z^n + \cdots + (a_1 b_n - a_n b_1)z^2 + (a_0 b_n - a_n b_0)z}{b_n z^n + \cdots + b_1 z + b_0} \in \mathbb{C}.\end{aligned}$$

Άρα όταν $n \leq m$ η r είναι αναλυτική και στο ∞.

Ασκήσεις.

5.1.1. Ελέγξτε την παραγωγισιμότητα των συναρτήσεων $\mathrm{Re}\, z$, $\mathrm{Im}\, z$ και $|z|$ στα σημεία του $\mathbb{C}$.

5.1.2. Έστω ανοικτό $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ και $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Ορίζουμε το σύνολο $\Omega^* = \{z \,|\, \overline{z} \in \Omega\}$ και τη συνάρτηση $f^* : \Omega^* \to \mathbb{C}$ με τύπο $f^*(z) = \overline{f(\overline{z})}$ για κάθε $z \in \Omega^*$.
Αποδείξτε ότι, αν η f είναι παραγωγίσιμη σε κάποιο $z_0 \in \Omega$, τότε η f^* είναι παραγωγίσιμη στο $\overline{z_0} \in \Omega^*$.

5.1.3. Έστω ανοικτά σύνολα $U, V \subseteq \mathbb{C}$ και συναρτήσεις $f : V \to U$, $g : U \to \mathbb{C}$, $h : V \to \mathbb{C}$ ώστε η h να είναι 1-1 στο V και $h = g \circ f$. Αν η h είναι παραγωγίσιμη στο $w_0 \in V$, αν η g είναι παραγωγίσιμη στο $z_0 = f(w_0)$, αν $g'(z_0) \neq 0$ και αν η f είναι συνεχής στο w_0, αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο w_0 και ότι $f'(w_0) = \frac{h'(w_0)}{g'(z_0)}$.

5.2 Οι εξισώσεις Cauchy - Riemann.

Τώρα θα συσχετίσουμε την παραγωγισιμότητα μιας συνάρτησης $f : A \to \mathbb{C}$ (ως συνάρτηση του z) σε κάποιο εσωτερικό σημείο z_0 του A με την παραγωγισιμότητα των $u = \mathrm{Re}\, f : A \to \mathbb{R}$ και $v = \mathrm{Im}\, f : A \to \mathbb{R}$ (ως συναρτήσεις του (x, y)) στο ίδιο σημείο (x_0, y_0).

Θυμόμαστε από τον Απειροστικό Λογισμό πολλών μεταβλητών ότι μια πραγματική συνάρτηση $u : A \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη *ως συνάρτηση δύο πραγματικών μεταβλητών* στο εσωτερικό σημείο (x_0, y_0) του συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}^2$ αν υπάρχουν $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{u(x, y) - u(x_0, y_0) - \kappa(x - x_0) - \lambda(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0. \tag{5.1}$$

Αν ισχύει το όριο στην (5.1) όταν το (x, y) πλησιάζει το (x_0, y_0), τότε θα ισχύει το ίδιο όριο όταν το (x, y) πλησιάζει το (x_0, y_0) *πάνω στην οριζόντια ευθεία που διέρχεται από το* (x_0, y_0) και, επίσης, θα ισχύει το ίδιο όριο όταν το (x, y) πλησιάζει το (x_0, y_0) *πάνω στην κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από το* (x_0, y_0). Έτσι, από την (5.1) έχουμε αντιστοίχως

$$\lim_{x\to x_0} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0) - \kappa(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0, \qquad \lim_{y\to y_0} \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0) - \lambda(y - y_0)}{|y - y_0|} = 0.$$

Επειδή οι λόγοι $\frac{|x-x_0|}{x-x_0}$ και $\frac{|y-y_0|}{y-y_0}$ έχουν σταθερή απόλυτη τιμή ίση με 1, τα δυο τελευταία όρια γράφονται ισοδύναμα

$$\lim_{x\to x_0} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0) - \kappa(x - x_0)}{x - x_0} = 0, \qquad \lim_{y\to y_0} \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0) - \lambda(y - y_0)}{y - y_0} = 0$$

ή, ισοδύναμα,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} = \kappa, \qquad \lim_{y\to y_0} \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{y - y_0} = \lambda.$$

Άρα, αν η πραγματική συνάρτηση $u : A \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη *ως συνάρτηση δύο πραγματικών μεταβλητών* στο (x_0, y_0), τότε από την (5.1) συνεπάγεται ότι

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \kappa, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = \lambda.$$

Γνωρίζουμε, επίσης, ότι μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{C}$ είναι παραγωγίσιμη *ως συνάρτηση δυο πραγματικών μεταβλητών* στο εσωτερικό σημείο (x_0, y_0) του $A \subseteq \mathbb{C}$ αν οι δύο συντεταγμένες πραγματικές συναρτήσεις $u : A \to \mathbb{R}$, $v : A \to \mathbb{R}$ με $f = (u, v)$ είναι παραγωγίσιμες ως συναρτήσεις δυο πραγματικών μεταβλητών στο (x_0, y_0). Άρα η $f = (u, v)$ είναι παραγωγίσιμη ως συνάρτηση δυο πραγματικών μεταβλητών στο (x_0, y_0) αν και μόνο αν υπάρχουν $\kappa, \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ ώστε

$$
\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{u(x,y) - u(x_0,y_0) - \kappa(x-x_0) - \lambda(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} &= 0 \\
\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{v(x,y) - v(x_0,y_0) - \mu(x-x_0) - \nu(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} &= 0
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

Συνδυάζουμε τις δυο σχέσεις (5.2) σε μία σχέση διανυσματικής μορφής, γράφοντας

$$
f(x,y) = \begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{bmatrix},\ f(x_0,y_0) = \begin{bmatrix} u(x_0,y_0) \\ v(x_0,y_0) \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} \kappa(x-x_0) + \lambda(y-y_0) \\ \mu(x-x_0) + \nu(y-y_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{bmatrix}
$$

Έτσι οι σχέσεις (5.2) γράφονται ισοδύναμα

$$
\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u(x_0,y_0) \\ v(x_0,y_0) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \kappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{bmatrix}}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0
$$

ή, ισοδύναμα,

$$
\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - \begin{bmatrix} \kappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{bmatrix}}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0 \tag{5.3}
$$

Ο 2×2 πίνακας $\begin{bmatrix} \kappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{bmatrix}$ ονομάζεται **παράγωγος** της f ως συνάρτηση δύο πραγματικών μεταβλητών στο (x_0, y_0) και συμβολίζεται

$$
Df(x_0,y_0) = \begin{bmatrix} \kappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{bmatrix}.
$$

Έχουμε, λοιπόν, δύο έννοιες παραγωγισιμότητας μιας συνάρτησης $f : A \to \mathbb{C}$ στο εσωτερικό σημείο $z_0 = (x_0, y_0)$ του $A \subseteq \mathbb{C}$: την παραγωγισιμότητα ως προς μία μιγαδική μεταβλητή z και την παραγωγισιμότητα ως προς δύο πραγματικές μεταβλητές (x, y). Για να συσχετίσουμε τις δύο έννοιες παραγωγισιμότητας θα γράψουμε την (5.3) σε μιγαδική μορφή:

$$
\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - \big(\kappa(x-x_0) + \lambda(y-y_0)\big) - i\big(\mu(x-x_0) + \nu(y-y_0)\big)}{|z-z_0|} = 0
$$

ή, ισοδύναμα,

$$
\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - \big(\kappa(x-x_0) + \lambda(y-y_0)\big) - i\big(\mu(x-x_0) + \nu(y-y_0)\big)}{z-z_0} = 0
$$

και, γράφοντας $x - x_0 = \frac{(z-z_0)+\overline{(z-z_0)}}{2}$ και $y - y_0 = \frac{(z-z_0)-\overline{(z-z_0)}}{2i}$, ισοδύναμα

$$
\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - (\frac{\kappa+\nu}{2} + i\frac{\mu-\lambda}{2})(z-z_0) - (\frac{\kappa-\nu}{2} + i\frac{\mu+\lambda}{2})\overline{(z-z_0)}}{z-z_0} = 0
$$

ή, ισοδύναμα,

$$
\lim_{z\to z_0} \Big(\frac{f(z) - f(z_0)}{z-z_0} - \Big(\frac{\kappa-\nu}{2} + i\frac{\mu+\lambda}{2} \Big) \frac{\overline{z-z_0}}{z-z_0} \Big) = \frac{\kappa+\nu}{2} + i\frac{\mu-\lambda}{2}. \tag{5.4}
$$

Αν η f είναι παραγωγίσμη ως συνάρτηση μιας μιγαδικής μεταβλητής z στο z_0, τότε έχουμε

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0). \tag{5.5}$$

Αν $f'(z_0) = a + ib$, τότε θεωρούμε τους $\kappa = a$, $\nu = a$, $\mu = b$, $\lambda = -b$ και τότε ισχύει η (5.4), αφού $\frac{\kappa+\nu}{2} + i\frac{\mu-\lambda}{2} = a + ib = f'(z_0)$ και $\frac{\kappa-\nu}{2} + i\frac{\mu+\lambda}{2} = 0$. Άρα, αν η f είναι παραγωγίσιμη ως συνάρτηση μιας μιγαδικής μεταβλητής z στο z_0 με παράγωγο $f'(z_0) = a + ib$, τότε η f είναι παραγωγίσιμη ως συνάρτηση δύο πραγματικών μεταβλητών (x, y) στο (x_0, y_0) με παράγωγο $Df(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$.

Αντιστρόφως, έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη ως συνάρτηση δύο πραγματικών μεταβλητών (x, y) στο (x_0, y_0) με παράγωγο $Df(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} \kappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$. Τότε ισχύει το όριο στην (5.4) με $\kappa = a$, $\nu = a$, $\mu = b$, $\lambda = -b$ και άρα ισχύει το όριο στην (5.5) με $f'(z_0) = a + ib$. Άρα η f είναι παραγωγίσιμη ως συνάρτηση μιας μιγαδικής μεταβλητής z στο z_0.

Αποδείξαμε το εξής αποτέλεσμα.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.6. *Έστω $f : A \to \mathbb{C}$ και εσωτερικό σημείο z_0 του A. Η f είναι παραγωγίσιμη στο z_0 ως συνάρτηση μιας μιγαδικής μεταβλητής με παράγωγο $f'(z_0) = a + ib$ αν και μόνο αν είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0) ως συνάρτηση δύο πραγματικών μεταβλητών με παράγωγο $Df(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$.*

Με άλλα λόγια, η παραγωγισιμότητα ως προς μια μιγαδική μεταβλητή ισοδυναμεί με παραγωγισιμότητα ως προς δύο πραγματικές μεταβλητές *και* με το ότι ο 2×2 πίνακας Df είναι *αντισυμμετρικός*.

Αν σκεφτούμε ότι βάσει των (5.2) έχουμε

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \kappa, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = \lambda, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) = \mu, \quad \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) = \nu,$$

τότε μπορούμε να επαναδιατυπώσουμε την Πρόταση 5.6 ως εξής.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.7. *Έστω $f = u + iv : A \to \mathbb{C}$ και εσωτερικό σημείο z_0 του A. Η f είναι παραγωγίσιμη στο z_0 ως συνάρτηση μιας μιγαδικής μεταβλητής αν και μόνο αν είναι παραγωγίσιμη στο z_0 ως συνάρτηση δύο πραγματικών μεταβλητών και οι u, v ικανοποιούν τις*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0), \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z_0). \tag{5.6}$$

Οι δυο ισότητες (5.6) ονομάζονται **εξισώσεις** ή **σύστημα εξισώσεων Cauchy - Riemann** στο σημείο z_0. Συνοπτικά: εξισώσεις ή σύστημα εξισώσεων (C-R).

Παρατηρήστε ότι, αν η f είναι παραγωγίσιμη στο z_0 τότε από τα προηγούμενα συνεπάγεται

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(z_0).$$

Κατόπιν, έχουμε το εξής αποτέλεσμα για την παραγωγισιμότητα μιας συνάρτησης μίας μιγαδικής μεταβλητής.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.8. *Έστω $f = u + iv : A \to \mathbb{C}$ και εσωτερικό σημείο z_0 του A. Αν οι u, v έχουν μερικές παραγώγους ως προς x και y σε κάθε σημείο z κάποιου δίσκου με κέντρο z_0 και αν αυτές οι μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς στο z_0 και αν ικανοποιούν τις εξισώσεις (C-R) στο z_0, τότε η f είναι παραγωγίσιμη (ως συνάρτηση μίας μιγαδικής μεταβλητής) στο z_0.*

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (C-R) της (5.6), ορίζουμε τους πραγματικούς αριθμούς κ και λ ως εξής:

$$\kappa = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0), \qquad \lambda = \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z_0). \tag{5.7}$$

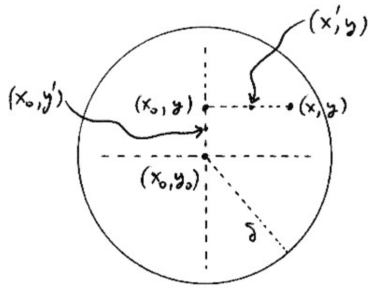
Έστω $\epsilon > 0$. Επειδή οι $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ είναι συνεχείς στο εσωτερικό σημείο $z_0 = (x_0, y_0)$ του A, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει

$$\Big|\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - \kappa\Big| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \Big|\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) - \lambda\Big| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{για κάθε } (x,y) \in D((x_0,y_0);\delta). \tag{5.8}$$

Θεωρούμε οποιοδήποτε σημείο $(x,y) \in D((x_0,y_0);\delta)$ και γράφουμε

$$u(x,y) - u(x_0,y_0) = u(x,y) - u(x_0,y) + u(x_0,y) - u(x_0,y_0). \tag{5.9}$$

Δείτε το σχήμα 19.



Σχ 19.

Σύμφωνα με το Θεώρημα Μέσης Τιμής του διαφορικού λογισμού, υπάρχει x' ανάμεσα στους x, x_0 ώστε

$$u(x,y) - u(x_0,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x',y)(x - x_0) \tag{5.10}$$

και υπάρχει y' ανάμεσα στους y, y_0 ώστε

$$u(x_0,y) - u(x_0,y_0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y')(y - y_0). \tag{5.11}$$

Προσέχουμε ότι οι x', y' εξαρτώνται από τους x, y. Παρατηρούμε, όμως, ότι τα σημεία (x',y), (x_0,y') ανήκουν στο $D((x_0,y_0);\delta)$. Άρα, λόγω των (5.8), ισχύει

$$\Big|\frac{\partial u}{\partial x}(x',y) - \kappa\Big| < \frac{\epsilon}{2}, \qquad \Big|\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y') - \lambda\Big| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{5.12}$$

Συνδυάζοντας τις (5.9), (5.10) και (5.11), βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
&u(x,y) - u(x_0,y_0) - \kappa(x-x_0) - \lambda(y-y_0)\\
&\qquad = \big(u(x,y) - u(x_0,y) - \kappa(x-x_0)\big) + \big(u(x_0,y) - u(x_0,y_0) - \lambda(y-y_0)\big)\\
&\qquad = \Big(\frac{\partial u}{\partial x}(x',y) - \kappa\Big)(x-x_0) + \Big(\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y') - \lambda\Big)(y-y_0)
\end{aligned}$$

οπότε, λόγω των (5.12),

$$\begin{aligned}
&\big|u(x,y) - u(x_0,y_0) - \kappa(x-x_0) - \lambda(y-y_0)\big|\\
&\qquad < \frac{\epsilon}{2}|x-x_0| + \frac{\epsilon}{2}|y-y_0|\\
&\qquad < \epsilon\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}.
\end{aligned}$$

Άρα για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να είναι

$$\left|\frac{u(x,y) - u(x_0,y_0) - \kappa(x-x_0) - \lambda(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}\right| < \epsilon \qquad \text{για } (x,y) \in D((x_0,y_0);\delta) \setminus \{(x_0,y_0)\}$$

και, επομένως, η πραγματική συνάρτηση u είναι παραγωγίσιμη ως συνάρτηση δύο πραγματικών μεταβλητών στο z_0.
Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο αποδεικνύεται ότι η πραγματική συνάρτηση v είναι παραγωγίσιμη ως συνάρτηση δύο πραγματικών μεταβλητών στο z_0.
Άρα η f είναι παραγωγίσιμη ως συνάρτηση δύο πραγματικών μεταβλητών στο z_0 και, επειδή ισχύουν οι εξισώσεις (C-R) στο z_0, η f είναι παραγωγίσιμη ως συνάρτηση μίας μιγαδικής μεταβλητής στο z_0. $\square$

Παράδειγμα 5.2.1. Θα ξαναδούμε το παράδειγμα 5.1.3 στο πλαίσιο των εξισώσεων (C-R).
Θεωρούμε την $f(z) = z^2$ και γράφουμε $f(z) = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$, οπότε

$$u(x,y) = \operatorname{Re} f(x,y) = x^2 - y^2, \qquad v(x,y) = \operatorname{Im} f(x,y) = 2xy.$$

Βρίσκουμε

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 2x$$

και βλέπουμε ότι οι μερικές παράγωγοι ορίζονται και είναι συνεχείς σε ολόκληρο το $\mathbb{C}$ και ικανοποιούν τις εξισώσεις (C-R) σε κάθε σημείο του $\mathbb{C}$. Σύμφωνα με την Πρόταση 5.8, η $f(z) = z^2$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του $\mathbb{C}$ και

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 2x + i2y = 2z.$$

Παράδειγμα 5.2.2. Τώρα θα ξαναδούμε το παράδειγμα 5.1.9 στο νέο πλαίσιο.
Θεωρούμε την $f(z) = \overline{z}$. Γράφουμε $f(z) = \overline{x+iy} = x - iy$, οπότε

$$u(x,y) = \operatorname{Re} f(x,y) = x, \qquad v(x,y) = \operatorname{Im} f(x,y) = -y.$$

Οι μερικές παράγωγοι

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = -1$$

δεν ικανοποιούν τις εξισώσεις (C-R) σε κανένα σημείο (x,y). Σύμφωνα με την Πρόταση 5.7 ή την Πρόταση 5.8, η f δεν είναι παραγωγίσιμη σε κανένα σημείο και, επομένως, δεν είναι αναλυτική σε κανένα σημείο.

Παράδειγμα 5.2.3. Και τώρα πίσω στο παράδειγμα 5.1.10.
Θεωρούμε την $f(z) = |z|^2$ και γράφουμε $f(z) = |x+iy|^2 = x^2 + y^2$, οπότε

$$u(x,y) = \operatorname{Re} f(x,y) = x^2 + y^2, \qquad v(x,y) = \operatorname{Im} f(x,y) = 0.$$

Οι μερικές παράγωγοι είναι

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 0$$

και ικανοποιούν τις εξισώσεις (C-R) μόνο στο σημείο 0. Σύμφωνα με την Πρόταση 5.7 ή την Πρόταση 5.8, η f δεν είναι παραγωγίσιμη σε κανένα σημείο εκτός, *ίσως*, στο σημείο 0. Τώρα, επειδή οι μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς και ικανοποιούν τις εξισώσεις (C-R) στο σημείο 0, από την Πρόταση 5.8 συνεπάγεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και

$$f'(0) = \frac{\partial u}{\partial x}(0,0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(0,0) = 0 + i0 = 0.$$

Επειδή το 0 είναι μεμονωμένο σημείο παραγωγισιμότητας της f, η f δεν είναι αναλυτική σε κανένα σημείο.

Παράδειγμα 5.2.4. Θεωρούμε την $f(z) = \mathrm{Re}^2 z$. Γράφουμε $f(z) = \mathrm{Re}^2(x+iy) = x^2$, οπότε

$$u(x,y) = \mathrm{Re}\, f(x,y) = x^2, \qquad v(x,y) = \mathrm{Im}\, f(x,y) = 0.$$

Οι μερικές παράγωγοι είναι

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 0.$$

Αυτές ικανοποιούν τις εξισώσεις (C-R) μόνο στα σημεία $(0,y)$ με $y \in \mathbb{R}$. Άρα, σύμφωνα με την Πρόταση 5.7 ή την Πρόταση 5.8, η f δεν είναι παραγωγίσιμη σε κανένα σημείο εκτός, *ίσως*, στα σημεία $(0,y)$ του φανταστικού άξονα. Τώρα, επειδή οι μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς και ικανοποιούν τις εξισώσεις (C-R) σε κάθε σημείο $(0,y)$ με $y \in \mathbb{R}$, από την Πρόταση 5.8 συνεπάγεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε τέτοιο σημείο.
Άρα το σύνολο των σημείων στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη είναι η ευθεία των φανταστικών αριθμών. Επειδή το εσωτερικό αυτής της ευθείας (όπως κάθε ευθείας) είναι το κενό σύνολο, το σύνολο αναλυτικότητας της f είναι κενό.

Παράδειγμα 5.2.5. Θα δούμε τώρα ότι η υπόθεση της συνέχειας των μερικών παραγώγων στο σημείο z_0 είναι απαραίτητη στην Πρόταση 5.8.
Έστω η συνάρτηση

$$f(z) = f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{αν } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{αν } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Τότε είναι

$$u(x,y) = \mathrm{Re}\, f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{αν } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{αν } (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad v(x,y) = \mathrm{Im}\, f(x,y) = 0.$$

Είναι προφανές ότι

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 0,$$

οπότε οι μερικές παράγωγοι της v υπάρχουν και είναι συνεχείς σε κάθε (x,y).
Για τις μερικές παραγώγους της u στο $(0,0)$ υπολογίζουμε

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{u(x,0) - u(0,0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} 0 = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{u(0,y) - u(0,0)}{y - 0} = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

Ο υπολογισμός των μερικών παραγώγων της u στα άλλα σημεία είναι απλός και προκύπτει ότι

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & \text{αν } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{αν } (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & \text{αν } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{αν } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Βλέπουμε ότι οι μερικές παράγωγοι της u υπάρχουν σε κάθε (x,y) και είναι συνεχείς σε κάθε $(x,y) \neq (0,0)$ αλλά *δεν είναι συνεχείς* στο $(0,0)$. Πράγματι, αν η $\frac{\partial u}{\partial x}$ ήταν συνεχής στο $(0,0)$, θα ίσχυε

$$\frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} \to 0$$

καθώς το (x, y) πλησιάζει το $(0, 0)$ και, επομένως, και καθώς το (x, y) πλησιάζει το $(0, 0)$ *πάνω στην ευθεία με εξίσωση* $y = x$. Δηλαδή, θα ίσχυε

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{(x^2 + x^2)^{3/2}} = 0$$

το οποίο είναι, φυσικά, λάθος!

Θα δούμε τώρα ότι η f *δεν είναι παραγωγίσιμη* στο 0. Αν η f ήταν παραγωγίσιμη στο 0 θα υπήρχε το όριο

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{(x + iy)\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Το όριο αυτό θα είχε την ίδια τιμή με το όριο του $\frac{xy}{(x+iy)\sqrt{x^2+y^2}}$ καθώς το (x, y) πλησιάζει το $(0, 0)$ *πάνω σε μια οποιαδήποτε ευθεία που διέρχεται από το σημείο* 0. Θεωρούμε μια τέτοια ευθεία με εξίσωση $y = ax$ και βλέπουμε ότι, αν $a \neq 0$, το αντίστοιχο όριο

$$\lim_{x\to 0} \frac{ax^2}{(x + iax)\sqrt{x^2 + a^2x^2}} = \frac{a}{(1 + ia)\sqrt{1 + a^2}} \lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|}$$

δεν υπάρχει καν.

Τέλος, έχουμε ένα πόρισμα της Πρότασης 5.8 το οποίο ουσιαστικά δίνει στην Πρόταση 5.8 τη μορφή με την οποία συνήθως εφαρμόζεται.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.9. *Έστω $f = u + iv : A \to \mathbb{C}$ και έστω ανοικτό σύνολο $\Omega \subseteq A$. Αν οι u, v έχουν μερικές παραγώγους οι οποίες είναι συνεχείς και ικανοποιούν τις εξισώσεις (C-R) σε κάθε σημείο του Ω, τότε η f είναι αναλυτική στο Ω.*

Απόδειξη. Θεωρούμε οποιοδήποτε σημείο z του Ω και κάποιον αντίστοιχο ανοικτό δίσκο με κέντρο το z και ο οποίος περιέχεται στο Ω (υπάρχει τέτοιος δίσκος, επειδή το Ω είναι ανοικτό σύνολο). Σύμφωνα με την Πρόταση 5.8, η f είναι παραγωγίσιμη στο z. Δηλαδή, η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του Ω και, επειδή το Ω είναι ανοικτό, η f είναι αναλυτική στο Ω. $\square$

Πολλές φορές μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{C}$ με $A \subseteq \mathbb{C}$ δίνεται με τον τύπο $f(x, y)$ ως συνάρτηση δύο πραγματικών μεταβλητών και θέλουμε να βρούμε τον τύπο $f(z)$ ως συνάρτηση μιας μιγαδικής μεταβλητής. Τότε γράφουμε $x = \frac{z+\overline{z}}{2}$, $y = \frac{z-\overline{z}}{2i}$ και έχουμε

$$f(x, y) = f\Big(\frac{z + \overline{z}}{2}, \frac{z - \overline{z}}{2i}\Big).$$

Απλοποιούμε την παράσταση που προκύπτει και εμφανίζεται μια συνάρτηση

$$f(x, y) = f\Big(\frac{z + \overline{z}}{2}, \frac{z - \overline{z}}{2i}\Big) = f(z, \overline{z})$$

των *δύο* μεταβλητών z και $\overline{z}$. Για να προκύψει συνάρτηση μόνο της μεταβλητής z θα πρέπει η $f(z, \overline{z})$ να μην εξαρτάται από την μεταβλητή $\overline{z}$. Για να αποκρυπτογραφήσουμε την κατάσταση, παρατηρούμε ότι από τους τύπους αλλαγής μεταβλητών $x = \frac{z+\overline{z}}{2}$, $y = \frac{z-\overline{z}}{2i}$ συνεπάγεται

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial x}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2i}, \quad \frac{\partial y}{\partial \overline{z}} = -\frac{1}{2i}$$

και άρα έχουμε

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2i}\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2i}\frac{\partial u}{\partial y}$$

και
$$\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}=\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{2i}\frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\frac{\partial v}{\partial \overline{z}}=\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \overline{z}}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \overline{z}}=\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{1}{2i}\frac{\partial v}{\partial y}.$$
Άρα
$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z}&=\frac{\partial u}{\partial z}+i\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\Big)+\frac{i}{2}\Big(-\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\Big)\\ \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}&=\frac{\partial u}{\partial \overline{z}}+i\frac{\partial v}{\partial \overline{z}}=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\Big)+\frac{i}{2}\Big(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\Big).\end{aligned}\tag{5.13}$$
Επειδή οι $\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}$ και $\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}$ είναι πραγματικές συναρτήσεις, βλέπουμε από την δεύτερη σχέση (5.13) ότι η f δεν εξαρτάται από την μεταβλητή $\overline{z}$, δηλαδή ότι $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}=0$, αν και μόνο αν $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ και $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ ή, ισοδύναμα, όταν ικανοποιούνται οι εξισώσεις (C-R).

Επομένως, οι εξισώσεις (C-R) εκφράζουν το ότι μια συνάρτηση $f(x,y)$ δύο πραγματικών μεταβλητών είναι συνάρτηση μόνο της μιγαδικής μεταβλητής z και όχι της $\overline{z}$. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να γράψουμε $f'=\frac{df}{dz}=\frac{\partial f}{\partial z}$, οπότε από την πρώτη σχέση (5.13) και τις εξισώσεις (C-R) έχουμε τους τύπους
$$f'=\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}$$
για την παράγωγο της f ως προς την μεταβλητή z. Αυτούς τους τύπους τους έχουμε ξαναδεί.

Ασκήσεις.

5.2.1. Ξαναδείτε την άσκηση 5.1.1 στο πλαίσιο των εξισώσεων (C-R).

5.2.2. [α] Αποδείξτε ότι η $F(x,y)=\sqrt{|xy|}$ ικανοποιεί τις εξισώσεις (C-R) στο 0 αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

[β] Αποδείξτε ότι η $G(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2}, & \text{αν } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{αν } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ ικανοποιεί τις εξισώσεις (C-R) στο 0, ότι το $\frac{G(z)-G(0)}{z-0}$ έχει όριο όταν το z πλησιάζει το 0 πάνω σε οποιαδήποτε ευθεία που περιέχει το 0, αλλά ότι η G δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

5.2.3. Έστω $f:A\to\mathbb{C}$ και εσωτερικό σημείο z_0 του A και έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη ως συνάρτηση δύο πραγματικών μεταβλητών στο z_0.
[α] Αν υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το $\lim_{z\to z_0}\mathrm{Re}\,\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$, αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο z_0.
[β] Αν υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το $\lim_{z\to z_0}\big|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\big|$, αποδείξτε ότι είτε η f είναι παραγωγίσιμη στο z_0 είτε η $\overline{f}$ είναι παραγωγίσιμη στο z_0.

5.2.4. Έστω ανοικτό και συνεκτικό $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ και f αναλυτική στο Ω.
[α] Έστω ότι ισχύει $\mathrm{Re}\,f=0$ στο Ω. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή στο Ω.
[β] Γενικότερα, έστω ότι υπάρχει ευθεία l ώστε να ισχύει $f(z)\in l$ για κάθε $z\in\Omega$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή στο Ω.
[γ] Τι συμβαίνει αν στο [β], αντί για ευθεία l, υποθέσουμε ότι υπάρχει κύκλος C ώστε να ισχύει $f(z)\in C$ για κάθε $z\in\Omega$;

5.2.5. Αποδείξτε ότι οι εξισώσεις (C-R) γράφονται σε *πολική μορφή* ως εξής:
$$\frac{\partial u}{\partial r}(x,y)=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}(x,y),\qquad \frac{\partial v}{\partial r}(x,y)=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}(x,y)\qquad \text{για } (x,y)\neq(0,0).$$
Φυσικά, έχουμε τους τύπους αλλαγής μεταβλητών: $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$.

5.3 Παραγωγισιμότητα και συμμορφία.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω $f : A \to \mathbb{C}$ συνεχής στο A και έστω καμπύλη $\gamma : [a,b] \to A$. Δηλαδή η τροχιά της γ περιέχεται στο πεδίο ορισμού της f. Τότε ορίζουμε τη συνάρτηση*

$$f(\gamma) = f \circ \gamma : [a,b] \to \mathbb{C},$$

η οποία είναι συνεχής στο $[a,b]$. Άρα η $f(\gamma)$ είναι καμπύλη και την ονομάζουμε **εικόνα της γ μέσω της f**.

Τώρα θεωρούμε μια συνάρτηση

$$f : A \to \mathbb{C}$$

και εσωτερικό σημείο z_0 του A. Έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο z_0 και ότι

$$f(z_0) = w_0, \qquad f'(z_0) \neq 0.$$

Θεωρούμε και οποιαδήποτε καμπύλη

$$\gamma : [t_0, b] \to A, \qquad \gamma(t_0) = z_0.$$

Δηλαδή, η καμπύλη γ έχει αρχή το σημείο z_0 και η τροχιά της περιέχεται στο A. Επειδή έχουμε συμφωνήσει ότι

$$\gamma'(t_0) \neq 0,$$

η γ έχει εφαπτόμενο διάνυσμα στο σημείο z_0.

Τώρα ορίζεται η καμπύλη

$$f(\gamma) : [t_0, b] \to \mathbb{C},$$

η εικόνα της γ μέσω της f, η οποία έχει αρχή το σημείο

$$f(\gamma)(t_0) = (f \circ \gamma)(t_0) = f(\gamma(t_0)) = f(z_0) = w_0$$

και το εφαπτόμενο διάνυσμά της στο σημείο w_0 είναι το

$$f(\gamma)'(t_0) = (f \circ \gamma)'(t_0) = f'(\gamma(t_0))\gamma'(t_0) = f'(z_0)\gamma'(t_0) \neq 0. \tag{5.14}$$

Από την ισότητα (5.14) έχουμε δυο συμπεράσματα. Το πρώτο είναι ότι

$$|f(\gamma)'(t_0)| = |f'(z_0)||\gamma'(t_0)|.$$

Δηλαδή, το μέτρο του εφαπτόμενου διανύσματος της $f(\gamma)$ στην αρχή της w_0 είναι ίσο με το μέτρο του εφαπτόμενου διανύσματος της γ στην αρχή της z_0 πολλαπλασιασμένο με τον παράγοντα $|f'(z_0)| > 0$. Συνοπτικά, λέμε ότι:

Η f πολλαπλασιάζει τα μέτρα των εφαπτόμενων διανυσμάτων στο σημείο z_0 με τον παράγοντα $|f'(z_0)| > 0$ ή, ισοδύναμα, ότι *η f επιμηκύνει τα εφαπτόμενα διανύσματα στο σημείο z_0 κατά τον παράγοντα $|f'(z_0)| > 0$.*

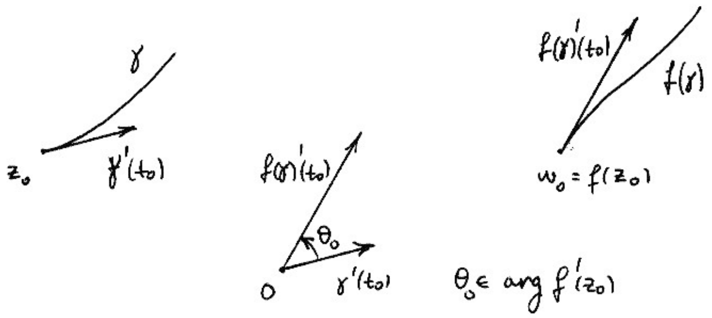
Το δεύτερο συμπέρασμα είναι ότι

$$\arg f(\gamma)'(t_0) = \arg f'(z_0) + \arg \gamma'(t_0). \tag{5.15}$$

Δηλαδή, το όρισμα του εφαπτόμενου διανύσματος της $f(\gamma)$ στην αρχή της w_0 είναι ίσο με το όρισμα του εφαπτόμενου διανύσματος της γ στην αρχή της z_0 αυξημένο κατά τον αριθμό $\arg f'(z_0)$. Δείτε το σχήμα 20. Συνοπτικά, λέμε ότι:

Η f αυξάνει τα ορίσματα των εφαπτόμενων διανυσμάτων στο σημείο z_0 κατά τη γωνία $\arg f'(z_0)$ ή, ισοδύναμα, ότι *η f περιστρέφει τα εφαπτόμενα διανύσματα στο σημείο z_0 κατά τη γωνία* $\arg f'(z_0)$.

Σx 20.



Παρατηρήστε ότι η επιμήκυνση και η περιστροφή των εφαπτόμενων διανυσμάτων στο σημείο z_0 είναι ομοιόμορφη για όλα αυτά τα διανύσματα: *ανεξάρτητα από την κατεύθυνσή τους όλα τα εφαπτόμενα διανύσματα επιμηκύνονται κατά τον ίδιο παράγοντα και περιστρέφονται κατά την ίδια γωνία.* Αφού, λοιπόν, δυο τέτοια εφαπτόμενα διανύσματα περιστρέφονται κατά την ίδια γωνία, συνεπάγεται, προφανώς, ότι η μεταξύ τους γωνία παραμένει αμετάβλητη! Ας το δούμε πιο αναλυτικά με καμπύλες.

Ας θεωρήσουμε δυο καμπύλες γ από τις παραπάνω, έστω γ_1 και γ_2. Η γωνία ανάμεσα στα εφαπτόμενα διανύσματα των γ_1 και γ_2 στο z_0 είναι η

$$\arg {\gamma_2}'(t_0) - \arg {\gamma_1}'(t_0)$$

και η γωνία ανάμεσα στα εφαπτόμενα διανύσματα των $f(\gamma_1)$ και $f(\gamma_2)$ στο w_0 είναι η

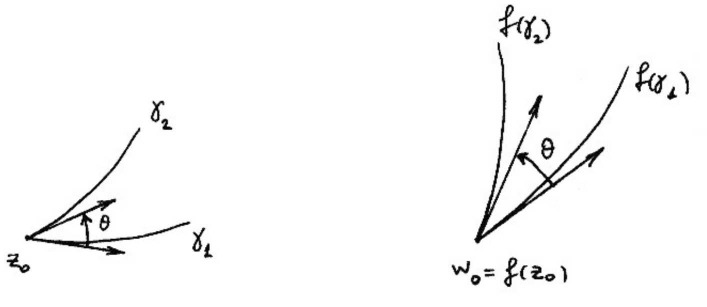
$$\arg f(\gamma_2)'(t_0) - \arg f(\gamma_1)'(t_0).$$

Από την (5.15) για τις γ_1 και γ_2 βρίσκουμε ότι

$$\arg f(\gamma_2)'(t_0) - \arg f(\gamma_1)'(t_0) = \arg {\gamma_2}'(t_0) - \arg {\gamma_1}'(t_0),$$

δηλαδή ότι η γωνία ανάμεσα στα εφαπτόμενα διανύσματα των $f(\gamma_1)$ και $f(\gamma_2)$ στο w_0 είναι ίση με τη γωνία ανάμεσα στα εφαπτόμενα διανύσματα των γ_1 και γ_2 στο z_0. Δείτε το σχήμα 21.
Συνοπτικά, λέμε ότι:
Η f αφήνει αμετάβλητες τις γωνίες ανάμεσα σε εφαπτόμενα διανύσματα στο σημείο z_0.

Σx 21



Αυτή η τελευταία ιδιότητα της f ονομάζεται **συμμορφία** της f στο z_0 και ισχύει, όπως είδαμε, με την υπόθεση ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο z_0 και ότι $f'(z_0) \neq 0$.

Σχόλιο. Όταν ορίσαμε την $f(\gamma) = f \circ \gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ είδαμε ότι είναι συνεχής συνάρτηση στο $[a, b]$ και, επομένως, αποτελεί καμπύλη. Επειδή, όμως, στις καμπύλες που θεωρούμε έχουμε θέσει τον επιπλέον περιορισμό να είναι τμηματικά ομαλές και, επειδή $f(\gamma)'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t)$ πρέπει να θεωρήσουμε έναν περιορισμό στη συνάρτηση f.
Στο μάθημα αυτό οι συναρτήσεις $f : A \to \mathbb{C}$ που θα μελετάμε θα είναι *αναλυτικές* στο *ανοικτό*

σύνολο A, οπότε θα ορίζονται οι f' στο A και άρα και σε κάθε σημείο $\gamma(t)$ της τροχιάς της καμπύλης γ. Επίσης, θα δούμε αργότερα ότι, αν η f είναι αναλυτική στο ανοικτό σύνολο A, τότε η f' είναι αυτομάτως *συνεχής* στο A. Άρα η $f(\gamma)'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t)$ είναι τμηματικά συνεχής στο $[a, b]$ και, επομένως, η καμπύλη $f(\gamma)$ είναι, όπως και η γ, τμηματικά ομαλή.

Ασκήσεις.

5.3.1. Θεωρήστε την αναλυτική συνάρτηση $w = az + b$ με $a \neq 0$.

[α] Αποδείξτε ότι είναι ένα-προς-ένα στο z-επίπεδο και επί του w-επιπέδου.

[β] Αποδείξτε ότι απεικονίζει ευθείες και κύκλους στο z-επίπεδο σε ευθείες και κύκλους, αντιστοίχως, στο w-επίπεδο.

[γ] Θεωρήστε δυο ευθείες του z-επιπέδου με εξισώσεις $kx + ly = m$ και $k'x + l'y = m'$. Ποιά είναι η ισοδύναμη συνθήκη ώστε οι δυο ευθείες να τέμνονται; Κάτω από αυτήν τη συνθήκη βρείτε το σημείο τομής και εκφράστε τη γωνία των ευθειών στο σημείο τομής τους. Κατόπιν βρείτε τις εξισώσεις των εικόνων των δυο ευθειών στο w-επίπεδο και κάντε τα ίδια με αυτές. Επιβεβαιώστε έτσι ότι η $w = az + b$ αφήνει αμετάβλητες τις γωνίες των τεμνομένων ευθειών.

[δ] Αν θέλετε να δουλέψετε στο $\widehat{\mathbb{C}}$ σε ποιό σημείο του επεκτεταμένου w-επιπέδου πρέπει να απεικονίζει η συνάρτηση το ∞ του επεκτεταμένου z-επιπέδου; Αποδείξτε ότι τότε είναι ένα-προς-ένα στο επεκτεταμένο z-επίπεδο και επί του επεκτεταμένου w-επιπέδου. Με αυτήν την έννοια ερμηνεύστε το συμπέρασμα του [β] ως εξής: η συνάρτηση απεικονίζει γενικευμένους κύκλους του επεκτεταμένου z-επιπέδου σε γενικευμένους κύκλους του επεκτεταμένου w-επιπέδου.

5.3.2. Θεωρήστε την αναλυτική συνάρτηση $w = z^2$.

[α] Με οποιαδήποτε σταθερά $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$, θεωρήστε την υπερβολή $x^2 - y^2 = u_0$ και την υπερβολή $2xy = v_0$ στο z-επίπεδο (με $z = x + iy$). Τέμνονται και σε πόσα σημεία; Ποιά είναι η γωνία τους στα σημεία τομής τους;

[β] Με οποιαδήποτε σταθερά $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ με $x_0, y_0 \neq 0$, θεωρήστε την παραβολή $u = \frac{1}{4{y_0}^2}v^2 - {y_0}^2$ και την παραβολή $u = -\frac{1}{4{x_0}^2}v^2 + {x_0}^2$ στο w-επίπεδο (με $w = u + iv$). Τέμνονται και σε πόσα σημεία; Ποιά είναι η γωνία τους στα σημεία τομής τους;

5.3.3. Έστω $f : \Omega \to A$ αναλυτική στο ανοικτό σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ και $\phi : A \to \mathbb{C}$ συνεχής στο σύνολο $A \subseteq \mathbb{C}$. Έστω καμπύλη γ στο Ω και $f(\gamma)$ η εικόνα της στο A μέσω της f. Αποδείξτε ότι $\int_{f(\gamma)} \phi(w)\, dw = \int_\gamma \phi(f(z))f'(z)\, dz$. (Αν σας απασχολήσει το αν τα ολοκληρώματα υπάρχουν, δείτε το σχόλιο στο τέλος αυτής της ενότητας.)

5.4 Αρμονικές συναρτήσεις.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω ανοικτό σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ και $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Λέμε ότι η u είναι* **αρμονική** *στο Ω αν η u έχει συνεχείς μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης ως προς x, y σε κάθε σημείο του Ω και*

$$\Delta u(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0 \qquad \text{για κάθε } (x,y) \in \Omega.$$

Ο διαφορικός τελεστής $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ονομάζεται **Λαπλασιανή** ή **τελεστής Laplace**.

Θα αποδείξουμε αργότερα ότι, αν η $f = u + iv$ είναι αναλυτική στο ανοικτό σύνολο Ω, τότε οι u, v έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους κάθε τάξης ως προς x, y σε κάθε σημείο του Ω. Αν δεχτούμε προσωρινά αυτό το αποτέλεσμα, τότε, επειδή οι u, v ικανοποιούν τις εξισώσεις (C-R), έχουμε αμέσως ότι

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial v}{\partial y}\Big) - \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial v}{\partial x}\Big) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0. \\ \Delta v &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial v}{\partial x}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial v}{\partial y}\Big) = -\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big) = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0 \end{aligned} \tag{5.16}$$

Άρα οι u, v είναι αρμονικές στο Ω.

Αποδείξαμε το εξής αποτέλεσμα.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.10. *Αν η $f = u + iv$ είναι αναλυτική στο ανοικτό σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, τότε οι u, v είναι αρμονικές στο Ω.*

Σχόλιο. Τονίζουμε ότι απομένει να αποδειχθεί το ότι οι u, v έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους κάθε τάξης (τουλάχιστον δεύτερης) ως προς x, y σε κάθε σημείο του Ω.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω ανοικτό σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ και $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$. Αν οι u, v είναι αρμονικές στο Ω και αν η $f = u + iv$ είναι αναλυτική στο Ω, τότε η v ονομάζεται* **αρμονική συζυγής** *της u στο Ω.*

Παράδειγμα 5.4.1. Η $f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$, οπότε οι $u(x, y) = x^2 - y^2$ και $v(x, y) = 2xy$ είναι αρμονικές στο $\mathbb{C}$.

Παράδειγμα 5.4.2. Θεωρούμε την $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ με τύπο $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$. Είναι σαφές ότι η u έχει συνεχείς μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης ως προς x, y και ότι $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3y^2$, $\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -6xy$ και

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 6x - 6x = 0 \qquad \text{για κάθε } (x, y) \in \mathbb{C}.$$

Άρα η u είναι αρμονική στο $\mathbb{C}$.
Το θέμα είναι να βρούμε μια αρμονική συζυγή $v : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ της u στο $\mathbb{C}$.
Η v είναι αρμονική συζυγής της u στο $\mathbb{C}$ αν και μόνο αν το ζευγάρι u, v ικανοποιεί τις εξισώσεις (C-R) στο $\mathbb{C}$, δηλαδή

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y), \qquad \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)$$

ή, ισοδύναμα,

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = 6xy, \qquad \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = 3x^2 - 3y^2 \qquad \text{για κάθε } (x, y) \in \mathbb{C}. \tag{5.17}$$

(Αν ικανοποιούνται οι εξισώσεις (C-R), τότε η v είναι αυτομάτως αρμονική όπως είδαμε στους τύπους (5.16).)
Για να βρούμε την v εφαρμόζουμε μια απλή μέθοδο γνωστή από τον Απειροστικό Λογισμό πολλών μεταβλητών. Κρατάμε σταθερό το y και ολοκληρώνουμε την πρώτη σχέση (5.17) ως προς x:

$$v(x, y) = 3x^2 y + \phi(y),$$

όπου ϕ είναι συνάρτηση του y, ανεξάρτητη του x (η σταθερά ολοκλήρωσης ως προς x). Κατόπιν παραγωγίζουμε την τελευταία σχέση ως προς y και χρησιμοποιώντας την δεύτερη σχέση (5.17) βρίσκουμε

$$3x^2 + \phi'(y) = 3x^2 - 3y^2.$$

Επομένως, $\phi(y) = -y^3 + c$.
Άρα έχουμε άπειρες λύσεις $v : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$v(x, y) = 3x^2 y - y^3 + c,$$

όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή *πραγματική* συνάρτηση.
Στην άσκηση 5.4.2 αποδεικνύεται ότι αυτές οι v είναι όλες οι αρμονικές συζυγείς της u στο $\mathbb{C}$.
Αν θέλουμε να ελέγξουμε ότι η $f = u + iv$ είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$, γράφουμε

$$f(z) = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2 y - y^3) + ic$$

και παρατηρούμε ότι $f(z) = (x+iy)^3 + ic = z^3 + ic$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$.
Επειδή μπορεί να υπάρξει η ένσταση ότι δεν είναι πάντοτε εύκολο να μαντέψουμε τον τύπο της f ως συνάρτηση του z από τον τύπο της ως συνάρτηση του (x,y), έχουμε τον εξής εναλλακτικό τρόπο: γράφουμε $x = \frac{z+\overline{z}}{2}$, $y = \frac{z-\overline{z}}{2i}$ και τότε

$$\begin{aligned} f(z) &= \Big(\Big(\frac{z+\overline{z}}{2}\Big)^3 - 3\Big(\frac{z+\overline{z}}{2}\Big)\Big(\frac{z-\overline{z}}{2i}\Big)^2\Big) + i\Big(3\Big(\frac{z+\overline{z}}{2}\Big)^2\Big(\frac{z-\overline{z}}{2i}\Big) - \Big(\frac{z-\overline{z}}{2i}\Big)^3\Big) + ic \\ &= \ldots = z^3 + ic. \end{aligned}$$

Για καλύτερη κατανόηση αυτού του τελευταίου δείτε πάλι τη συζήτηση στο τέλος της ενότητας 5.2 μετά από την Πρόταση 5.9.

Σχόλιο. Το γιατί η μέθοδος του τελευταίου παραδείγματος έχει αποτέλεσμα θα το δούμε αργότερα.

Ασκήσεις.

5.4.1. Έστω ανοικτό σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ και $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ αρμονικές στο Ω. Αν η v είναι αρμονική συζυγής της u στο Ω, αποδείξτε ότι η $-u$ είναι αρμονική συζυγής της v στο Ω.

5.4.2. Έστω ανοικτό και συνεκτικό σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ και $u, v_1, v_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ αρμονικές στο Ω. Αν η v_1 είναι αρμονική συζυγής της u στο Ω, αποδείξτε ότι η v_2 είναι αρμονική συζυγής της u στο Ω αν και μόνο αν η $v_2 - v_1$ είναι σταθερή πραγματική συνάρτηση στο Ω.

5.4.3. [α] Ποιό είναι το πιο γενικό ομογενές πολυώνυμο δύο μεταβλητών βαθμού δύο, $p(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$, με πραγματικούς συντελεστές το οποίο είναι πραγματικό μέρος συνάρτησης αναλυτικής στο $\mathbb{C}$; Ποιά είναι αυτή η συνάρτηση; Αποτελεί το σύνολο αυτών των πολυωνύμων γραμμικό χώρο επί του $\mathbb{R}$; Αν ναι, τότε ποιά είναι η διάσταση αυτού του χώρου;
[β] Ίδιες ερωτήσεις για το γενικό ομογενές πολυώνυμο δύο μεταβλητών βαθμού τρία, $p(x,y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$, με πραγματικούς συντελεστές.
[γ] Ίδιες ερωτήσεις για το γενικό ομογενές πολυώνυμο δύο μεταβλητών βαθμού n, $p(x,y) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1}y + \cdots + a_1xy^{n-1} + a_0y^n$, με πραγματικούς συντελεστές.

5.4.4. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ γράφεται σε *πολική μορφή* ως εξής:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

Φυσικά, έχουμε τους τύπους αλλαγής μεταβλητών: $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

Κεφάλαιο 6

Παραδείγματα αναλυτικών συναρτήσεων

6.1 Γραμμικοί κλασματικοί μετασχηματισμοί.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Κάθε ρητή συνάρτηση της μορφής* $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ *ονομάζεται* **γραμμικός κλασματικός μετασχηματισμός**. *Υποθέτουμε, επίσης, ότι* $ad - bc \neq 0$.

Ας δούμε πρώτα γιατί υποθέτουμε ότι $ad - bc \neq 0$. Αν $ad - bc = 0$ και $c = 0$, τότε $ad = 0$, οπότε είτε $a = 0$ και $d \neq 0$ είτε $d = 0$. Στην πρώτη περίπτωση ο τύπος της συνάρτησης γράφεται $T(z) = \frac{b}{d}$, οπότε η T είναι σταθερή. Στην δεύτερη περίπτωση είναι $cz + d = 0$ για κάθε z, οπότε πάλι η T είναι σταθερή με τιμή ∞. Αν $ad - bc = 0$ και $c \neq 0$, τότε $b = \frac{ad}{c}$, οπότε $T(z) = \frac{az+\frac{ad}{c}}{cz+d} = \frac{a}{c}\frac{cz+d}{cz+d} = \frac{a}{c}$ και άρα η T είναι και πάλι σταθερή. Αντιστρόφως, μπορεί να αποδείξει κάποιος πολύ εύκολα (διακρίνοντας περιπτώσεις: $c = 0$ και $c \neq 0$) ότι αν η T είναι σταθερή συνάρτηση, τότε $ad - bc = 0$. Άρα υποθέτοντας $ad - bc \neq 0$ εξασφαλίζουμε ότι η T δεν είναι σταθερή συνάρτηση.

Πρέπει να πούμε κάτι για τις τιμές της T στις ρίζες του παρονομαστή και στο ∞. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.
Πρώτη περίπτωση: $c = 0$.
Τότε, λόγω του $ad - bc \neq 0$, είναι $ad \neq 0$ και ο τύπος της T γράφεται $T(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Επειδή $\frac{a}{d} \neq 0$ έχουμε ότι $T(\infty) = \infty$. Άρα

$$T(z) = \begin{cases} \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}, & \text{αν } z \in \mathbb{C} \\ \infty, & \text{αν } z = \infty \end{cases} \qquad \text{αν } c = 0. \tag{6.1}$$

Δεύτερη περίπτωση: $c \neq 0$.
Τότε ο παρονομαστής έχει ρίζα το $z = -\frac{d}{c}$, το οποίο, λόγω του $ad - bc \neq 0$, δεν είναι ρίζα του αριθμητή. Άρα έχουμε ότι $T(-\frac{d}{c}) = \infty$. Επίσης, έχουμε ότι $T(\infty) = \frac{a}{c}$. Άρα

$$T(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d}, & \text{αν } z \in \mathbb{C}, z \neq -\frac{d}{c} \\ \infty, & \text{αν } z = -\frac{d}{c} \\ \frac{a}{c}, & \text{αν } z = \infty \end{cases} \qquad \text{αν } c \neq 0. \tag{6.2}$$

Επομένως, κάθε γραμμικός κλασματικός μετασχηματισμός (γ.κ.μ.) είναι συνάρτηση

$$T : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$$

και, αν και θα γράφουμε $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, θα έχουμε στο μυαλό μας τους πλήρεις τύπους (6.1) και (6.2) ανάλογα με την περίπτωση.

Η Πρόταση 6.1 αποδεικνύεται εύκολα. Θεωρήστε την ως άσκηση.

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.1. *Κάθε γ.κ.μ. είναι συνάρτηση ένα-προς-ένα στο $\widehat{\mathbb{C}}$ και επί του $\widehat{\mathbb{C}}$.*

Λύνοντας την $w = T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ως προς z, βρίσκουμε τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης ενός γ.κ.μ T. Προκύπτει $z = \frac{dw-b}{-cw+a}$ και, επομένως, η αντίστροφη συνάρτηση T^{-1} είναι κι αυτή γ.κ.μ. με τύπο:

$$T^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}.$$

Επίσης, η σύνθεση δυο γ.κ.μ. είναι γ.κ.μ. Πράγματι, αν $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ και $S(z) = \frac{a'z+b'}{c'z+d'}$, τότε

$$(S \circ T)(z) = \frac{a'T(z)+b'}{c'T(z)+d'} = \frac{a'\frac{az+b}{cz+d}+b'}{c'\frac{az+b}{cz+d}+d'} = \frac{(a'a+b'c)z+(a'b+b'd)}{(c'a+d'c)z+(c'b+d'd)}.$$

Παρατηρήστε ότι

$$(a'a+b'c)(c'b+d'd)-(a'b+b'd)(c'a+d'c) = (a'd'-b'c')(ad-bc) \neq 0.$$

Η ταυτοτική συνάρτηση I με τύπο $I(z) = z$ είναι προφανώς γ.κ.μ. με $a = d = 1$, $b = c = 0$.

Βάσει των προηγουμένων, η Πρόταση 6.2 είναι προφανής.

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.2. *Το σύνολο των γ.κ.μ. με την πράξη της σύνθεσης αποτελεί ομάδα. Το ουδέτερο στοιχείο της ομάδας είναι ο ταυτοτικός γ.κ.μ.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.3. *Κάθε γ.κ.μ. είναι αναλυτική συνάρτηση στο $\widehat{\mathbb{C}}$ εκτός του σημείου στο οποίο έχει την τιμή ∞.*

Απόδειξη. Έστω γ.κ.μ. με τύπο $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$.
Αν $c = 0$, τότε $T(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ και ο T είναι αναλυτική συνάρτηση στο $\mathbb{C}$.
Αν $c \neq 0$, τότε ο T είναι αναλυτική συνάρτηση στο $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$. Επίσης, ο T είναι αναλυτική συνάρτηση και στο ∞. Πράγματι, είναι $T(\infty) = \frac{a}{c}$ και

$$\lim_{z\to\infty} z(T(z)-T(\infty)) = \lim_{z\to\infty} \frac{(bc-ad)z}{c(cz+d)} = \frac{bc-ad}{c^2} \in \mathbb{C}.$$

□

Μια σημαντική ιδιότητα των γ.κ.μ. είναι ότι απεικονίζουν γενικευμένους κύκλους στο $\widehat{\mathbb{C}}$ σε γενικευμένους κύκλους στο $\widehat{\mathbb{C}}$. Για να την αποδείξουμε θα μελετήσουμε τρεις ειδικές περιπτώσεις.

Παράδειγμα 6.1.1. Κάθε συνάρτηση με τύπο $T(z) = z + b$ είναι γ.κ.μ. με $a = 1$, $c = 0$, $d = 1$ και ονομάζεται **μεταφορά** κατά b.
Ο T είναι αναλυτική συνάρτηση στο $\mathbb{C}$, ένα-προς-ένα στο $\mathbb{C}$ και επί του $\mathbb{C}$ και, επίσης, είναι $T(\infty) = \infty$.
Ο T απεικονίζει ευθείες στο $\widehat{\mathbb{C}}$ σε ευθείες στο $\widehat{\mathbb{C}}$ και κύκλους στο $\mathbb{C}$ σε κύκλους στο $\mathbb{C}$.
Πράγματι, έστω ευθεία l στο $\mathbb{C}$ με εξίσωση $\mathrm{Re}(\overline{\zeta}z) = \kappa$. Γράφουμε $w = T(z) = z + b$ και τότε το z ανήκει στην l αν και μόνο αν $\mathrm{Re}(\overline{\zeta}z) = \kappa$ αν και μόνο αν $\mathrm{Re}(\overline{\zeta}w) - \mathrm{Re}(\overline{\zeta}b) = \kappa$ αν και μόνο αν $\mathrm{Re}(\overline{\zeta}w) = \kappa + \mathrm{Re}(\overline{\zeta}b)$ αν και μόνο αν το w ανήκει στην ευθεία m με εξίσωση $\mathrm{Re}(\overline{\zeta}w) = \kappa + \mathrm{Re}(\overline{\zeta}b)$. Επειδή $T(\infty) = \infty$, έχουμε ότι το z ανήκει στην ευθεία $\widehat{l} = l \cup \{\infty\}$ στο $\widehat{\mathbb{C}}$ αν και μόνο αν το w ανήκει στην ευθεία $\widehat{m} = m \cup \{\infty\}$ στο $\widehat{\mathbb{C}}$.
Κατόπιν, έστω κύκλος $C(z_0; r)$ στο $\mathbb{C}$. Γράφουμε πάλι $w = T(z) = z + b$ και τότε το z ανήκει στον $C(z_0; r)$ αν και μόνο αν $|z - z_0| = r$ αν και μόνο αν $|w - b - z_0| = r$ αν και μόνο αν το w ανήκει στον κύκλο $C(z_0 + b; r)$ στο $\mathbb{C}$.

Παράδειγμα 6.1.2. Κάθε συνάρτηση με τύπο $T(z) = az$ με $a \neq 0$ είναι γ.κ.μ. με $b = c = 0$, $d = 1$ και ονομάζεται **ομοιοθεσία** με κέντρο το 0.
Ο T στρέφει τα σημεία ως προς το 0 κατά σταθερή γωνία ίση με το $\arg a$. Πράγματι, γράφουμε $w = T(z) = az$ και έχουμε ότι $\arg w = \arg z + \arg a$.
Επίσης, ο T πολλαπλασιάζει τις αποστάσεις των σημείων με τον σταθερό παράγοντα $|a|$. Πράγματι, γράφουμε $w_1 = T(z_1) = az_1$ και $w_2 = T(z_2) = az_2$ και έχουμε ότι $|w_1 - w_2| = |a||z_1 - z_2|$.
Ο T είναι αναλυτική συνάρτηση στο $\mathbb{C}$, ένα-προς-ένα στο $\mathbb{C}$ και επί του $\mathbb{C}$ και, επίσης, είναι $T(\infty) = \infty$.
Ο T απεικονίζει ευθείες στο $\widehat{\mathbb{C}}$ σε ευθείες στο $\widehat{\mathbb{C}}$ και κύκλους στο $\mathbb{C}$ σε κύκλους στο $\mathbb{C}$.
Πράγματι, έστω ευθεία l στο $\mathbb{C}$ με εξίσωση $\mathrm{Re}(\overline{\zeta} z) = \kappa$. Γράφουμε $w = T(z) = az$ και τότε το z ανήκει στην l αν και μόνο αν $\mathrm{Re}(\overline{\zeta} z) = \kappa$ αν και μόνο αν $\mathrm{Re}(\overline{\zeta} \frac{w}{a}) = \kappa$ αν και μόνο αν $\mathrm{Re}(\overline{a\zeta}\, w) = |a|^2\kappa$ αν και μόνο αν το w ανήκει στην ευθεία m με εξίσωση $\mathrm{Re}(\overline{a\zeta}\, w) = |a|^2\kappa$. Επειδή $T(\infty) = \infty$, έχουμε ότι το z ανήκει στην ευθεία $\widehat{l} = l \cup \{\infty\}$ στο $\widehat{\mathbb{C}}$ αν και μόνο αν το w ανήκει στην ευθεία $\widehat{m} = m \cup \{\infty\}$ στο $\widehat{\mathbb{C}}$.
Κατόπιν, έστω κύκλος $C(z_0; r)$ στο $\mathbb{C}$. Γράφουμε πάλι $w = T(z) = az$ και τότε το z ανήκει στον $C(z_0; r)$ αν και μόνο αν $|z - z_0| = r$ αν και μόνο αν $|w - az_0| = |a|r$ αν και μόνο αν το w ανήκει στον κύκλο $C(az_0; |a|r)$ στο $\mathbb{C}$.

Παράδειγμα 6.1.3. Η συνάρτηση με τύπο $T(z) = \frac{1}{z}$ είναι γ.κ.μ. με $a = d = 0$, $c = b = 1$ και ονομάζεται **αντιστροφή** ως προς τον κύκλο $C(0; 1)$.
Ο T είναι αναλυτική συνάρτηση στο $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$, ένα-προς-ένα στο $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0, \infty\}$ και επί του $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0, \infty\}$ και, επίσης, είναι $T(0) = \infty$ και $T(\infty) = 0$.
Τώρα θα δούμε ότι ο T απεικονίζει γενικευμένους κύκλους στο $\widehat{\mathbb{C}}$ σε γενικευμένους κύκλους στο $\widehat{\mathbb{C}}$ και, όπως στα δύο προηγούμενα παραδείγματα, θα διακρίνουμε περιπτώσεις.
Γράφουμε $w = T(z) = \frac{1}{z}$ και θεωρούμε την ευθεία l στο $\mathbb{C}$ με εξίσωση $\mathrm{Re}(\overline{\zeta} z) = \kappa$. Υποθέτουμε ότι η l δεν περιέχει το 0 ή, ισοδύναμα, ότι $\kappa \neq 0$. Τότε το z ανήκει στην l αν και μόνο αν $\mathrm{Re}(\overline{\zeta} z) = \kappa$ αν και μόνο αν $\mathrm{Re}(\frac{\overline{\zeta}}{w}) = \kappa$ αν και μόνο αν $\mathrm{Re}(\overline{\zeta w}) = \kappa |w|^2$ (και $w \neq 0$) αν και μόνο αν $|w|^2 - \mathrm{Re}(\frac{\zeta}{\kappa} w) = 0$ (και $w \neq 0$) αν και μόνο αν $|w - \frac{\overline{\zeta}}{2\kappa}|^2 = \frac{|\zeta|^2}{4\kappa^2}$ (και $w \neq 0$) αν και μόνο αν το w ανήκει στον κύκλο $C(\frac{\overline{\zeta}}{2\kappa}; \frac{|\zeta|}{2|\kappa|})$ εκτός του 0. Τώρα, επειδή $T(\infty) = 0$, βλέπουμε ότι το z ανήκει στην ευθεία $\widehat{l} = l \cup \{\infty\}$ στο $\widehat{\mathbb{C}}$ αν και μόνο αν το w ανήκει στον κύκλο $C(\frac{\overline{\zeta}}{2\kappa}; \frac{|\zeta|}{2|\kappa|})$ (στον οποίο ανήκει το 0).
Τώρα θεωρούμε ευθεία l στο $\mathbb{C}$ η οποία περιέχει το 0 και άρα έχει εξίσωση $\mathrm{Re}(\overline{\zeta} z) = 0$. Τότε το $z \neq 0$ ανήκει στην l αν και μόνο αν $\mathrm{Re}(\overline{\zeta} z) = 0$ (και $z \neq 0$) αν και μόνο αν $\mathrm{Re}(\frac{\overline{\zeta}}{w}) = 0$ αν και μόνο αν $\mathrm{Re}(\overline{\zeta w}) = 0$ (και $w \neq 0$) αν και μόνο αν $\mathrm{Re}(\zeta w) = 0$ (και $w \neq 0$) αν και μόνο αν το w ανήκει στην ευθεία m στο $\mathbb{C}$ εκτός του 0 με εξίσωση $\mathrm{Re}(\zeta w) = 0$. Επειδή $T(\infty) = 0$ και $T(0) = \infty$, βλέπουμε ότι το z ανήκει στην ευθεία $\widehat{l} = l \cup \{\infty\}$ στο $\widehat{\mathbb{C}}$ αν και μόνο αν το w ανήκει στην ευθεία $\widehat{m} = m \cup \{\infty\}$ στο $\widehat{\mathbb{C}}$.
Κατόπιν θεωρούμε κύκλο $C(z_0; r)$ ο οποίος περιέχει το 0, δηλαδή με $r = |z_0|$. Τότε το $z \neq 0$ ανήκει στον $C(z_0; r)$ αν και μόνο αν $|z - z_0| = r$ (και $z \neq 0$) αν και μόνο αν $|\frac{1}{w} - z_0| = r$ αν και μόνο αν $|1 - z_0 w| = r|w|$ αν και μόνο αν $1 - 2\,\mathrm{Re}(z_0 w) + |z_0|^2|w|^2 = r^2|w|^2$ αν και μόνο αν $\mathrm{Re}(z_0 w) = \frac{1}{2}$ αν και μόνο αν το w ανήκει στην ευθεία m με εξίσωση $\mathrm{Re}(z_0 w) = \frac{1}{2}$. Επειδή $T(0) = \infty$ έχουμε ότι το z ανήκει στον κύκλο $C(z_0; r)$ αν και μόνο αν το w ανήκει στην ευθεία $\widehat{m} = m \cup \{\infty\}$ στο $\widehat{\mathbb{C}}$.
Τέλος, θεωρούμε κύκλο $C(z_0; r)$ ο οποίος δεν περιέχει το 0, δηλαδή με $r \neq |z_0|$. Τότε το z ανήκει στον $C(z_0; r)$ αν και μόνο αν $|z - z_0| = r$ αν και μόνο αν $|\frac{1}{w} - z_0| = r$ αν και μόνο αν $|1 - z_0 w| = r|w|$ αν και μόνο αν $1 - 2\,\mathrm{Re}(z_0 w) + |z_0|^2|w|^2 = r^2|w|^2$ αν και μόνο αν $(|z_0|^2 - r^2)|w|^2 - 2\,\mathrm{Re}(z_0 w) + 1 = 0$ αν και μόνο αν $|w - \frac{\overline{z_0}}{|z_0|^2 - r^2}|^2 = \frac{r^2}{(|z_0|^2 - r^2)^2}$ αν και μόνο αν το w ανήκει στον κύκλο $C(\frac{\overline{z_0}}{|z_0|^2 - r^2}; \frac{r}{|z_0|^2 - r^2})$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.4. *Κάθε γ.κ.μ. είναι σύνθεση πεπερασμένου πλήθους μεταφορών, ομοιοθεσιών και αντιστροφών.*

Απόδειξη. Έστω $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$.
Αν $c = 0$, τότε $T(z) = a'z + b'$, όπου $a' = \frac{a}{d} \neq 0$ και $b' = \frac{b}{d}$. Αν θεωρήσουμε την ομοιοθεσία $T_1(z) = a'z$ και τη μεταφορά $T_2(z) = z + b'$, τότε

$$(T_2 \circ T_1)(z) = T_2(T_1(z)) = T_2(a'z) = a'z + b' = T(z).$$

Αν $c \neq 0$, τότε γράφουμε

$$T(z) = \frac{\frac{a}{c}(cz+d) + (b - \frac{ad}{c})}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2}\frac{1}{z+\frac{d}{c}}. \tag{6.3}$$

Αν πάρουμε τη μεταφορά $T_1(z) = z + \frac{d}{c}$, την αντιστροφή $T_2(z) = \frac{1}{z}$, την ομοιοθεσία $T_3(z) = \frac{bc-ad}{c^2}z$ και τη μεταφορά $T_4(z) = z + \frac{a}{c}$, τότε από την (6.3) συνεπάγεται $T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1 = T$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.5. *Κάθε γ.κ.μ. απεικονίζει γενικευμένους κύκλους στο $\widehat{\mathbb{C}}$ σε γενικευμένους κύκλους στο $\widehat{\mathbb{C}}$.*

Απόδειξη. Αυτό είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 6.4 και του ότι την συγκεκριμένη ιδιότητα έχουν οι μεταφορές, οι ομοιοθεσίες και η αντιστροφή, όπως είδαμε στα παραδείγματα 6.1.1, 6.1.2 και 6.1.3. □

Για να καταλάβουμε καλύτερα τις απεικονιστικές ιδιότητες των γ.κ.μ. ας θεωρήσουμε έναν γ.κ.μ. $w = T(z)$, έναν γενικευμένο κύκλο A στο z-επίπεδο $\widehat{\mathbb{C}}$, έναν γενικευμένο κύκλο B στο w-επίπεδο $\widehat{\mathbb{C}}$ και ας υποθέσουμε ότι ο T απεικονίζει τον A στον B. Τώρα, ο A χωρίζει το $\widehat{\mathbb{C}}$ σε δύο ανοικτά υποσύνολα A_+ και A_- του $\widehat{\mathbb{C}}$ με κοινό σύνορο τον A. Πράγματι, αν ο A είναι μια ευθεία $\widehat{l} = l \cup \{\infty\}$, τότε τα A_+ και A_- είναι τα δύο ανοικτά ημιεπίπεδα εκατέρωθεν της ευθείας l, ενώ, αν ο A είναι ένας κύκλος $C(z_0; r)$, τότε τα A_+ και A_- είναι ο ανοικτός δίσκος $D(z_0; r)$ και ο ανοικτός δακτύλιος (μαζί με το ∞) $R(z_0; r, +\infty) \cup \{\infty\}$. Το ίδιο ισχύει και για τον γενικευμένο κύκλο B: χωρίζει το $\widehat{\mathbb{C}}$ σε δύο ανοικτά υποσύνολα B_+ και B_- του $\widehat{\mathbb{C}}$ με κοινό σύνορο τον B. Παρατηρούμε, επίσης, ότι τα A_+, A_- είναι οι δύο συνεκτικές συνιστώσες του $\widehat{\mathbb{C}} \setminus A$ και, ομοίως, τα B_+, B_- είναι οι δύο συνεκτικές συνιστώσες του $\widehat{\mathbb{C}} \setminus B$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.6. *Έστω γ.κ.μ. T, γενικευμένος κύκλος A στο z-επίπεδο $\widehat{\mathbb{C}}$, γενικευμένος κύκλος B στο w-επίπεδο $\widehat{\mathbb{C}}$ και έστω ότι ο T απεικονίζει τον A στον B. Έστω $z_0 \in A_+$ και $w_0 = T(z_0) \in B_+$. Τότε ο T απεικονίζει το A_+ επί του B_+ και το A_- επί του B_-.*

Απόδειξη. Ο γ.κ.μ. $T : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ είναι συνεχής συνάρτηση στο $\widehat{\mathbb{C}}$.
Το A_+ είναι συνεκτικό, οπότε και το $T(A_+)$ είναι συνεκτικό. Επειδή $T(A_+) \subseteq \widehat{\mathbb{C}} \setminus B$, το $T(A_+)$ περιέχεται σε μία μόνο από τις συνεκτικές συνιστώσες B_+ και B_- του $\widehat{\mathbb{C}} \setminus B$. Επειδή $w_0 \in T(A_+)$ και $w_0 \in B_+$, συνεπάγεται ότι $T(A_+) \subseteq B_+$.
Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι $T(A_-) \subseteq B_+$ ή $T(A_-) \subseteq B_-$. Αν $T(A_-) \subseteq B_+$, τότε ο T απεικονίζει ολόκληρο το $\widehat{\mathbb{C}}$ στο $B_+ \cup B$. Αυτό είναι άτοπο διότι ο T απεικονίζει το $\widehat{\mathbb{C}}$ επί του $\widehat{\mathbb{C}}$. Άρα $T(A_-) \subseteq B_-$.
Τέλος, επειδή ο T απεικονίζει το $\widehat{\mathbb{C}}$ επί του $\widehat{\mathbb{C}}$, είναι σαφές ότι $T(A_+) = B_+$ και $T(A_-) = B_-$. □

Το τελευταίο αποτέλεσμα που θα δούμε είναι το εξής.

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.7. *Έστω ανά δύο διαφορετικά $z_1, z_2, z_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$ και ανά δύο διαφορετικά $w_1, w_2, w_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$. Τότε υπάρχει μοναδικός γ.κ.μ. T ώστε $T(z_j) = w_j$ για $j = 1, 2, 3$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τον γ.κ.μ. S ο οποίος, ανάλογα με το αν κάποιο από τα z_1, z_2, z_3 είναι ∞ ή όχι, έχει τον τύπο

$$S(z) = \begin{cases} \frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}\frac{z-z_1}{z-z_3}, & \text{αν } z_1, z_2, z_3 \neq \infty \\ \frac{z-z_1}{z_2-z_1}, & \text{αν } z_3 = \infty \\ \frac{z-z_1}{z-z_3}, & \text{αν } z_2 = \infty \\ \frac{z_2-z_3}{z-z_3}, & \text{αν } z_1 = \infty \end{cases}$$

Ο γ.κ.μ. S έχει την ιδιότητα: $S(z_1) = 0$, $S(z_2) = 1$, $S(z_3) = \infty$.
Ομοίως, υπάρχει ανάλογος γ.κ.μ. R έτσι ώστε $R(w_1) = 0$, $R(w_2) = 1$, $R(w_3) = \infty$.
Τώρα, ο γ.κ.μ. $T = R^{-1} \circ S$ έχει την ιδιότητα: $T(z_1) = w_1$, $T(z_2) = w_2$, $T(z_3) = w_3$.
Για να αποδείξουμε τη μοναδικότητα του T κάνουμε το εξής. Έστω ότι ο γ.κ.μ. T έχει την ιδιότητα: $T(z_1) = w_1$, $T(z_2) = w_2$, $T(z_3) = w_3$. Θεωρούμε τους S, R που βρήκαμε προηγουμένως και τότε ο γ.κ.μ. $Q = R \circ T \circ S^{-1}$ έχει την ιδιότητα: $Q(0) = 0$, $Q(1) = 1$, $Q(\infty) = \infty$. Επειδή $Q(\infty) = \infty$, συνεπάγεται ότι ο Q έχει τύπο $Q(z) = az + b$ με $a \neq 0$. Τώρα, από τις $Q(0) = 0$, $Q(1) = 1$ συνεπάγεται $a = 1$, $b = 0$ και άρα ο Q είναι ο ταυτοτικός γ.κ.μ. I με τύπο $I(z) = z$. Άρα $R \circ T \circ S^{-1} = I$ και, επομένως, $T = R^{-1} \circ S$. Άρα ο T είναι μοναδικός. $\square$

Όταν εφαρμόζουμε τα προηγούμενα, βοηθά να γνωρίζουμε ότι για κάθε τρία σημεία στο $\widehat{\mathbb{C}}$ ανά δύο διαφορετικά υπάρχει μοναδικός γενικευμένος κύκλος στο $\widehat{\mathbb{C}}$ ο οποίος τα περιέχει. Πράγματι, αν τα τρία σημεία είναι στο $\mathbb{C}$ και είναι συνευθειακά, τότε, προφανώς, υπάρχει μοναδική ευθεία l στο $\mathbb{C}$ (και άρα η ευθεία $\widehat{l} = l \cup \{\infty\}$ στο $\widehat{\mathbb{C}}$) η οποία τα περιέχει. Αν τα δύο σημεία είναι στο $\mathbb{C}$ και το τρίτο είναι το ∞, τότε υπάρχει μοναδική ευθεία l στο $\mathbb{C}$ η οποία περιέχει τα δύο σημεία του $\mathbb{C}$ και τότε η ευθεία $\widehat{l} = l \cup \{\infty\}$ στο $\widehat{\mathbb{C}}$ περιέχει τα δύο αυτά σημεία αλλά και το ∞. Τέλος, αν τα τρία σημεία είναι στο $\mathbb{C}$ και δεν είναι συνευθειακά, τότε υπάρχει μοναδικός κύκλος στο $\mathbb{C}$ ο οποίος τα περιέχει.

Παράδειγμα 6.1.4. Ο γ.κ.μ. ο οποίος απεικονίζει την τριάδα σημείων $i, 2, 1$ στην τριάδα σημείων $0, 1, \infty$ έχει τύπο

$$w = T(z) = \frac{2-1}{2-i}\,\frac{z-i}{z-1} = \frac{2+i}{5}\,\frac{z-i}{z-1} = \frac{(2+i)z + (1-2i)}{5z-5}.$$

Τα σημεία $i, 2, 1$ στο z-επίπεδο δεν είναι συνευθειακά, οπότε ανήκουν σε κάποιον κύκλο A. Τα σημεία $0, 1$ στο w-επίπεδο ανήκουν στον πραγματικό άξονα, δηλαδή στην ευθεία m με εξίσωση $\operatorname{Im} w = 0$. Επομένως, τα σημεία $0, 1, \infty$ ανήκουν στην ευθεία $\widehat{m} = m \cup \{\infty\}$ στο $\widehat{\mathbb{C}}$. Τώρα σκεφτόμαστε ότι ο T απεικονίζει τον κύκλο A στο z-επίπεδο σε κάποιον γενικευμένο κύκλο $T(A)$ στο w-επίπεδο. Επειδή ο A περιέχει τα $i, 2, 1$, ο $T(A)$ πρέπει να περιέχει τις εικόνες των $i, 2, 1$, δηλαδή τα $0, 1, \infty$. Άρα $T(A) = \widehat{m}$.
Αν θέλουμε να προσδιορίσουμε τον κύκλο $C(z_0; r)$ ο οποίος περιέχει τα σημεία $i, 2, 1$, βρίσκουμε τα z_0, r έτσι ώστε τα σημεία $i, 2, 1$ να ικανοποιούν την εξίσωση $|z - z_0| = r$. Απλώς έχουμε να λύσουμε ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις πραγματικούς αγνώστους: x_0, y_0, r.
Υπάρχει, όμως, και δεύτερος τρόπος να βρούμε την εξίσωση του κύκλου A. Πράγματι, έχουμε ότι το w ανήκει στην ευθεία m αν και μόνο αν $\operatorname{Im} w = 0$ αν και μόνο αν $\operatorname{Im} \frac{(2+i)z+(1-2i)}{5z-5} = 0$ (και $z \neq 1$) αν και μόνο αν (μετά από λίγες πράξεις) $|z|^2 - 3\operatorname{Re}((1-i)z) = -2$ (και $z \neq 1$) αν και μόνο αν $|z - \frac{3}{2}(1+i)|^2 = -2 + \frac{9}{4}|1+i|^2 = \frac{5}{2}$ (και $z \neq 1$) αν και μόνο αν το z ανήκει στον κύκλο $C(\frac{3}{2}(1+i); \sqrt{\frac{5}{2}})$ εκτός του σημείου 1. Επειδή το $z = 1$ απεικονίζεται στο $w = \infty$, έχουμε ότι το w ανήκει στην $\widehat{m}$ αν και μόνο αν το z ανήκει στο κύκλο $C(\frac{3}{2}(1+i); \sqrt{\frac{5}{2}})$.
Άρα $A = C(\frac{3}{2}(1+i); \sqrt{\frac{5}{2}})$.
Αν A_+ και A_- είναι, αντιστοίχως, ο ανοικτός δίσκος και ο εξωτερικός δακτύλιος στο z-επίπεδο που καθορίζονται από τον κύκλο A και αν m_+ και m_- είναι, αντιστοίχως, το άνω ημιεπίπεδο και το κάτω ημιεπίπεδο στο w-επίπεδο που καθορίζονται από την ευθεία m (τον πραγματικό άξονα), τότε ο T απεικονίζει το A_+ στο m_+ ή στο m_- και, αντιστοίχως, το A_- στο m_- ή στο m_+. Για να δούμε ποιό από αυτά ισχύει παίρνουμε οποιοδήποτε σημείο του A_+ ή του A_- και βρίσκουμε την εικόνα του. Το πιο εύκολο είναι το ∞ στο A_-. Βρίσκουμε $T(\infty) = \frac{2+i}{5}$ και είναι φανερό ότι αυτό ανήκει στο m_+. Άρα ο T απεικονίζει το A_- στο m_+ και το A_+ στο m_-.

Παράδειγμα 6.1.5. Για να βρούμε τον γ.κ.μ. ο οποίος απεικονίζει την τριάδα σημείων $0, 1, \infty$ στην τριάδα σημείων $i, \infty, -1$ βρίσκουμε πρώτα τον γ.κ.μ. ο οποίος απεικονίζει την τριάδα $i, \infty, -1$

στην τριάδα $0, 1, \infty$ και μετά τον αντιστρέφουμε.
Άρα αυτός ο γ.κ.μ. που ζητάμε είναι ο αντίστροφος του S με τύπο

$$z = S(w) = \frac{w-i}{w+1}.$$

Γράφοντας $z = \frac{w-i}{w+1}$ και λύνοντας ως προς w, βρίσκουμε $w = \frac{z+i}{-z+1}$. Άρα ο γ.κ.μ. που ζητάμε έχει τύπο

$$w = T(z) = \frac{z+i}{-z+1}.$$

Τα σημεία $0, 1$ ανήκουν στην ευθεία l, τον πραγματικό άξονα στο z-επίπεδο, οπότε τα σημεία $0, 1, \infty$ ανήκουν στην ευθεία $\widehat{l} = l \cup \{\infty\}$. Επίσης, τα σημεία $i, -1$ ανήκουν σε κάποια ευθεία m στο w-επίπεδο, οπότε τα σημεία $i, \infty, -1$ ανήκουν στην ευθεία $\widehat{m} = m \cup \{\infty\}$. Ο T απεικονίζει την $\widehat{l}$ σε κάποιο γενικευμένο κύκλο $T(\widehat{l})$. Επειδή τα σημεία $0, 1, \infty$ ανήκουν στην $\widehat{l}$, τα σημεία $i, \infty, -1$ πρέπει να ανήκουν στον $T(\widehat{l})$. Άρα $T(\widehat{l}) = \widehat{m}$.
Ένα w ανήκει στην ευθεία m αν και μόνο αν $\frac{w+1}{i+1} \in \mathbb{R}$ αν και μόνο αν $\mathrm{Im}\,\frac{w+1}{i+1} = 0$. Η m καθορίζει δύο ημιεπίπεδα: το m_+ και το m_- που περιέχουν τα w που ικανοποιούν τις $\mathrm{Im}\,\frac{w+1}{i+1} > 0$ και $\mathrm{Im}\,\frac{w+1}{i+1} < 0$, αντιστοίχως. Ομοίως, η ευθεία l στο z-επίπεδο καθορίζει το άνω ημιεπίπεδο l_+ και το κάτω ημιεπίπεδο l_-. Ο $z = i$ ανήκει στο l_+ και $w = T(i) = -1 + i$. Αυτό το σημείο w ικανοποιεί την $\mathrm{Im}\,\frac{w+1}{i+1} > 0$ και, επομένως, ο T απεικονίζει το l_+ στο m_+ και το l_- στο m_-.

Ασκήσεις.

6.1.1. Βρείτε γ.κ.μ T τέτοιον ώστε $T(1) = i$, $T(i) = 0$, $T(-1) = -i$. Πού απεικονίζει ο T τον κύκλο $C(0; 1)$; τον ανοικτό δίσκο $D(0; 1)$; τον ανοικτό δακτύλιο $R(0; 1, +\infty)$;

6.1.2. Βρείτε γ.κ.μ. T τέτοιον ώστε $T(D(0; 1)) = \{z \mid \mathrm{Im}\, z > 0\}$, $T(i) = 1$, $T(1) = 0$, $T(a) = -1$, όπου $a \in C(0; 1)$. Υπάρχει περιορισμός για τη θέση του a στον $C(0; 1)$;

6.1.3. [α] Έστω γ.κ.μ. με τύπους $T_1(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}$ και $T_2(z) = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}$. Αποδείξτε ότι οι T_1, T_2 ταυτίζονται ως συναρτήσεις αν και μόνο αν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ώστε $a_2 = \lambda a_1$, $b_2 = \lambda b_1$, $c_2 = \lambda c_1$, $d_2 = \lambda d_1$.
[β] Αποδείξτε ότι ο τύπος κάθε γ.κ.μ. T μπορεί να γραφτεί $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ με $ad - bc = 1$.

6.1.4. Το $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ χαρακτηρίζεται **σταθερό σημείο** ενός γ.κ.μ. T αν $T(z) = z$. Αν ο γ.κ.μ T δεν είναι ο ταυτοτικός γ.κ.μ. (οπότε θα είχε άπειρα σταθερά σημεία), αποδείξτε ότι ο T έχει ένα ή δύο σταθερά σημεία στο $\widehat{\mathbb{C}}$. Σε κάθε περίπτωση, ποιές είναι οι εικόνες μέσω του T των γενικευμένων κύκλων οι οποίοι διέρχονται από τα σταθερά σημεία του T;
Εφαρμόστε τα προηγούμενα στους τέσσερις γ.κ.μ. T με τύπους $T(z) = z + 2$, $T(z) = 2z - 1$, $T(z) = \frac{z-1}{z+1}$ και $T(z) = \frac{3z-4}{z-1}$.

6.1.5. [α] Έστω κύκλος $C(z_0; r)$. Δυο σημεία $a, b \in \widehat{\mathbb{C}}$ λέμε ότι είναι **συμμετρικά** ως προς τον $C(z_0; r)$ αν είτε $a = z_0$, $b = \infty$ είτε $a = \infty$, $b = z_0$ είτε τα $a, b \in \mathbb{C}$ είναι πάνω στην ίδια ημιευθεία με κορυφή το z_0 και $|a - z_0||b - z_0| = r^2$. Παρατηρήστε ότι είτε τα a, b ταυτίζονται με ένα, το ίδιο, σημείο του $C(z_0; r)$ είτε τα a, b βρίσκονται σε διαφορετικές μεριές του $C(z_0; r)$. Δοθέντος του $a \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{z_0, \infty\}$, περιγράψτε γεωμετρική κατασκευή "με κανόνα και διαβήτη" του συμμετρικού του, $b \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{z_0, \infty\}$, ως προς τον $C(z_0; r)$.
Αποδείξτε ότι τα a, b είναι συμμετρικά ως προς τον $C(z_0; r)$ αν και μόνο αν $b = z_0 + \frac{r^2}{\overline{a} - \overline{z_0}}$.

[β] Έστω ευθεία l και δύο σημεία $z_1, z_2 \in l$. Δυο σημεία $a, b \in \widehat{\mathbb{C}}$ λέμε ότι είναι **συμμετρικά** ως προς την ευθεία $\widehat{l} = l \cup \{\infty\}$ στο $\widehat{\mathbb{C}}$ αν είτε $a = b = \infty$ είτε τα $a, b \in \mathbb{C}$ είναι συμμετρικά ως προς την l. Αποδείξτε ότι τα a, b είναι συμμετρικά ως προς την $\widehat{l}$ αν και μόνο αν $b = z_1 + \frac{z_2 - z_1}{\overline{z_2} - \overline{z_1}}(\overline{a} - \overline{z_1})$.

[γ] Έστω γ.κ.μ. $w = T(z)$ και γενικευμένοι κύκλοι A στο z-επίπεδο $\widehat{\mathbb{C}}$ και B στο w-επίπεδο $\widehat{\mathbb{C}}$. Αποδείξτε ότι, αν ο T απεικονίζει τον A στον B, τότε ο T απεικονίζει σημεία συμμετρικά ως προς τον A σε σημεία συμμετρικά ως προς τον B.
[δ] Βρείτε γ.κ.μ. T ώστε $T(C(0; 1)) = C(i; 3)$, $T(i) = 3 + i$, $T(\frac{1}{2}) = 0$.

6.1.6. Ένας γ.κ.μ. $w = T(z)$ χαρακτηρίζεται **πραγματικός** αν απεικονίζει την πραγματική ευθεία (μαζί με το ∞) στο z-επίπεδο $\widehat{\mathbb{C}}$ στην πραγματική ευθεία (μαζί με το ∞) στο w-επίπεδο $\widehat{\mathbb{C}}$.

[α] Αποδείξτε ότι ο γ.κ.μ. T είναι πραγματικός αν και μόνο αν υπάρχουν $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ με $ad - bc \neq 0$ ώστε ο τύπος του T να γράφεται $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$.

[β] Αν ο γ.κ.μ. T είναι πραγματικός και αν ο τύπος του είναι $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, όπου $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ και $ad - bc \neq 0$, τότε ορίζουμε $\operatorname{sign} T$ να είναι το πρόσημο της παράστασης $ad - bc$. Αποδείξτε ότι ο ορισμός είναι καλός, χρησιμοποιώντας την άσκηση 6.1.3[α].

[γ] Αποδείξτε ότι, αν ο γ.κ.μ. T είναι πραγματικός, τότε και ο T^{-1} είναι πραγματικός και, αν οι γ.κ.μ. S, T είναι πραγματικοί, τότε και ο $S \circ T$ είναι πραγματικός. Επίσης: $\operatorname{sign} T^{-1} = \operatorname{sign} T$ και $\operatorname{sign}(S \circ T) = \operatorname{sign} S \, \operatorname{sign} T$.

[δ] Έστω πραγματικός γ.κ.μ. T. Αποδείξτε ότι ο T απεικονίζει το άνω ημιεπίπεδο στο άνω ημιεπίπεδο (και το κάτω στο κάτω) αν και μόνο αν $\operatorname{sign} T = +1$ και ότι ο T απεικονίζει το άνω ημιεπίπεδο στο κάτω ημιεπίπεδο (και το κάτω στο άνω) αν και μόνο αν $\operatorname{sign} T = -1$.

6.1.7. [α] Αν $z_0 \in D(0;1)$ και $|\lambda| = 1$, αποδείξτε ότι ο γ.κ.μ. T με τύπο $T(z) = \lambda \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z}$ απεικονίζει τον κύκλο $C(0;1)$ στον εαυτό του και το z_0 στο 0. Πού απεικονίζει ο T το $D(0;1)$ και πού απεικονίζει το $R(0;1,+\infty) \cup \{\infty\}$;

[β] Αποδείξτε ότι αν ο γ.κ.μ. T απεικονίζει τον κύκλο $C(0;1)$ στον εαυτό του και το $z_0 \in D(0;1)$ στο 0, τότε υπάρχει λ με $|\lambda| = 1$ ώστε ο τύπος του T να είναι $T(z) = \lambda \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z}$.

[γ] Έστω $a, b \in D(0;1)$. Αποδείξτε ότι ο πιο γενικός γ.κ.μ. T που απεικονίζει τον κύκλο $C(0;1)$ στον εαυτό του και το a στο b είναι ο $w = T(z)$, όπου $\frac{w - b}{1 - \overline{b} w} = \lambda \frac{z - b}{1 - \overline{a} z}$ για κάποιο λ με $|\lambda| = 1$. (Το λ είναι σταθερό ως προς τα z, w.)

6.1.8. Έστω $H_+ = \{z \,|\, \operatorname{Im} z > 0\}$ και $H_- = \{z \,|\, \operatorname{Im} z < 0\}$ το άνω ημιεπίπεδο και το κάτω ημιεπίπεδο του z-επιπέδου.

[α] Αν $z_0 \in H_+$ και $|\lambda| = 1$, αποδείξτε ότι ο γ.κ.μ. T με τύπο $w = T(z) = \lambda \frac{z - z_0}{z - \overline{z_0}}$ απεικονίζει την πραγματική ευθεία $\{z \,|\, \operatorname{Im} z = 0\} \cup \{\infty\}$ του z-επιπέδου $\widehat{\mathbb{C}}$ στον κύκλο $C(0;1)$ του w-επιπέδου $\widehat{\mathbb{C}}$ και το z_0 στο 0. Πού απεικονίζει ο T το H_+ και πού απεικονίζει το H_-;

[β] Αποδείξτε ότι αν ο γ.κ.μ. T απεικονίζει την πραγματική ευθεία $\{z \,|\, \operatorname{Im} z = 0\} \cup \{\infty\}$ του z-επιπέδου $\widehat{\mathbb{C}}$ στον κύκλο $C(0;1)$ του w-επιπέδου $\widehat{\mathbb{C}}$ και το $z_0 \in H_+$ στο 0, τότε υπάρχει λ με $|\lambda| = 1$ ώστε ο τύπος του T να είναι $T(z) = \lambda \frac{z - z_0}{z - \overline{z_0}}$.

6.1.9. Έστω ανά δύο διαφορετικά $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \widehat{\mathbb{C}}$. Ορίζουμε τον **διπλό λόγο** των z_1, z_2, z_3, z_4 (με αυτήν τη σειρά) με τον τύπο

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \begin{cases} \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}, & \text{αν } z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C} \\ \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}, & \text{αν } z_1 = \infty \\ \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4}, & \text{αν } z_2 = \infty \\ \frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4}, & \text{αν } z_3 = \infty \\ \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}, & \text{αν } z_4 = \infty \end{cases}$$

[α] Αποδείξτε ότι για κάθε γ.κ.μ. T και για κάθε ανά δύο διαφορετικά $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \widehat{\mathbb{C}}$ ισχύει $(T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4)) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$.

[β] Αποδείξτε ότι τα ανά δύο διαφορετικά $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \widehat{\mathbb{C}}$ ανήκουν στον ίδιο γενικευμένο κύκλο αν και μόνο αν $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

[γ] Αν $(z_1, z_2, z_3, z_4) = \lambda$, βρείτε όλες τις τιμές (συναρτήσει του λ) που προκύπτουν για τον διπλό λόγο μετά από όλες τις αναδιατάξεις των z_1, z_2, z_3, z_4.

6.2 Η εκθετική συνάρτηση.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ορίζουμε την* **εκθετική συνάρτηση**

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

με τύπο

$$\exp z = e^x(\cos y + i \sin y) \qquad z = x + iy.$$

Αν $z \in \mathbb{R}$, δηλαδή αν $z = x + i0$, τότε $\exp z = e^x(\cos 0 + i \sin 0) = e^x = e^z$. Επομένως, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το σύμβολο e^z αντί του $\exp z$ χωρίς κίνδυνο αντίφασης ανάμεσα στο σύμβολο e^z όπως το ορίσαμε μόλις τώρα και στο σύμβολο e^z όπως το έχουμε ορίσει στον Απειροστικό Λογισμό στην περίπτωση που το z είναι πραγματικό. Δηλαδή, ορίζουμε

$$e^z = \exp z = e^x(\cos y + i \sin y) \qquad z = x + iy.$$

Ας δούμε μερικές ιδιότητες. Αν $z = x + iy$, τότε $|e^z| = |e^x||\cos y + i \sin y| = e^x$, δηλαδή

$$|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$$

και $\arg e^z = y + k2\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$, δηλαδή

$$\arg e^z = \operatorname{Im} z + k2\pi \qquad \text{με } k \in \mathbb{Z}.$$

Επίσης $\overline{e^z} = e^x(\cos y - i \sin y) = e^x(\cos(-y) + i \sin(-y)) = e^{\overline{z}}$, οπότε

$$\overline{e^z} = e^{\overline{z}}.$$

Μια βασική ιδιότητα του e^z είναι η εξής. Αν $z_1 = x_1 + iy_1$ και $z_2 = x_2 + iy_2$, τότε, βάσει των ιδιοτήτων της εκθετικής συνάρτησης στο $\mathbb{R}$ και των τριγωνομετρικών συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$, έχουμε

$$\begin{aligned} e^{z_1}e^{z_2} &= e^{x_1}(\cos y_1 + i \sin y_1)e^{x_2}(\cos y_2 + i \sin y_2) \\ &= e^{x_1+x_2}(\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)) = e^{z_1+z_2}, \end{aligned}$$

διότι $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$. Άρα

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}.$$

Μια άλλη βασική ιδιότητα είναι η εξής.

$$e^{z_2} = e^{z_1} \qquad \Leftrightarrow \qquad z_2 - z_1 = k2\pi i \quad \text{με } k \in \mathbb{Z}.$$

Πράγματι, αν $z_2 - z_1 = k2\pi i$ με $k \in \mathbb{Z}$, τότε

$$e^{z_2} = e^{z_1}e^{k2\pi i} = e^{z_1}(\cos k2\pi + i \sin k2\pi) = e^{z_1}.$$

Αντιστρόφως, έστω $e^{z_2} = e^{z_1}$ και $z_2 - z_1 = x + iy$. Τότε

$$e^x(\cos y + i \sin y) = e^{z_2 - z_1} = \frac{e^{z_2}}{e^{z_1}} = 1$$

και, επομένως,

$$e^x = 1, \qquad \cos y = 1, \qquad \sin y = 0.$$

Συνεπάγεται $x = 0$ και $y = k2\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$. Άρα $z_2 - z_1 = k2\pi i$ με $k \in \mathbb{Z}$.

Βλέπουμε, δηλαδή, ότι η εκθετική συνάρτηση είναι περιοδική με περίοδο $2\pi i$ και, επομένως, δεν είναι ένα-προς-ένα.

Ο αριθμός 0 δεν είναι τιμή της εκθετικής συνάρτησης, διότι για κάθε $z = x + iy$ είναι $|e^z| = e^x > 0$. Από την άλλη μεριά, κάθε $w \neq 0$ είναι τιμή της εκθετικής συνάρτησης. Για να το αποδείξουμε λύνοντας την $e^z = w$ ως προς z, θεωρούμε οποιαδήποτε πολική αναπαράσταση

$$w = r(\cos\theta + i \sin\theta)$$

του w και, αφού γράψουμε $z = x + iy$, έχουμε

$$
\begin{gathered}
e^z = w \\
\Updownarrow \\
e^x(\cos y + i\sin y) = r(\cos\theta + i\sin\theta) \\
\Updownarrow \\
e^x = r, \qquad \cos y = \cos\theta, \qquad \sin y = \sin\theta \\
\Updownarrow \\
x = \ln r, \qquad y = \theta + k2\pi \quad \text{με } k \in \mathbb{Z},
\end{gathered}
$$

όπου με $\ln : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ συμβολίζουμε τη γνωστή από τον Απειροστικό Λογισμό λογαριθμική συνάρτηση στο $(0, +\infty)$. Άρα, για κάθε $w \neq 0$, η εξίσωση $e^z = w$ έχει τις άπειρες λύσεις

$$z = \ln r + i(\theta + 2\pi k) \qquad \text{με } k \in \mathbb{Z}$$

ή, ισοδύναμα,

$$z = \ln|w| + i\arg w.$$

Συνοψίζουμε:

$$e^z = w \qquad \Leftrightarrow \qquad z = \ln|w| + i\arg w.$$

Θα μελετήσουμε τώρα την αναλυτικότητα της εκθετικής συνάρτησης

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της $\exp z$ είναι

$$u(x, y) = \operatorname{Re}\exp(x, y) = e^x \cos y, \qquad v(x, y) = \operatorname{Im}\exp(x, y) = e^x \sin y.$$

Άρα οι u, v έχουν μερικές παραγώγους

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = e^x \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y,$$

οι οποίες είναι συνεχείς και ικανοποιούν τις εξισώσεις (C-R) στο $\mathbb{C}$. Επομένως, η exp είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$.

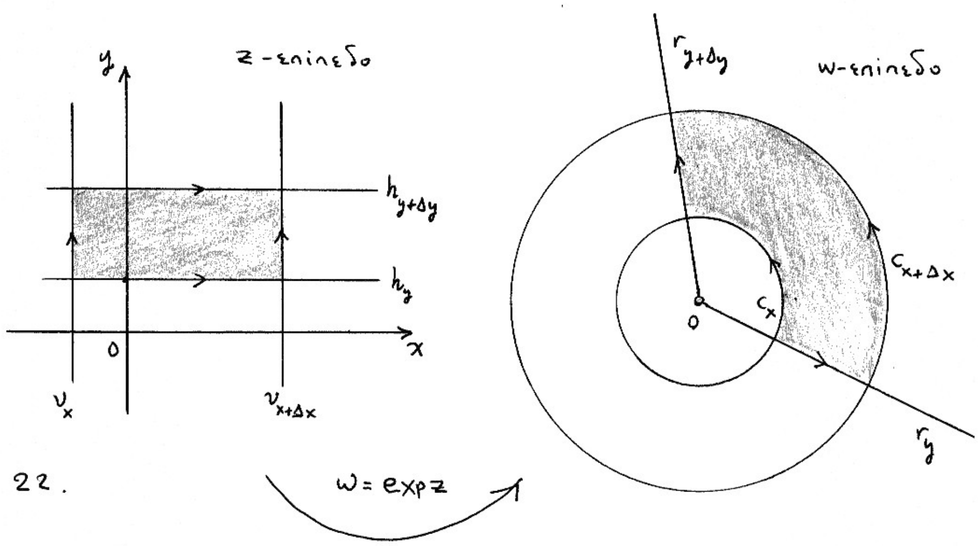
Για τον υπολογισμό της παραγώγου της exp γράφουμε

$$\exp' z = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^x(\cos y + i\sin y) = \exp z.$$

Άρα η παράγωγος της $\exp z$ ταυτίζεται με την ίδια την exp.

Θα δούμε, τώρα, πώς η εκθετική συνάρτηση $w = e^z$ απεικονίζει διάφορα σημεία και σχήματα του z-επιπέδου σε σημεία και σχήματα του w-επιπέδου. Δείτε το σχήμα 22. Συμβολίζουμε: $z = x + iy$ και $w = u + iv$.

Αν το y είναι σταθερό και το x διατρέχει το $\mathbb{R}$, δηλαδή αν το $z = x + iy$ διατρέχει την οριζόντια ευθεία h_y στο z-επίπεδο η οποία τέμνει τον y-άξονα στο σημείο $(0, y)$ τότε το $w = e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$ διατρέχει την ημιευθεία r_y στο w-επίπεδο, η οποία έχει κορυφή το 0 (δεν περιέχει το 0) και σχηματίζει γωνία y με τον θετικό u-ημιάξονα. Επίσης, αν το σημείο z κινείται πάνω στην οριζόντια ευθεία h_y από τα αριστερά προς τα δεξιά, δηλαδή αν το x αυξάνεται από το $-\infty$ προς το $+\infty$, τότε το αντίστοιχο σημείο $w = e^z$ κινείται πάνω στην ημιευθεία r_y από το 0 προς το ∞. Αν το y αυξηθεί κατά Δy, δηλαδή αν η οριζόντια ευθεία h_y μετακινηθεί προς τα πάνω, τότε η αντίστοιχη ημιευθεία r_y θα περιστραφεί με τη θετική φορά περιστροφής γύρω από το 0 κατά γωνία Δy. Αν $0 < \Delta y < 2\pi$, τότε η οριζόντια ζώνη στο z-επίπεδο ανάμεσα στις ευθείες h_y και $h_{y+\Delta y}$ θα απεικονιστεί στην γωνία στο w-επίπεδο ανάμεσα στις ημιευθείες r_y και $r_{y+\Delta y}$ (η οποία διαγράφεται πηγαίνοντας από την πρώτη ημιευθεία στη δεύτερη με τη θετική φορά περιστροφής). Αν $\Delta y = 2\pi$, τότε οι ημιευθείες r_y και $r_{y+\Delta y}$ συμπίπτουν και τότε η (ανοικτή) οριζόντια ζώνη στο z-επίπεδο ανάμεσα στις ευθείες h_y και $h_{y+\Delta y}$ θα απεικονιστεί σε ολόκληρο το w-επίπεδο εκτός της ημιευθείας $r_y = r_{y+\Delta y}$ (και εκτός του 0, φυσικά). Αν η ζώνη περιέχει μια τουλάχιστον από τις συνοριακές ευθείες της, τότε η εικόνα της θα είναι ολόκληρο το w-επίπεδο (εκτός του 0, φυσικά). Αν $\Delta y > 2\pi$, τότε η οριζόντια ζώνη στο z-επίπεδο ανάμεσα στις ευθείες h_y και $h_{y+\Delta y}$ θα απεικονιστεί σε ολόκληρο το w-επίπεδο (εκτός του 0, φυσικά) και "με επικάλυψη".



Σx 22.

Κατακόρυφη απόσταση των $h_y, h_{y+\Delta y} = \Delta y$

Γωνία ανάμεσα στις $r_y, r_{y+\Delta y} = \Delta y$ $(0 < \Delta y < 2\pi)$

Οριζόντια απόσταση των $v_x, v_{x+\Delta x} = \Delta x$

Λόγος ακτίνων των $c_x, c_{x+\Delta x} = e^{\Delta x}$

Αν το $x \in \mathbb{R}$ είναι σταθερό και το y διατρέχει το $\mathbb{R}$, δηλαδή αν το σημείο $z = x + iy$ διατρέχει την κατακόρυφη ευθεία v_x στο z-επίπεδο η οποία τέμνει τον x-άξονα στο σημείο $(x, 0)$, τότε το $w = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ διατρέχει τον κύκλο $C(0; e^x)$, ας τον πούμε c_x, στο w-επίπεδο. Επίσης, αν το σημείο z κινείται πάνω στην κατακόρυφη ευθεία v_x από τα κάτω προς τα πάνω, δηλαδή αν το y αυξάνεται από το $-\infty$ προς το $+\infty$, τότε το αντίστοιχο σημείο $w = e^z$ κινείται πάνω στον κύκλο c_x διαγράφοντάς τον άπειρες φορές με τη θετική φορά περιστροφής. Αν το y αυξάνεται σε ένα διάστημα μήκους 2π, τότε το σημείο $w = e^z$ διαγράφει ολόκληρο τον κύκλο c_x μια φορά με τη θετική φορά περιστροφής. Αν το y αυξάνεται σε ένα διάστημα μήκους $\Delta y < 2\pi$, τότε το $w = e^z$ διαγράφει με τη θετική φορά περιστροφής ένα τόξο του κύκλου γωνίας Δy. Ενώ, αν $\Delta y > 2\pi$, τότε το $w = e^z$ διαγράφει με τη θετική φορά περιστροφής ολόκληρο τον κύκλο c_x "με επικάλυψη". Αν το x αυξηθεί κατά Δx, δηλαδή αν η κατακόρυφη ευθεία v_x μετακινηθεί προς τα δεξιά, τότε ο αντίστοιχος κύκλος c_x με ακτίνα e^x θα μεγαλώσει και θα γίνει ο κύκλος $c_{x+\Delta x}$ με ακτίνα $e^{x+\Delta x} = e^x e^{\Delta x}$. Η αρχική ακτίνα θα πολλαπλασιαστεί κατά τον παράγοντα $e^{\Delta x} > 1$. Η κατακόρυφη ζώνη στο z-επίπεδο ανάμεσα στις ευθείες v_x και $v_{x+\Delta x}$ θα απεικονιστεί στον δακτύλιο στο w-επίπεδο ανάμεσα στους κύκλους c_x και $c_{x+\Delta x}$.

Τα προηγούμενα μπορούν να συνδυαστούν. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο

$$\Pi = \Pi(x_1, y_1; x_2, y_2) = \{x + iy \,|\, x_1 < x < x_2, y_1 < y < y_2\}$$

στο z-επίπεδο με πλευρές παράλληλες στους άξονες. Το Π είναι η τομή της οριζόντιας ζώνης ανάμεσα στις οριζόντιες ευθείες h_{y_1} και h_{y_2} και της κατακόρυφης ζώνης ανάμεσα στις κατακόρυφες ευθείες v_{x_1} και v_{y_2}. Αν υποθέσουμε ότι $y_2 - y_1 < 2\pi$, τότε το Π θα απεικονιστεί στο w-επίπεδο στο "κυκλικό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο"

$$R = R(0; e^{x_1}, e^{x_2}; y_1, y_2) = \{re^{i\theta} \,|\, e^{x_1} < r < e^{x_2}, y_1 < \theta < y_2\},$$

το οποίο είναι η τομή της γωνίας ανάμεσα στις ημιευθείες r_{y_1} και r_{y_2} (η οποία διαγράφεται πηγαίνοντας από την πρώτη ημιευθεία στη δεύτερη με τη θετική φορά περιστροφής) και του δακτύλιου ανάμεσα στους κύκλους c_{x_1} και c_{x_2} (με ακτίνες e^{x_1} και e^{x_2}, αντιστοίχως). Αν υποθέσουμε ότι $y_2 - y_1 = 2\pi$, τότε το "κυκλικό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο" R θα είναι ο δακτύλιος

$$R(0; e^{x_1}, e^{x_2}) = \{re^{i\theta} \,|\, e^{x_1} < r < e^{x_2}\}$$

χωρίς το ευθύγραμμο τμήμα που ανήκει στην κοινή ημιευθεία $r_{y_1} = r_{y_2}$. Φυσικά, αν το αρχικό Π στο z-επίπεδο περιέχει μια τουλάχιστον από τις οριζόντιες πλευρές του, τότε η εικόνα R στο w-επίπεδο θα είναι ολόκληρος ο δακτύλιος $R = R(0; e^{x_1}, e^{x_2})$. Τέλος, αν υποθέσουμε ότι $y_2 - y_1 > 2\pi$, τότε το αρχικό Π στο z-επίπεδο θα απεικονιστεί στο w-επίπεδο σε ολόκληρο τον δακτύλιο $R = R(0; e^{x_1}, e^{x_2})$ "με επικάλυψη".

Ασκήσεις.

6.2.1. Αποδείξτε ότι ισχύει $|e^z - 1| \leq e^{|z|} - 1 \leq |z|e^{|z|}$ για κάθε z.

6.2.2. Έστω $z \to \infty$ πάνω σε μια οποιαδήποτε ημιευθεία. Ανάλογα με την ημιευθεία, μελετήστε την ύπαρξη του $\lim e^z$ στο $\widehat{\mathbb{C}}$. Από ποιό χαρακτηριστικό της ημιευθείας εξαρτάται η ύπαρξη και η τιμή του ορίου;

6.2.3. Βρείτε τις εικόνες μέσω της εκθετικής συνάρτησης των: $\{x+iy \,|\, a < x < b, \theta < y < \theta+\pi\}$, $\{x+iy \,|\, a < x < b, \theta < y < \theta+2\pi\}$, $\{x+iy \,|\, x < b, \theta < y < \theta+\pi\}$, $\{x+iy \,|\, x < b, \theta < y < \theta+2\pi\}$, $\{x+iy \,|\, a < x, \theta < y < \theta+\pi\}$, $\{x+iy \,|\, a < x, \theta < y < \theta+2\pi\}$.

6.2.4. Κάθε οριζόντια ευθεία και κάθε κατακόρυφη ευθεία στο z-επίπεδο τέμνονται κάθετα. Επίσης, κάθε ημιευθεία με κορυφή το 0 και κάθε κύκλος με κέντρο το 0 στο w-επίπεδο τέμνονται κάθετα. Πώς σχετίζονται τα προηγούμενα με την ιδιότητα συμμορφίας της $w = e^z$;

6.2.5. Έστω ότι η $f = u + iv$ είναι αναλυτική στο ανοικτό σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Αποδείξτε ότι οι $e^u \cos v$ και $e^u \sin v$ είναι αρμονικές στο Ω και μάλιστα ότι η $e^u \sin v$ είναι αρμονική συζυγής της $e^u \cos v$ στο Ω.

6.2.6. Ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

[α] Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις αυτές αποτελούν επεκτάσεις στο $\mathbb{C}$ των γνωστών τριγωνομετρικών συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$. Ποιά είναι τα πεδία ορισμού τους; Ποιά είναι τα σύνολα των περιόδων τους; Αποδείξτε τις σχέσεις

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1,$$

$$\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w, \quad \cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w,$$

$$|\cos(x+iy)|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y, \quad |\sin(x+iy)|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y.$$

[β] Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις αυτές είναι αναλυτικές στα πεδία ορισμού τους και βρείτε τις παραγώγους τους.

[γ] Μελετήστε τη συνάρτηση $w = \sin z$ στην κατακόρυφη ζώνη $\{x+iy \,|\, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\}$ και τη συνάρτηση $w = \cos z$ στην κατακόρυφη ζώνη $\{x+iy \,|\, 0 < x < \pi\}$. Πώς απεικονίζονται τα διάφορα οριζόντια ευθύγραμμα τμήματα (μήκους π) και οι κατακόρυφες ευθείες αυτών των δυο ζωνών από τις αντίστοιχες δυο συναρτήσεις;

6.3 Η λογαριθμική συνάρτηση.

Στην προηγούμενη ενότητα είδαμε, για κάθε $w \neq 0$, την ισοδυναμία

$$e^z = w \qquad \Leftrightarrow \qquad z = \ln|w| + i \arg w.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Συμβολίζουμε*

$$\log w = \ln|w| + i \arg w \qquad \textit{για κάθε } w \neq 0$$

και το σύμβολο $\log w$ *ονομάζεται* **λογάριθμος** *του* w.

Επειδή το $\arg w$ δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένο και έχει άπειρες τιμές οι οποίες ανά δύο διαφέρουν κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π, συνεπάγεται ότι και το $\log w$ δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένο και έχει άπειρες τιμές οι οποίες ανά δύο διαφέρουν κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του $i2\pi$. Όλες οι τιμές του $z = \log w$ έχουν το ίδιο πραγματικό μέρος $x = \ln|w|$ και επομένως βρίσκονται πάνω στην ίδια κατακόρυφη ευθεία v_x με εξίσωση $x = \ln|w|$. Αυτές οι τιμές του $\log w$ αποτελούν σημεία της ευθείας v_x και τα βρίσκουμε αν βρούμε ένα από αυτά: όλα τα άλλα προκύπτουν από αυτό που βρήκαμε πηγαίνοντας προς τα πάνω και προς τα κάτω κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π. Επομένως, κάθε κατακόρυφο ευθ. τμήμα πάνω στην ευθεία v_x, το οποίο έχει μήκος 2π και περιέχει ένα μόνο από τα δυο άκρα του, περιέχει ακριβώς μια τιμή-σημείο του $z = \log w$. Επομένως, κάθε οριζόντια ζώνη, η οποία έχει κατακόρυφο πλάτος 2π και η οποία περιέχει μόνο μία από τις δυο συνοριακές ευθείες της (την πάνω ή την κάτω), περιέχει, για κάθε $w \neq 0$, ακριβώς μία τιμή-σημείο του $z = \log w$. Ειδικότερα, αν πάρουμε οποιοδήποτε θ_0 και θεωρήσουμε την οριζόντια ζώνη

$$Z_{\theta_0} = \{x + iy \,|\, \theta_0 < y \leq \theta_0 + 2\pi\} \quad \text{ή} \quad Z_{\theta_0} = \{x + iy \,|\, \theta_0 \leq y < \theta_0 + 2\pi\},$$

τότε στην ζώνη Z_{θ_0} περιέχεται ακριβώς μια τιμή του $z = \log w = \ln|w| + i \arg w$: εκείνη που έχει φανταστικό μέρος y ίσο με εκείνη την (μοναδική) τιμή θ του $\arg w$ για την οποία ισχύει, αντιστοίχως,

$$\theta_0 < \theta \leq \theta_0 + 2\pi \quad \text{ή} \quad \theta_0 \leq \theta < \theta_0 + 2\pi.$$

Αν επιλέξουμε την ζώνη που ορίζεται από την γωνία $\theta_0 = -\pi$ και περιέχει την πάνω συνοριακή ευθεία της, δηλαδή την ζώνη

$$Z_{-\pi} = \{x + iy \,|\, -\pi < y \leq \pi\},$$

τότε εκείνη τη (μοναδική) τιμή του $z = \log w$, η οποία περιέχεται σε αυτήν την ζώνη, την ξεχωρίζουμε με τον εξής ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Συμβολίζουμε*

$$\operatorname{Log} w = \ln|w| + i \operatorname{Arg} w \qquad \textit{για κάθε } \ w \neq 0$$

και το σύμβολο $\operatorname{Log} w$ *ονομάζεται* **πρωτεύων λογάριθμος** *ή* **πρωτεύουσα τιμή του λογαρίθμου** *του* w.

Πράγματι, το $\operatorname{Log} w$ είναι ακριβώς εκείνη η τιμή του $\log w$ που περιέχεται στην ζώνη $Z_{-\pi}$ αφού για το φανταστικό μέρος του ισχύει $-\pi < \operatorname{Arg} w \leq \pi$.

Επιστρέφοντας στην αρχική ισοδυναμία, βλέπουμε ότι γράφεται

$$e^z = w \qquad \Leftrightarrow \qquad z = \log w.$$

Δηλαδή, *οι τιμές του* $\log w$ *είναι ακριβώς όλες οι λύσεις της εξίσωσης* $e^z = w$

Παράδειγμα 6.3.1. Οι τιμές του λογαρίθμου του 1 είναι $\log 1 = \ln|1| + i(0 + k2\pi) = i2k\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$. Από αυτές η πρωτεύουσα τιμή είναι $\text{Log}\, 1 = \ln|1| + i0 = 0$.
Οι τιμές του λογαρίθμου του -1 είναι $\log(-1) = \ln|-1| + i(\pi + k2\pi) = i(2k+1)\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$. Από αυτές η πρωτεύουσα τιμή είναι $\text{Log}(-1) = \ln|-1| + i\pi = i\pi$.
Οι τιμές του λογαρίθμου του i είναι $\log i = \ln|i| + i(\frac{\pi}{2} + k2\pi) = i(2k + \frac{1}{2})\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$. Από αυτές η πρωτεύουσα τιμή είναι $\text{Log}\, i = \ln|i| + i\frac{\pi}{2} = i\frac{\pi}{2}$.
Οι τιμές του λογαρίθμου του $-i$ είναι $\log(-i) = \ln|-i| + i(-\frac{\pi}{2} + k2\pi) = i(2k - \frac{1}{2})\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$. Από αυτές η πρωτεύουσα τιμή είναι $\text{Log}(-i) = \ln|-i| + i(-\frac{\pi}{2}) = -i\frac{\pi}{2}$.

Ισχύει η εξής βασική ιδιότητα του λογαρίθμου:

$$\log(z_1z_2) = \log z_1 + \log z_2 \qquad \text{για } z_1, z_2 \neq 0. \tag{6.4}$$

Η απόδειξη βασίζεται στην αντίστοιχη ιδιότητα της συνάρτησης ln στο $(0, +\infty)$ και στην (1.3):

$$\log(z_1z_2) = \ln|z_1z_2| + i\arg(z_1z_2) = \ln|z_1| + \ln|z_2| + i\arg z_1 + i\arg z_2 = \log z_1 + \log z_2.$$

Το νόημα της (6.4) είναι το εξής: το άθροισμα οποιασδήποτε τιμής του $\log z_1$ και οποιασδήποτε τιμής του $\log z_2$ είναι τιμή του $\log(z_1z_2)$ και, αντιστρόφως, κάθε τιμή του $\log(z_1z_2)$ είναι άθροισμα κάποιας τιμής του $\log z_1$ και κάποιας τιμής του $\log z_2$.

Όπως έχουμε καταλάβει μέχρι τώρα, η εκθετική συνάρτηση $w = \exp z = e^z$ από το $\mathbb{C}$ επί του $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ δεν είναι ένα-προς-ένα. Μάλιστα, είναι *άπειρο-προς-ένα* αφού σε κάθε $w \neq 0$ αντιστοιχούν άπειρες τιμές του z. Άρα δεν μπορούμε να μιλάμε για αντίστροφη συνάρτηση, παρά μόνο μέσω του εξής μη συμβατικού ορισμού (πολύ συνηθισμένου σε ανάλογες περιπτώσεις στη Μιγαδική Ανάλυση).

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Λέμε ότι η* **πλειότιμη λογαριθμική συνάρτηση**

$$\log : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$$

είναι η αντίστροφη συνάρτηση της εκθετικής $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Σύμφωνα με τον συμβατικό ορισμό της έννοιας της συνάρτησης, η "συνάρτηση" που ορίσαμε δεν είναι συνάρτηση, διότι στο w δεν αντιστοιχεί μόνο μια τιμή $z = \log w$. Γι αυτό και λέμε *πλειότιμη συνάρτηση*. Αν θέλουμε να έχουμε αντίστροφη συνάρτηση της εκθετικής, πρέπει πρώτα να περιορίσουμε το πεδίο ορισμού της ώστε να είναι (στο νέο πεδίο ορισμού) ένα-προς-ένα και κατόπιν να την αντιστρέψουμε. Κάτι παρόμοιο γίνεται σε πολλές περιπτώσεις στο Απειροστικό Λογισμό. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $y = x^2$ από το $(-\infty, +\infty)$ στο $[0, +\infty)$ δεν είναι ένα-προς-ένα στο $(-\infty, +\infty)$, οπότε την περιορίζουμε στο $[0, +\infty)$ (ένα μέρος του πεδίου ορισμού της), όπου η συνάρτηση είναι ένα-προς-ένα και έχουμε την αντίστροφη συνάρτηση με τύπο $x = \sqrt{y}$ από το $[0, +\infty)$ στο $[0, +\infty)$ (με τη συμφωνία ότι το σύμβολο $\sqrt{y}$ παριστάνει την μη-αρνητική τετραγωνική ρίζα του y). Βέβαια, μπορούμε να περιορίσουμε την $y = x^2$ στο $(-\infty, 0]$ (ένα άλλο μέρος του πεδίου ορισμού της), όπου η συνάρτηση είναι πάλι ένα-προς-ένα και να έχουμε την αντίστροφη συνάρτηση με τύπο $x = -\sqrt{y}$ από το $[0, +\infty)$ στο $(-\infty, 0]$. Έτσι έχουμε *δύο* αντίστροφες συναρτήσεις της $y = x^2$ ανάλογα με το πεδίο ορισμού που θα επιλέξουμε και το οποίο θα γίνει το ανάλογο σύνολο τιμών της ανάλογης αντίστροφης συνάρτησης $x = \sqrt{y}$ ή $x = -\sqrt{y}$. Παλιότερα (αλλά ακόμη και τώρα) οι μαθηματικοί και τα μαθηματικά βιβλία μιλούσαν για μία *πλειότιμη συνάρτηση* με τύπο $x = \pm\sqrt{y}$ ή ακόμη και $x = \sqrt{y}$, χωρίς να προϋποθέτουν ότι το σύμβολο $\sqrt{y}$ χρησιμοποιείται μόνο για την μη-αρνητική τετραγωνική ρίζα. Υπήρχε λοιπόν μια γενικότερη έννοια συνάρτησης και ειδική περίπτωση ήταν η έννοια της *μονότιμης συνάρτησης*, δηλαδή η έννοια της *συνάρτησης* όπως τη μαθαίνουμε σήμερα. Άλλες ανάλογες περιπτώσεις στον Απειροστικό Λογισμό έχουμε με τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις $y = \cos x$, $y = \sin x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$ και τις αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις $x = \arccos y$, $x = \arcsin y$, $x = \arctan y$, $x = \text{arccot}\, y$.

Τώρα θα περιγράψουμε πώς μπορούμε να ορίσουμε αντίστροφη συνάρτηση (με την αυστηρή έννοια) της εκθετικής περιορίζοντας κατάλληλα το πεδίο ορισμού της εκθετικής συνάρτησης. Για να καταλάβουμε, όμως, καλύτερα το τί θα ακολουθήσει θα ξαναγυρίσουμε στην $y = x^2$ του Απειροστικού Λογισμού. Όταν θεωρούμε την αντίστροφη συνάρτηση παίρνουμε ένα y στο $[0, +\infty)$ (το σύνολο τιμών της $y = x^2$) και βρίσκουμε ένα x τέτοιο ώστε $x^2 = y$. Υπάρχουν ακριβώς δύο τέτοια x, το $x = \sqrt{y}$ και το $x = -\sqrt{y}$. Άρα έχουμε δύο επιλογές για τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης: την επιλογή $x = \sqrt{y}$ για κάθε y στο $[0, +\infty)$ και την επιλογή $x = -\sqrt{y}$ για κάθε y στο $[0, +\infty)$. *Αυτό, όμως, δεν είναι καθόλου αλήθεια!!* Κάποιος μπορεί να κάνει άλλη επιλογή: να επιλέξει $x = \sqrt{y}$ για κάποια y στο $[0, +\infty)$ και $x = -\sqrt{y}$ για τα υπόλοιπα y στο $[0, +\infty)$, σχηματίζοντας, για παράδειγμα, την συνάρτηση με διπλό τύπο

$$x = \begin{cases} \sqrt{y}, & \text{αν } 0 \le y \le 1 \\ -\sqrt{y}, & \text{αν } 1 < y < +\infty \end{cases}$$

Και αυτή η τελευταία συνάρτηση *είναι* αντίστροφη συνάρτηση της $y = x^2$, αν περιορίσουμε το πεδίο ορισμού της $y = x^2$ στο $(-\infty, -1) \cup [0, 1]$. Υπάρχουν άπειρες τέτοιες επιλογές ανάλογα με την επιλογή που θα κάνουμε κάθε φορά που βρίσκουμε μια τιμή του x, την $x = \sqrt{y}$ ή την $x = -\sqrt{y}$, για κάθε τιμή του y. Υπάρχει, όμως, ένα κριτήριο το οποίο περιορίζει τις επιλογές μας σε *ακριβώς δύο*: το κριτήριο της συνέχειας! Παρατηρήστε την συνάρτηση παραπάνω με τον διπλό τύπο: δεν είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, το $[0, +\infty)$. Αντιθέτως, η συνάρτηση με τύπο $x = \sqrt{y}$ για κάθε $y \in [0, +\infty)$ και η συνάρτηση με τύπο $x = -\sqrt{y}$ για κάθε $y \in [0, +\infty)$ είναι και οι δυο συνεχείς στο πεδίο ορισμού $[0, +\infty)$. Και γιατί έχουμε ακριβώς δύο επιλογές συνεχών αντίστροφων συναρτήσεων της $y = x^2$; Αυτό είναι άσκηση του Απειροστικού Λογισμού και θα την δούμε αμέσως τώρα. Υποθέτουμε, λοιπόν, ότι έχουμε κάποια αντίστροφη συνάρτηση $x = f(y)$ της $y = x^2$ με πεδίο ορισμού $[0, +\infty)$ (το σύνολο τιμών της $y = x^2$) η οποία είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$. Δηλαδή, η $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ και ισχύει $f(y)^2 = y$ για κάθε $y \in [0, +\infty)$. Η τιμή $f(0) = 0$ είναι μοναδική και ειδικά γι αυτήν μπορούμε να γράψουμε είτε $f(0) = \sqrt{0}$ είτε $f(0) = -\sqrt{0}$. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν $y_1, y_2 > 0$ ώστε $y_1 \neq y_2$ και $f(y_1) = \sqrt{y_1}$ και $f(y_2) = -\sqrt{y_2}$. Η f είναι συνεχής στο αντίστοιχο διάστημα $[y_1, y_2]$ ή $[y_2, y_1]$ και έχει τιμές με αντίθετο πρόσημο στα άκρα, οπότε θα υπάρχει κάποιο σημείο y του διαστήματος στο οποίο μηδενίζεται: $f(y) = 0$. Αυτό είναι άτοπο, διότι είναι $y > 0$ και πρέπει να είναι $f(y) = \sqrt{y}$ ή $f(y) = -\sqrt{y}$. Άρα δεν υπάρχουν τέτοια $y_1, y_2 > 0$. Επομένως, έχουμε ακριβώς δυο περιπτώσεις: *είτε ισχύει $f(y) = \sqrt{y}$ για κάθε $y > 0$ είτε ισχύει $f(y) = -\sqrt{y}$ για κάθε $y > 0$.* Προτρέχοντας ως προς την ορολογία, μπορούμε να λέμε ότι υπάρχουν ακριβώς δυο *συνεχείς κλάδοι* της τετραγωνικής ρίζας στο $[0, +\infty)$, ο κλάδος $x = \sqrt{y}$ και ο κλάδος $x = -\sqrt{y}$.

Πάμε τώρα στον ορισμό αντίστροφης της εκθετικής συνάρτησης.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω $A \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ και συνάρτηση $f : A \to \mathbb{C}$. Λέμε ότι η f είναι* **συνεχής κλάδος του λογαρίθμου** *στο σύνολο A αν*

(i) η f είναι συνεχής στο A και

(ii) για κάθε $w \in A$ η αντίστοιχη τιμή $z = f(w)$ είναι μια από τις τιμές του $\log w$ ή, ισοδύναμα, η $z = f(w)$ είναι λύση της εξίσωσης $e^z = \exp z = w$ ή, ισοδύναμα, ισχύει $e^{f(w)} = \exp f(w) = w$.

Το σύνολο A δεν μπορεί να περιέχει τον $w = 0$ διότι δεν ορίζεται τιμή του $\log 0$.

Η Πρόταση 6.8 δίνει αρκετά παραδείγματα συνεχών κλάδων του λογαρίθμου: είναι αυτά που χρησιμοποιούνται στην πράξη.

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.8. *Θεωρούμε οποιοδήποτε θ_0, το αντίστοιχο ανοικτό σύνολο*

$$A_{\theta_0} = \{w = re^{i\theta} \,|\, 0 < r < +\infty, \theta_0 < \theta < \theta_0 + 2\pi\},$$

στο w-επίπεδο (δηλαδή το $\mathbb{C}$ χωρίς την ημιευθεία η οποία περιέχει το 0 και όλα τα w με γωνία θ_0) και την ανοικτή οριζόντια ζώνη

$$Z_{\theta_0} = \{x + iy \,|\, -\infty < x < +\infty, \theta_0 < y < \theta_0 + 2\pi\}$$

στο z-επίπεδο.
Σύμφωνα με προηγούμενη συζήτηση, για κάθε τιμή του w στο A_{θ_0} υπάρχει μοναδική τιμή του z στη ζώνη Z_{θ_0} ώστε $e^z = \exp z = w$. Ορίζουμε την συνάρτηση

$$f : A_{\theta_0} \to Z_{\theta_0}$$

έτσι ώστε για κάθε $w \in A_{\theta_0}$ να είναι $f(w) = z$, όπου z είναι ακριβώς αυτή η μοναδική τιμή του z στη ζώνη Z_{θ_0} ώστε $e^z = \exp z = w$.
Είναι προφανές ότι η f ικανοποιεί το (ii) του προηγούμενου ορισμού για το σύνολο A_{θ_0}. Η f είναι και συνεχής στο A_{θ_0}, οπότε ικανοποιεί και το (i) του προηγούμενου ορισμού. Άρα η f είναι συνεχής κλάδος του λογαρίθμου στο A_{θ_0}.

Απόδειξη. Έστω ότι η f δεν είναι συνεχής σε κάποιο w του A_{θ_0}. Τότε υπάρχει κάποια ακολουθία (w_n) στο A_{θ_0} για την οποία ισχύει

$$w_n \to w \qquad \text{και} \qquad f(w_n) \not\to f(w).$$

Το $f(w_n) \not\to f(w)$ συνεπάγεται ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(w_n) - f(w)| \geq \delta > 0$ για άπειρα n. Αυτά τα άπειρα n ορίζουν μια υποακολουθία της w_n και, τώρα, για απλούστευση όσων θα ακολουθήσουν, περιοριζόμαστε στην υποακολουθία και (αγνοώντας τους υπόλοιπους όρους της αρχικής ακολουθίας) ονομάζουμε (w_n) την υποακολουθία και έτσι έχουμε μια ακολουθία (w_n) στο σύνολο A_{θ_0} για την οποία ισχύει

$$w_n \to w \qquad \text{και} \qquad |f(w_n) - f(w)| \geq \delta > 0 \quad \text{για κάθε } n. \tag{6.5}$$

Θέτουμε, επίσης,

$$z = f(w) \qquad \text{και} \qquad z_n = f(w_n) \quad \text{για κάθε } n,$$

οπότε

$$e^z = w \qquad \text{και} \qquad e^{z_n} = w_n \quad \text{για κάθε } n \tag{6.6}$$

και η (6.5) ξαναγράφεται

$$w_n \to w \qquad \text{και} \qquad |z_n - z| \geq \delta > 0 \quad \text{για κάθε } n. \tag{6.7}$$

Επειδή $w_n, w \in A_{\theta_0}$, τα w_n, w έχουν πολικές αναπαραστάσεις

$$w = |w|e^{i\theta} \qquad \text{και} \qquad w_n = |w_n|e^{i\theta_n} \quad \text{για κάθε } n,$$

όπου

$$\theta_0 < \theta < \theta_0 + 2\pi \qquad \text{και} \qquad \theta_0 < \theta_n < \theta_0 + 2\pi \quad \text{για κάθε } n.$$

Τώρα, επειδή το σύνολο τιμών της f είναι η ζώνη Z_{θ_0}, έχουμε ότι

$$z = \ln|w| + i\theta \qquad \text{και} \qquad z_n = \ln|w_n| + i\theta_n \quad \text{για κάθε } n.$$

Επειδή $w_n \to w$, συνεπάγεται $|w_n| \to |w|$ και, λόγω της συνέχειας της λογαριθμικής συνάρτησης του Απειροστικού Λογισμού, συνεπάγεται $\ln|w_n| \to \ln|w|$. Άρα η πραγματική ακολουθία $(\ln|w_n|)$ είναι φραγμένη. Επίσης, η πραγματική ακολουθία (θ_n) είναι φραγμένη, διότι περιέχεται στο διάστημα $(\theta_0, \theta_0 + 2\pi)$. Άρα η μιγαδική ακολουθία (z_n) είναι φραγμένη. Επομένως, από το Θεώρημα των Bolzano - Weierstrass συνεπάγεται ότι υπάρχει υποακολουθία (z_{n_k}) η οποία συγκλίνει σε κάποιο z' :

$$z_{n_k} \to z'. \tag{6.8}$$

Επειδή όλοι οι z_{n_k} ανήκουν στη ζώνη Z_{θ_0}, συνεπάγεται ότι ο z' είναι οριακό σημείο της ζώνης αυτής, οπότε ανήκει στην αντίστοιχη κλειστή ζώνη:

$$z' \in \text{cl}\, Z_{\theta_0} = \{x + iy \mid -\infty < x < +\infty, \theta_0 \leq y \leq \theta_0 + 2\pi\}. \tag{6.9}$$

Για την αντίστοιχη (δηλαδή με τους ίδιους δείκτες) υποακολουθία της (w_n) έχουμε, λόγω της (6.7),

$$w_{n_k} \to w.$$

Λόγω της συνέχειας της μιγαδικής εκθετικής συνάρτησης και λόγω των (6.6) και (6.8), συνεπάγεται

$$w_{n_k} = e^{z_{n_k}} \to e^{z'}$$

και, επομένως,

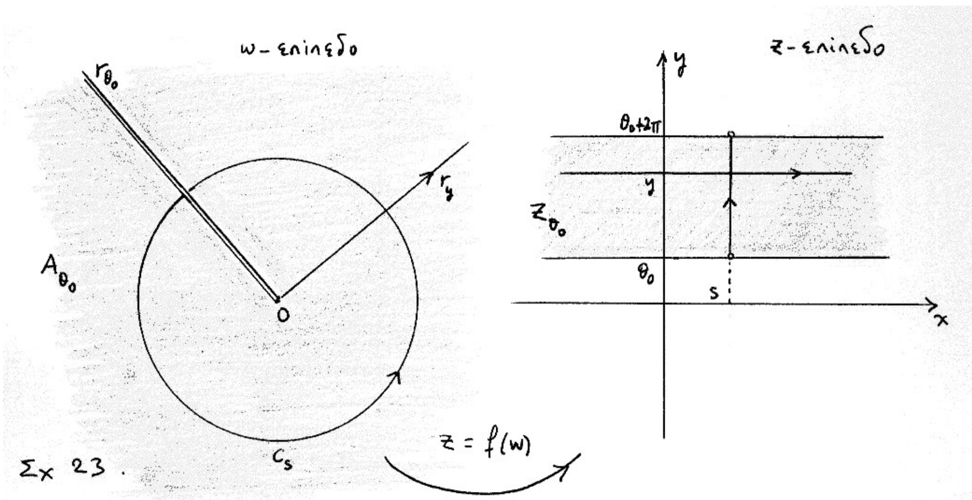
$$e^{z'} = w.$$

Πάλι λόγω της (6.6) έχουμε

$$e^{z'} = e^{z},$$

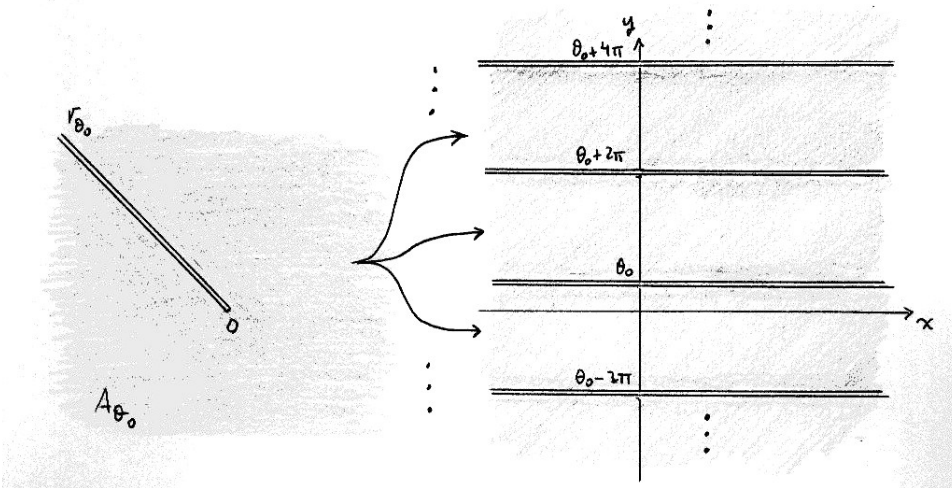
οπότε οι μιγαδικοί z' και z διαφέρουν κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του $i2\pi$. Αυτομάτως καταλήγουμε σε άτοπο, διότι ο z ανήκει στην ανοικτή ζώνη Z_{θ_0}, ο z' ανήκει στην κλειστή ζώνη $\mathrm{cl}\, Z_{\theta_0}$ (δείτε την (6.9)) και οι ζώνες αυτές (ουσιαστικά, η ίδια ζώνη) έχουν πλάτος ακριβώς 2π.
Άρα η f είναι συνεχής σε κάθε w του A_{θ_0}. $\square$

Από την διεξοδική μελέτη της εκθετικής συνάρτησης στην προηγούμενη ενότητα προκύπτουν τα εξής για τον συνεχή κλάδο $f : A_{\theta_0} \to Z_{\theta_0}$ του λογαρίθμου που ορίσθηκε στην Πρόταση 6.8. Δείτε το σχήμα 23. Η f απεικονίζει τις ημιευθείες στο A_{θ_0} με κορυφή το 0 (χωρίς το 0) στις οριζόντιες ευθείες στο Z_{θ_0} και τους κύκλους κέντρου 0 (χωρίς το σημείο τους στην ημιευθεία που λείπει από το A_{θ_0}) στα κατακόρυφα ευθύγραμμα τμήματα του Z_{θ_0}.



Επιλέγοντας, λοιπόν, ένα οποιοδήποτε πραγματικό θ_0, ορίζουμε έναν συνεχή κλάδο του λογαρίθμου $z = \log w$ με πεδίο ορισμού το σύνολο A_{θ_0} του w-επιπέδου και σύνολο τιμών τη ζώνη Z_{θ_0} του z-επιπέδου. Παρατηρήστε ότι αν, αντί του θ_0, θεωρήσουμε τον $\theta_0 + k2\pi$ με οποιονδήποτε $k \in \mathbb{Z}$, τότε το πεδίο ορισμού $A = A_{\theta_0+k2\pi}$ *μένει το ίδιο* (!) αλλά το σύνολο τιμών, δηλαδή η ζώνη $Z_{\theta_0+k2\pi}$ μετατοπίζεται προς τα πάνω ή προς τα κάτω κατά $k2\pi$. Οι ζώνες $Z_{\theta_0+k2\pi}$ με $k \in \mathbb{Z}$ είναι διαδοχικές και καλύπτουν ολόκληρο το z-επίπεδο (εκτός από τις συνοριακές ευθείες τους με εξισώσεις $y = \theta_0 + k2\pi$). Δείτε το σχήμα 24. Συνοψίζουμε:

Αν από το w-επίπεδο αφαιρέσουμε μια οποιαδήποτε ημιευθεία με κορυφή το 0, τότε στο συμπληρωματικό ανοικτό σύνολο A ορίζονται άπειροι συνεχείς κλάδοι $z = \log w$ του λογαρίθμου. Καθένας από αυτούς απεικονίζει το A επί μιας συγκεκριμένης οριζόντιας ανοικτής ζώνης του z-επιπέδου πλάτους 2π. Οι διάφορες αυτές ζώνες, που αντιστοιχούν στους διάφορους κλάδους του λογαρίθμου (στο ίδιο σύνολο A), είναι ξένες ανά δύο, διαδοχικές και καλύπτουν το z-επίπεδο (εκτός από τις συνοριακές ευθείες τους). Φυσικά, αν αλλάξουμε την αρχική ημιευθεία η οποία καθορίζει το σύνολο A, τότε αλλάζουν και οι αντίστοιχες ζώνες και οι αντίστοιχοι συνεχείς κλάδοι του λογαρίθμου.



Σχ 24. Άπειροι συνεχείς κλάδοι του λογαρίθμου στο A_{θ_0}

Παράδειγμα 6.3.2. Ένα πολύ συγκεκριμένο παράδειγμα συνεχούς κλάδου του λογαρίθμου έχουμε όταν πάρουμε $\theta_0 = -\pi$. Τότε το σύνολο

$$A_{-\pi}$$

είναι το w-επίπεδο εκτός του αρνητικού u-ημιάξονα (όπου $w = u + iv$) και το σύνολο τιμών του κλάδου του λογαρίθμου είναι η ζώνη

$$Z_{-\pi} = \{x + iy \,|\, -\infty < x < +\infty, -\pi < y < \pi\}.$$

Είναι φανερό ότι ο κλάδος αυτός είναι η συνάρτηση η οποία σε κάθε $w \in A$ αντιστοιχίζει την πρωτεύουσα τιμή $z = \operatorname{Log} w$ του $\log w$. Δηλαδή, έχουμε τον λεγόμενο **πρωτεύοντα κλάδο του λογαρίθμου**

$$\operatorname{Log} : A_{-\pi} \to Z_{-\pi}.$$

Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι στο ίδιο σύνολο $A_{-\pi}$ του w-επιπέδου, εκτός από τον πρωτεύοντα κλάδο του λογαρίθμου, ορίζονται άπειροι συνεχείς κλάδοι του λογαρίθμου. Καθένας από αυτούς απεικονίζει το $A_{-\pi}$ στην ανάλογη ζώνη $Z_{-\pi+k2\pi}$, η οποία είναι η $Z_{-\pi}$ μεταφερμένη κατακόρυφα κατά $k2\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$. Ο κλάδος αυτός προκύπτει από τον πρωτεύοντα κλάδο $z = \operatorname{Log} w$ προσθέτοντας τη σταθερά $ik2\pi$ (για να έχουμε κατακόρυφη μεταφορά κατά $k2\pi$) οπότε ο τύπος του είναι

$$z = \operatorname{Log} w + i2k\pi.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.9. *Έστω $A \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ και $f : A \to \mathbb{C}$ η οποία είναι συνεχής κλάδος του λογαρίθμου στο σύνολο A. Αν το w_0 είναι οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο του A, τότε η f είναι αυτομάτως παραγωγίσιμη στο w_0 και*

$$f'(w_0) = \frac{1}{w_0}.$$

Απόδειξη. Γράφουμε $z_0 = f(w_0)$ και $z = f(w)$ για κάθε $w \in A$. Επομένως, είναι $e^{z_0} = w_0$ και $e^z = w$. Επειδή η f είναι συνεχής, αν $w \to w_0$ συνεπάγεται $z \to z_0$. Επομένως, χρησιμοποιώντας την παραγωγισιμότητα της εκθετικής συνάρτησης στο z_0, έχουμε ότι όταν $w \to w_0$, τότε

$$\frac{f(w) - f(w_0)}{w - w_0} = \frac{z - z_0}{e^z - e^{z_0}} = \frac{1}{\frac{e^z - e^{z_0}}{z - z_0}} \to \frac{1}{e^{z_0}} = \frac{1}{w_0}.$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο w_0 και $f'(w_0) = \frac{1}{w_0}$. $\square$

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι αν η $f : A \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής κλάδος του λογαρίθμου στο σύνολο A, τότε η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του A, δηλαδή η f είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του A. Και, επειδή το εσωτερικό του A είναι ανοικτό σύνολο, η f είναι *αναλυτική* στο εσωτερικό του A. Ειδικώτερα, και με πιο "χαλαρό" συμβολισμό:

Κάθε συνεχής κλάδος $z = \log w$ σε ανοικτό σύνολο $A \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ είναι αναλυτική συνάρτηση στο A και ισχύει

$$\frac{dz}{dw} = \frac{d \log w}{dw} = \frac{1}{w} \qquad \text{στο } A.$$

Γι αυτό κάθε συνεχής κλάδος του λογαρίθμου σε ανοικτό σύνολο $A \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ονομάζεται και **αναλυτικός κλάδος του λογαρίθμου** *στο A.*

Παράδειγμα 6.3.3. Προηγουμένως ορίσαμε άπειρους συνεχείς κλάδους του λογαρίθμου στο ανοικτό σύνολο το οποίο προκύπτει αν από το w-επίπεδο αφαιρέσουμε μια οποιαδήποτε ημιευθεία με κορυφή το 0. Όλοι αυτοί οι κλάδοι είναι αναλυτικοί κλάδοι του λογαρίθμου. Ειδικώτερα, ο πρωτεύων κλάδος του λογαρίθμου

$$\mathrm{Log} : A_{-\pi} \to Z_{-\pi}$$

είναι αναλυτικός στο $A_{-\pi}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.10. *Έστω $A \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ και $f_1, f_2 : A \to \mathbb{C}$.*
[α] *Αν η f_1 είναι συνεχής κλάδος του λογαρίθμου στο A και ισχύει $f_2(w) - f_1(w) = ik2\pi$ στο A, όπου ο k είναι σταθερός (δηλαδή, ανεξάρτητος του w στο A) ακέραιος, τότε και η f_2 είναι συνεχής κλάδος του λογαρίθμου στο A.*
[β] *Αν, επιπλέον, το σύνολο A είναι συνεκτικό και αν οι f_1 και f_2 είναι συνεχείς κλάδοι του λογαρίθμου στο A, τότε ισχύει $f_2(w) - f_1(w) = ik2\pi$ στο A, όπου ο k είναι σταθερός (δηλαδή, ανεξάρτητος του w στο A) ακέραιος.*
Ειδικώτερα, αν οι f_1, f_2 έχουν την ίδια τιμή σε κάποιο $w_0 \in A$, τότε ταυτίζονται στο A.

Απόδειξη. [α] Η f_1 είναι συνεχής στο A και κάθε σταθερή συνάρτηση είναι συνεχής στο A. Άρα και η $f_2 = f_1 + ik2\pi$ είναι συνεχής στο A.
Επίσης, ισχύει $e^{f_1(w)} = w$ για κάθε $w \in A$. Άρα

$$e^{f_2(w)} = e^{f_1(w)+ik2\pi} = e^{f_1(w)}e^{ik2\pi} = w1 = w$$

για κάθε $w \in A$. Άρα η f_2 είναι συνεχής κλάδος του λογαρίθμου στο A.
[β] Θεωρούμε τη συνάρτηση $k : A \to \mathbb{C}$ με τύπο

$$k(w) = \frac{1}{i2\pi}(f_2(w) - f_1(w)) \qquad \text{για κάθε } w \in A.$$

Επειδή για κάθε $w \in A$ και οι δυο τιμές $f_2(w)$ και $f_1(w)$ είναι τιμές του $\log w$, συνεπάγεται ότι ο αριθμός $k(w)$ είναι ακέραιος. Άρα

$$k : A \to \mathbb{Z}.$$

Επίσης, επειδή και οι δυο συναρτήσεις f_1, f_2 είναι συνεχείς στο A, η k είναι συνεχής στο A.
Τώρα, η k είναι συνεχής *πραγματική* συνάρτηση στο συνεκτικό σύνολο A, οπότε έχει την ιδιότητα της ενδιάμεσης τιμής. Αν υπάρχουν $w_1, w_2 \in A$ ώστε $k(w_1) \neq k(w_2)$ τότε η k πρέπει να έχει ως τιμές της κάθε πραγματικό αριθμό ανάμεσα στους $k(w_1)$ και $k(w_2)$, αλλά αυτό είναι αδύνατο διότι η k έχει μόνο ακέραιες τιμές. Άρα δεν υπάρχουν $w_1, w_2 \in A$ ώστε $k(w_1) \neq k(w_2)$ και, επομένως, η k είναι σταθερή συνάρτηση στο A. Δηλαδή, υπάρχει ένας σταθερός (δηλαδή, ανεξάρτητος του w στο A) ακέραιος k ώστε να ισχύει $\frac{1}{i2\pi}(f_2(w) - f_1(w)) = k$ ή, ισοδύναμα, $f_2(w) - f_1(w) = ik2\pi$ για κάθε $w \in A$.
Το τελευταίο συμπέρασμα είναι προφανές: αν ισχύει $f_2(w_0) = f_1(w_0)$, τότε, επειδή η $f_2 - f_1$ είναι σταθερή στο A, συνεπάγεται ότι ισχύει $f_2(w) - f_1(w) = f_2(w_0) - f_1(w_0) = 0$ για κάθε $w \in A$ οπότε $f_2(w) = f_1(w)$ για κάθε $w \in A$. $\square$

Από την Πρόταση 6.10 έχουμε το εξής:
Αν στο συνεκτικό σύνολο A γνωρίζουμε έναν συνεχή κλάδο του λογαρίθμου, τότε παίρνουμε κάθε άλλο συνεχή κλάδο το λογαρίθμου στο A προσθέτοντας στον αρχικό μια οποιαδήποτε σταθερά της μορφής $ik2\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$. Δεν υπάρχουν άλλοι συνεχείς κλάδοι του λογαρίθμου στο A.

Μια παρατήρηση (και για τα επόμενα παραδείγματα). Όταν πρέπει να βρούμε έναν συνεχή κλάδο του λογαρίθμου σε ένα σύνολο A με μια δοσμένη τιμή z_0 σε ένα δοσμένο σημείο $w_0 \in A$, πρέπει να είναι εξασφαλισμένο ότι η τιμή z_0 είναι *αποδεκτή*. Θα πρέπει δηλαδή το z_0 να είναι μια από τις τιμές του $\log w_0$ ή, ισοδύναμα, $e^{z_0} = w_0$.

Παράδειγμα 6.3.4. Έστω $A = A_{-\pi}$ το w-επίπεδο εκτός του αρνητικού u-ημιάξονα (όπου $w = u + iv$). Θέλουμε να βρούμε συνεχή κλάδο του λογαρίθμου στο A με τιμή $z = 0$ για $w = 1$.
Στο A γνωρίζουμε ότι ο πρωτεύων κλάδος Log του λογαρίθμου είναι συνεχής κλάδος του λογαρίθμου και έχει τιμή $z = \operatorname{Log} 1 = 0$ για $w = 1$. Σύμφωνα με την Πρόταση 6.10[β], επειδή το A είναι συνεκτικό, δεν υπάρχει άλλος τέτοιος συνεχής κλάδος του λογαρίθμου στο A.
Η απάντησή μας μπορεί να δοθεί και με (φαινομενικά) άλλο τρόπο. Θεωρούμε τις οριζόντιες ζώνες στο z-επίπεδο που αντιστοιχούν στο σύνολο A, δηλαδή τις

$$Z_{-\pi+k2\pi} = \{x + iy \,|\, -\infty < x < +\infty, -\pi + k2\pi < y < \pi + k2\pi\} \qquad \text{με } k \in \mathbb{Z}$$

και επιλέγουμε εκείνην η οποία περιέχει την τιμή $z = 0$. Η ζώνη αυτή είναι εκείνη που αντιστοιχεί στον $k = 0$, δηλαδή η

$$Z_{-\pi} = \{x + iy \,|\, -\infty < x < +\infty, -\pi < y < \pi\}.$$

Κατόπιν θεωρούμε τον συνεχή κλάδο f του λογαρίθμου που απεικονίζει το A στην ζώνη $Z_{-\pi}$ και ο τύπος του είναι

$$f(w) = \ln r + i\theta \qquad \text{για } w = re^{i\theta} \text{ και } r = |w| > 0,\ -\pi < \theta < \pi,$$

όπου θ είναι η μοναδική τιμή του ορίσματος $\arg w$ του w η οποία περιέχεται στο διάστημα $(-\pi, \pi)$. Και πάλι, σύμφωνα με την Πρόταση 6.10[β], επειδή το A είναι συνεκτικό, δεν υπάρχει άλλος τέτοιος συνεχής κλάδος του λογαρίθμου στο A.

Παράδειγμα 6.3.5. Έστω $A = A_{-\pi}$ το w-επίπεδο εκτός του αρνητικού u-ημιάξονα (όπου $w = u + iv$). Θέλουμε να βρούμε συνεχή κλάδο του λογαρίθμου στο A με τιμή $z = i4\pi$ για $w = 1$.
Θεωρούμε τις οριζόντιες ζώνες στο z-επίπεδο που αντιστοιχούν στο σύνολο A, δηλαδή τις

$$Z_{-\pi+k2\pi} = \{x + iy \,|\, -\infty < x < +\infty, -\pi + k2\pi < y < \pi + k2\pi\} \qquad \text{με } k \in \mathbb{Z}$$

και επιλέγουμε εκείνην η οποία περιέχει την τιμή $z = i4\pi$. Η ζώνη αυτή είναι εκείνη που αντιστοιχεί στον $k = 2$, δηλαδή η

$$Z_{3\pi} = \{x + iy \,|\, -\infty < x < +\infty, 3\pi < y < 5\pi\}.$$

Κατόπιν θεωρούμε τον συνεχή κλάδο f του λογαρίθμου που απεικονίζει το A στην ζώνη $Z_{3\pi}$ και ο τύπος του είναι

$$f(w) = \ln r + i\theta \qquad \text{για } w = re^{i\theta} \text{ και } r = |w| > 0,\ 3\pi < \theta < 5\pi,$$

όπου θ είναι η μοναδική τιμή του ορίσματος $\arg w$ του w η οποία περιέχεται στο διάστημα $(3\pi, 5\pi)$. Σύμφωνα με την Πρόταση 6.10[β], επειδή το A είναι συνεκτικό, δεν υπάρχει άλλος τέτοιος συνεχής κλάδος του λογαρίθμου στο A.

Παράδειγμα 6.3.6. Έστω $A = A_0$ το w-επίπεδο εκτός του θετικού u-ημιάξονα (όπου $w = u+iv$). Θέλουμε να βρούμε συνεχή κλάδο του λογαρίθμου στο A με τιμή $z = i(\frac{\pi}{2} + 4\pi)$ για $w = i$. Θεωρούμε τις οριζόντιες ζώνες στο z-επίπεδο που αντιστοιχούν στο σύνολο A, δηλαδή τις

$$Z_{0+k2\pi} = \{x + iy \,|\, -\infty < x < +\infty, k2\pi < y < 2\pi + k2\pi\} \qquad \text{με } \ k \in \mathbb{Z}$$

και επιλέγουμε εκείνην η οποία περιέχει την τιμή $z = i(\frac{\pi}{2} + 4\pi)$. Η ζώνη αυτή είναι εκείνη που αντιστοιχεί στον $k = 2$, δηλαδή η

$$Z_{4\pi} = \{x + iy \,|\, -\infty < x < +\infty, 4\pi < y < 6\pi\}.$$

Κατόπιν θεωρούμε τον συνεχή κλάδο f του λογαρίθμου που απεικονίζει το A στην ζώνη $Z_{4\pi}$ και ο τύπος του είναι

$$f(w) = \ln r + i\theta \qquad \text{για } \ w = re^{i\theta} \ \text{ και } \ r = |w| > 0, \ \ 4\pi < \theta < 6\pi,$$

όπου θ είναι η μοναδική τιμή του ορίσματος $\arg w$ του w η οποία περιέχεται στο διάστημα $(4\pi, 6\pi)$. Σύμφωνα με την Πρόταση 6.10[β], επειδή το A είναι συνεκτικό, δεν υπάρχει άλλος τέτοιος συνεχής κλάδος του λογαρίθμου στο A.

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.11. *Σε κάθε κύκλο $C(0;r)$ δεν ορίζεται συνεχής κλάδος του λογαρίθμου. Άρα δεν ορίζεται συνεχής κλάδος του λογαρίθμου σε κανένα σύνολο A το οποίο περιέχει κύκλο με κέντρο* 0.

Απόδειξη. Έστω ότι ορίζεται συνεχής κλάδος του λογαρίθμου στον κύκλο $C(0;r)$, δηλαδή

$$f : C(0;r) \to \mathbb{C}$$

η οποία είναι συνεχής στον $C(0;r)$ και για κάθε $w \in C(0;r)$ ισχύει $e^{f(w)} = w$.
Θεωρούμε τον πρωτεύοντα κλάδο Log του λογαρίθμου, ο οποίος είναι συνεχής συνάρτηση στο w-επίπεδο εκτός από τον αρνητικό u-ημιάξονα.
Το κοινό μέρος του συνόλου στο οποίο είναι ορισμένος ο Log και του κύκλου $C(0;r)$ είναι το

$$B = C(0;r) \setminus \{-r\}.$$

Άρα ο περιορισμός της f στο B και ο περιορισμός του Log στο B είναι δυο συνεχείς κλάδοι του λογαρίθμου στο B. Επειδή το B είναι συνεκτικό, υπάρχει (σταθερός) ακέραιος k ώστε να ισχύει

$$\operatorname{Log} w = f(w) + ik2\pi \qquad \text{για κάθε } \ w \in B. \tag{6.10}$$

Τώρα θεωρούμε δυο ακολουθίες στο B. Τις (w_n') και (w_n'') με τύπους

$$w_n' = re^{i(\pi - \frac{\pi}{n})}, \qquad w_n'' = re^{i(-\pi + \frac{\pi}{n})} \qquad \text{για κάθε } \ n.$$

Και οι δυο ακολουθίες "κινούνται" πάνω στον κύκλο $C(0;r)$ προς το σημείο $-r$. Η πρώτη είναι στο άνω ημικύκλιο και πλησιάζει το $-r$ και η δεύτερη είναι στο κάτω ημικύκλιο και πλησιάζει κι αυτή το $-r$.
Επειδή η f είναι ορισμένη και συνεχής σε ολόκληρο τον κύκλο $C(0;r)$, συνεπάγεται

$$f(w_n') \to f(-r), \qquad f(w_n'') \to f(-r)$$

και, επομένως,

$$f(w_n') - f(w_n'') \to 0.$$

Από την (6.10) συνεπάγεται

$$\operatorname{Log} w_n' - \operatorname{Log} w_n'' \to 0.$$

Όμως,

$$\operatorname{Log} w'_n - \operatorname{Log} w''_n = \Big(\ln r + i\Big(\pi - \frac{\pi}{n}\Big)\Big) - \Big(\ln r + i\Big(-\pi + \frac{\pi}{n}\Big)\Big) = i(2\pi - 2\pi/n) \to i2\pi$$

και καταλήγουμε σε άτοπο.
Άρα δεν ορίζεται συνεχής κλάδος του λογαρίθμου στον κύκλο $C(0;r)$.
Αν ορίζεται συνεχής κλάδος f του λογαρίθμου σε κάποιο σύνολο A το οποίο περιέχει κύκλο με κέντρο 0, τότε ο περιορισμός της f στον κύκλο θα ήταν συνεχής κλάδος του λογαρίθμου στον κύκλο και αυτό, όπως είδαμε, είναι αδύνατο. □

Παράδειγμα 6.3.7. Δεν ορίζεται συνεχής κλάδος του λογαρίθμου σε δακτύλιο με κέντρο 0 ούτε, φυσικά, στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

Ασκήσεις.

6.3.1. Αποδείξτε ότι για κάθε $z \neq 0$ ισχύει

$$\exp(\log z) = z, \qquad \log(\exp z) = z + k2\pi i \quad \text{με } k \in \mathbb{Z}.$$

6.3.2. Βρείτε τις εικόνες μέσω του Log των συνόλων $\{w \,|\, r_1 \leq |w| \leq r_2\} \setminus [-r_2, -r_1]$, $\{w \,|\, 0 < |w| \leq r_2\} \setminus [-r_2, 0)$, $\{w \,|\, r_1 \leq |w| < +\infty\} \setminus (-\infty, -r_1]$.

6.3.3. Δουλέψτε με τα παρακάτω στις περιπτώσεις $\theta_0 = -\pi$ και $\theta_0 = 0$.
Θεωρήστε το σύνολο A_{θ_0}, δηλαδή το w-επίπεδο χωρίς την ημιευθεία η οποία περιέχει το 0 και τους w με γωνία θ_0. Θεωρήστε και θ_1, θ_2 με $\theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \theta_0 + 2\pi$ καθώς και r_1, r_2 με $0 < r_1 < r_2 < +\infty$. Ζωγραφίστε το σύνολο $P = \{w = re^{i\theta} \,|\, r_1 < r < r_2, \theta_1 < \theta < \theta_2\}$ καθώς και τις εικόνες αυτού του συνόλου μέσω των διαφόρων συνεχών κλάδων του λογαρίθμου στο σύνολο A_{θ_0}. (Να χρησιμοποιήσετε τουλάχιστον τρεις τέτοιους κλάδους.)

6.3.4. Ζωγραφίστε τα σύνολα $P = \{w = re^{i\theta} \,|\, 1 < r < 2, -\frac{3\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4}\}$ και $Q = \{w = re^{i\theta} \,|\, 1 < r < 2, \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{7\pi}{4}\}$. Γνωρίζουμε ότι ορίζεται συνεχής κλάδος f του λογαρίθμου σε συγκεκριμένο σύνολο A μεγαλύτερο του P και συνεχής κλάδος g του λογαρίθμου σε συγκεκριμένο σύνολο B μεγαλύτερο του Q. (Ποιά είναι δυο τέτοια συγκεκριμένα σύνολα A και B;) Άρα οι f και g (δηλαδή, οι περιορισμοί τους στα P και Q) είναι συνεχείς κλάδοι του λογαρίθμου στα P και Q, αντιστοίχως.
Θεωρώντας, λοιπόν, δεδομένη την ύπαρξη δυο τέτοιων συνεχών κλάδων f και g του λογαρίθμου στα P και Q, αντιστοίχως, απαντήστε στο εξής ερώτημα: είναι δυνατόν να ταυτίζονται οι f και g στην τομή $P \cap Q$;

6.3.5. Δείτε την άσκηση 1.1.19 και αποδείξτε ότι:

$$\operatorname{Log}(z_1 z_2) = \begin{cases} \operatorname{Log} z_1 + \operatorname{Log} z_2, & \text{αν } -\pi < \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 \leq \pi \\ \operatorname{Log} z_1 + \operatorname{Log} z_2 + 2\pi i, & \text{αν } -2\pi < \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 \leq -\pi \\ \operatorname{Log} z_1 + \operatorname{Log} z_2 - 2\pi i, & \text{αν } \pi < \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 \leq 2\pi \end{cases}$$

Υπάρχουν άλλες περιπτώσεις για την τιμή του $\operatorname{Log} z_1 + \operatorname{Log} z_2$;

6.3.6. Αν ορίσουμε $w^a = e^{a \operatorname{Log} w}$ για κάθε $w \in D(1;1)$, αποδείξτε ότι $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{z}{x}\right)^x = e^z$ για κάθε z. (Χρησιμοποιήστε ιδιότητες ορίων πραγματικών συναρτήσεων.)

6.3.7. Έστω $A \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Αν το A είναι συνεκτικό και αν f_1 και f_2 είναι δυο (διαφορετικοί) συνεχείς κλάδοι του λογαρίθμου στο A, αποδείξτε ότι $f_1(A) \cap f_2(A) = \emptyset$. (Παρατηρήστε πώς αυτό επιβεβαιώνεται στην ειδική περίπτωση που το A είναι το $\mathbb{C}$ εκτός από μια ημιευθεία με κορυφή 0 και που τότε οι διάφοροι συνεχείς κλάδοι του λογαρίθμου στο A απεικονίζουν το A σε ξένες ανά δύο οριζόντιες ζώνες.)

6.3.8. Θεωρήστε την συνάρτηση $u : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ με τύπο $u(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$.
[α] Αποδείξτε ότι η u είναι αρμονική στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, ελέγχοντας τον ορισμό της αρμονικής συνάρτησης.
[β] Υπάρχει αρμονική συζυγής της u στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$;
[γ] Θεωρήστε το ανοικτό σύνολο $A_{\theta_0} = \{w = re^{i\theta} \,|\, 0 < r < +\infty, \theta_0 < \theta < \theta_0 + 2\pi\}$ και βρείτε μια συζυγή αρμονική συνάρτηση της u στο A_{θ_0}.
[δ] Εκμεταλλευτείτε το ότι το θ_0 στο [γ] είναι αυθαίρετο και αποδείξτε με δεύτερο τρόπο ότι η u είναι αρμονική στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

6.4 Η n-οστή δύναμη και οι n-οστές ρίζες.

Έστω $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 2$. Η συνάρτηση

$$w = z^n$$

είναι, προφανώς, αναλυτική στο z-επίπεδο $\mathbb{C}$ και έχουμε ότι

$$w = z^n = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad z = 0.$$

Για να δούμε τί γίνεται όταν $z \neq 0$ και $w \neq 0$ χρησιμοποιούμε πολικές αναπαραστάσεις των z και w. Θεωρούμε οποιεσδήποτε πολικές αναπαραστάσεις

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}, \qquad w = s(\cos\phi + i\sin\phi) = se^{i\phi}$$

και έχουμε

$$\begin{gathered} z^n = w \\ \Updownarrow \\ r^n e^{in\theta} = se^{i\phi} \\ \Updownarrow \\ r^n = s, \qquad n\theta = \phi + k2\pi \quad \text{με } k \in \mathbb{Z} \\ \Updownarrow \\ r = \sqrt[n]{r}, \qquad \theta = \tfrac{\phi}{n} + \tfrac{k}{n}2\pi \quad \text{με } k \in \mathbb{Z}. \end{gathered}$$

Άρα, για κάθε $w \neq 0$, η εξίσωση $z^n = w$ έχει τις λύσεις

$$z = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\phi + 2\pi k}{n}} \qquad \text{με } k \in \mathbb{Z}$$

ή, ισοδύναμα,

$$z = \sqrt[n]{|w|}\, e^{i\frac{\arg w}{n}}.$$

Συνοψίζουμε:

$$z^n = w \qquad \Leftrightarrow \qquad z = \sqrt[n]{|w|}\, e^{i\frac{\arg w}{n}}.$$

Από αυτό το συμπέρασμα φαίνεται ότι η εξίσωση $z^n = w$ έχει άπειρες λύσεις ως προς z διότι το $\arg w$ έχει άπειρες τιμές, αλλά αυτό δεν είναι σωστό: θα δούμε ότι η παράσταση $e^{i\frac{\arg w}{n}}$ έχει ακριβώς n διαφορετικές τιμές. Πράγματι, αν ϕ είναι μια οποιαδήποτε, έστω σταθερή, τιμή του $\arg w$ και ϕ' είναι μια οποιαδήποτε άλλη τιμή του $\arg w$, έχουμε ότι $\phi' - \phi = m2\pi$ για κάποιον $m \in \mathbb{Z}$ και τότε

$$e^{i\frac{\phi'}{n}} = e^{i\frac{\phi}{n}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\tfrac{\phi'}{n} = \tfrac{\phi}{n} + k2\pi \quad \text{με } k \in \mathbb{Z}$$

$$\Updownarrow$$

$$\tfrac{m2\pi}{n} = k2\pi \quad \text{με } k \in \mathbb{Z}$$

$$\Updownarrow$$

$$m = nk \quad \text{με } k \in \mathbb{Z}.$$

Βλέπουμε, δηλαδή, ότι ισχύει $e^{i\frac{\phi'}{n}} = e^{i\frac{\phi}{n}}$ αν και μόνο αν $\phi' - \phi = m2\pi$ και ο m είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του n. Άρα οι τιμές του m που δίνουν διαφορετικές ανά δύο τιμές του $e^{i\frac{\phi'}{n}}$ είναι ακριβώς οι $0, 1, \ldots, n-1$ και οι αντίστοιχες διαφορετικές ανά δύο τιμές του $e^{i\frac{\phi'}{n}}$ είναι οι

$$e^{i\frac{\phi+m2\pi}{n}} \qquad \text{με } m = 0, 1, \ldots, n-1$$

ή, πιο αναλυτικά,

$$e^{i\frac{\phi}{n}}, e^{i\frac{\phi}{n}+\frac{2\pi}{n}}, \ldots\ldots, e^{i\frac{\phi}{n}+(n-1)\frac{2\pi}{n}}.$$

Επομένως, όταν $z, w \neq 0$ η εξίσωση $z^n = w$ έχει ακριβώς n λύσεις ως προς z, τις

$$z = \sqrt[n]{|w|}\, e^{i\frac{\phi+m2\pi}{n}} \qquad \text{με } m = 0, 1, \ldots, n-1$$

ή, πιο αναλυτικά,

$$\sqrt[n]{|w|}\, e^{i\frac{\phi}{n}},\ \sqrt[n]{|w|}\, e^{i\frac{\phi}{n}+\frac{2\pi}{n}},\ \ldots\ldots,\ \sqrt[n]{|w|}\, e^{i\frac{\phi}{n}+(n-1)\frac{2\pi}{n}},$$

όπου ϕ είναι μια οποιαδήποτε τιμή του $\arg w$, και βλέπουμε ότι όλες αυτές οι n λύσεις έχουν το ίδιο μέτρο $|z| = \sqrt[n]{|w|}$ και, με τη σειρά που τις έχουμε γράψει, καθεμιά από τη δεύτερη και μετά προκύπτει από την προηγούμενή της με στροφή κατά γωνία $\frac{2\pi}{n}$ και η πρώτη προκύπτει από την τελευταία πάλι με στροφή κατά γωνία $\frac{2\pi}{n}$. Άρα οι λύσεις της $z^n = w$ είναι οι κορυφές ενός κανονικού n-γώνου και βρίσκονται πάνω στον κύκλο με κέντρο 0 και ακτίνα $\sqrt[n]{|w|}$.

Παράδειγμα 6.4.1. Αν $w = 1$, οι λύσεις της $z^n = 1$ ονομάζονται **n-οστές ρίζες της μονάδας**. Μια από τις τιμές του $\arg 1$ είναι η $\phi = 0$, οπότε οι n-οστές ρίζες της μονάδας είναι οι μιγαδικοί

$$e^{i\frac{m2\pi}{n}} \qquad \text{με } m = 0, 1, \ldots, n-1$$

ή, πιο αναλυτικά,

$$1, e^{i\frac{2\pi}{n}}, \ldots\ldots, e^{i(n-1)\frac{2\pi}{n}}.$$

Η πρώτη μη-τετριμμένη από αυτές τις n-οστές ρίζες συμβολίζεται

$$\omega_n = e^{i\frac{2\pi}{n}}$$

και ονομάζεται **πρωτεύουσα n-οστή ρίζα της μονάδας**. Προφανώς, όλες οι άλλες προκύπτουν από αυτήν ως εξής:

$$\omega_n{}^m \qquad \text{με } m = 0, 1, \ldots, n-1$$

ή, πιο αναλυτικά,

$$1, \omega_n, \ldots\ldots, \omega_n{}^{n-1}.$$

Βάσει του τελευταίου παραδείγματος, βλέπουμε ότι οι λύσεις της $z^n = w$ γράφονται

$$z_0 {\omega_n}^m = \sqrt[n]{|w|}\, e^{i\frac{\phi}{n}} {\omega_n}^m \qquad \text{με } m = 0, 1, \ldots, n-1,$$

όπου $z_0 = \sqrt[n]{|w|}\, e^{i\frac{\phi}{n}}$ είναι μια από τις λύσεις αυτές, ή, πιο αναλυτικά,

$$z_0, z_0\omega_n, \ldots\ldots, z_0{\omega_n}^{n-1}.$$

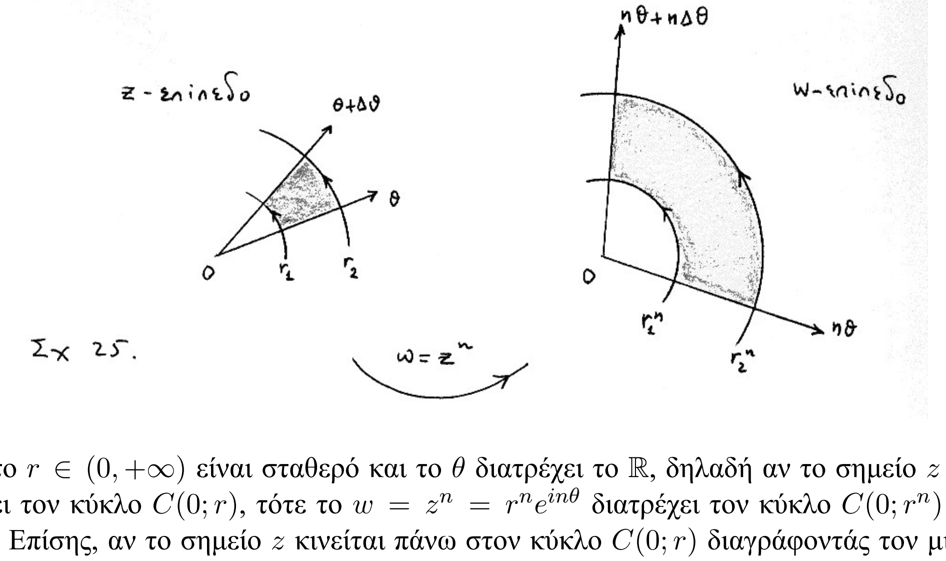
Θα δούμε, τώρα, πώς η συνάρτηση $w = z^n$ απεικονίζει διάφορα σημεία και σχήματα του z-επιπέδου σε σημεία και σχήματα του w-επιπέδου. Δείτε το σχήμα 25. Συμβολίζουμε: $z = re^{i\theta}$ και $w = se^{i\phi}$, αφήνοντας κατά μέρος τους $z = 0$ και $w = 0$. Οδηγός μας θα είναι οι σχέσεις:

$$w = z^n \qquad \Leftrightarrow \qquad |w| = |z|^n, \ \arg w = n \arg z$$

ή, ισοδύναμα,

$$w = z^n \qquad \Leftrightarrow \qquad s = r^n, \ \phi = n\theta.$$

Αν το $\theta \in \mathbb{R}$ είναι σταθερό και το r διατρέχει το $(0, +\infty)$, δηλαδή αν το $z = re^{i\theta}$ διατρέχει την ημιευθεία r_θ στο z-επίπεδο $\mathbb{C}$, η οποία έχει κορυφή το 0 (δεν περιέχει το 0) και σχηματίζει γωνία θ με τον θετικό x-ημιάξονα, τότε το $w = z^n = r^n e^{in\theta}$ διατρέχει την ημιευθεία r_ϕ στο w-επίπεδο $\mathbb{C}$, η οποία έχει κορυφή το 0 (δεν περιέχει το 0) και σχηματίζει γωνία $\phi = n\theta$ με τον θετικό u-ημιάξονα. Επίσης, αν το σημείο z κινείται πάνω στην ημιευθεία r_θ από το 0 προς το ∞, δηλαδή αν το r αυξάνεται από το 0 προς το $+\infty$, τότε το αντίστοιχο σημείο $w = z^n$ κινείται πάνω στην ημιευθεία r_ϕ από το 0 προς το ∞. Αν το θ αυξηθεί κατά $\Delta\theta$, δηλαδή αν η ημιευθεία r_θ περιστραφεί με τη θετική φορά κατά γωνία $\Delta\theta$, τότε η αντίστοιχη ημιευθεία r_ϕ θα περιστραφεί με τη θετική φορά κατά γωνία $\Delta\phi = n\Delta\theta$. Αν $0 < \Delta\theta < \frac{2\pi}{n}$, τότε η γωνία στο z-επίπεδο ανάμεσα στις ημιευθείες r_θ και $r_{\theta+\Delta\theta}$ (η οποία διαγράφεται πηγαίνοντας από την πρώτη ημιευθεία στη δεύτερη με τη θετική φορά περιστροφής) θα απεικονιστεί στην γωνία στο w-επίπεδο ανάμεσα στις ημιευθείες r_ϕ και $r_{\phi+\Delta\phi}$ (η οποία διαγράφεται πηγαίνοντας από την πρώτη ημιευθεία στη δεύτερη με τη θετική φορά περιστροφής). Αν $\Delta\theta = \frac{2\pi}{n}$, τότε οι ημιευθείες r_ϕ και $r_{\phi+\Delta\phi}$ συμπίπτουν και τότε η (ανοικτή) γωνία στο z-επίπεδο ανάμεσα στις ημιευθείες r_θ και $r_{\theta+\Delta\theta}$ θα απεικονιστεί σε ολόκληρο το w-επίπεδο εκτός της ημιευθεία $r_\phi = r_{\phi+\Delta\phi}$ (και εκτός του 0, φυσικά). Αν η αρχική γωνία περιέχει μια τουλάχιστον από τις συνοριακές ημιευθείες της, τότε η εικόνα της θα είναι ολόκληρο το w-επίπεδο (εκτός του 0, φυσικά). Αν $\Delta\theta > \frac{2\pi}{n}$, τότε η γωνία στο z-επίπεδο ανάμεσα στις ημιευθείες r_θ και $r_{\theta+\Delta\theta}$ θα απεικονιστεί σε ολόκληρο το w-επίπεδο (εκτός του 0, φυσικά) και “με επικάλυψη”.



Αν το $r \in (0, +\infty)$ είναι σταθερό και το θ διατρέχει το $\mathbb{R}$, δηλαδή αν το σημείο $z = re^{i\theta}$ διατρέχει τον κύκλο $C(0; r)$, τότε το $w = z^n = r^n e^{in\theta}$ διατρέχει τον κύκλο $C(0; r^n)$ στο w-επίπεδο. Επίσης, αν το σημείο z κινείται πάνω στον κύκλο $C(0; r)$ διαγράφοντάς τον μια φορά με τη θετική φορά περιστροφής, δηλαδή αν το θ αυξάνεται σε ένα διάστημα μήκους 2π, τότε το αντίστοιχο σημείο $w = z^n$ κινείται πάνω στον κύκλο $C(0; r^n)$ διαγράφοντάς τον n φορές με τη θετική φορά περιστροφής. Αν το θ αυξάνεται σε ένα διάστημα μήκους $\frac{2\pi}{n}$, τότε το σημείο $w = z^n$ διαγράφει ολόκληρο τον κύκλο $C(0; r^n)$ μια φορά με τη θετική φορά περιστροφής. Αν το σημείο z κινείται πάνω στον κύκλο $C(0; r)$ με τη θετική φορά περιστροφής διαγράφοντας ένα τόξο γωνίας $\Delta\theta < \frac{2\pi}{n}$, τότε το $w = z^n$ διαγράφει με τη θετική φορά περιστροφής ένα τόξο του κύκλου $C(0; r^n)$ γωνίας $n\Delta\theta$. Ενώ, αν $\Delta\theta > \frac{2\pi}{n}$, τότε το $w = z^n$ διαγράφει με τη θετική φορά περιστροφής ολόκληρο τον κύκλο $C(0; r^n)$ "με επικάλυψη". Αν το r αυξηθεί, δηλαδή αν ο κύκλος $C(0; r)$ μεγαλώσει, τότε ο αντίστοιχος κύκλος $C(0; r^n)$ θα μεγαλώσει. Ο δακτύλιος στο z-επίπεδο ανάμεσα στους κύκλους $C(0; r_1)$ και $C(0; r_2)$, όπου $0 < r_1 < r_2$, θα απεικονιστεί στον δακτύλιο στο w-επίπεδο ανάμεσα στους κύκλους $C(0; {r_1}^n)$ και $C(0; {r_2}^n)$.

Είδαμε πιο πριν, για κάθε $w \neq 0$, την ισοδυναμία

$$z^n = w \qquad \Leftrightarrow \qquad z = \sqrt[n]{|w|}\, e^{i\frac{\arg w}{n}}.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Συμβολίζουμε*

$$w^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{|w|}\, e^{i\frac{\arg w}{n}} \qquad \textit{για κάθε } w \neq 0$$

*και το σύμβολο $w^{\frac{1}{n}}$ ονομάζεται n-**οστή ρίζα** του w.*

Σχόλιο. Θα συμφωνήσουμε να χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\sqrt[n]{r}$ για την μη-αρνητική n-οστή ρίζα ενός μη-αρνητικού (πραγματικού) αριθμού. Το σύμβολο $w^{\frac{1}{n}}$ θα το χρησιμοποιούμε για μιγαδικούς $w \neq 0$ και, όπως είδαμε, έχει n τιμές.

Είδαμε ότι η παράσταση $z = w^{\frac{1}{n}}$ έχει ακριβώς n τιμές οι οποίες βρίσκονται στις κορυφές κανονικού n-γώνου πάνω στον κύκλο $C(0; \sqrt[n]{|w|})$ του z-επιπέδου. Επομένως, κάθε τόξο αυτού του κύκλου, το οποίο αντιστοιχεί σε κεντρική γωνία $\frac{2\pi}{n}$ και περιέχει ένα μόνο από τα δυο άκρα του, περιέχει ακριβώς μια τιμή-σημείο της $z = w^{\frac{1}{n}}$. Επομένως, κάθε γωνία στο z-επίπεδο με κορυφή το 0, η οποία έχει άνοιγμα $\frac{2\pi}{n}$ και η οποία περιέχει μόνο μία από τις δυο συνοριακές ημιευθείες της, περιέχει, για κάθε $w \neq 0$, ακριβώς μία τιμή-σημείο της $z = w^{\frac{1}{n}}$. Ειδικότερα, αν πάρουμε οποιοδήποτε θ_0 και θεωρήσουμε την γωνία

$$A_{\theta_0} = \Big\{re^{i\theta}\,\Big|\, r > 0, \theta_0 < \theta \leq \theta_0 + \frac{2\pi}{n}\Big\} \quad \text{ή} \quad A_{\theta_0} = \Big\{re^{i\theta}\,\Big|\, r > 0, \theta_0 \leq \theta < \theta_0 + \frac{2\pi}{n}\Big\},$$

τότε στην γωνία A_{θ_0} περιέχεται ακριβώς μια τιμή του $z = w^{\frac{1}{n}}$.

Επιστρέφοντας στην αρχική ισοδυναμία, βλέπουμε ότι γράφεται

$$z^n = w \qquad \Leftrightarrow \qquad z = w^{\frac{1}{n}}.$$

Δηλαδή, *οι τιμές του $w^{\frac{1}{n}}$ είναι ακριβώς όλες οι λύσεις της εξίσωσης $z^n = w$*

Όπως έχουμε καταλάβει μέχρι τώρα, η συνάρτηση $w = z^n$ από το $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ επί του $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ είναι n-προς-ένα. Άρα δεν μπορούμε να μιλάμε για αντίστροφη συνάρτηση, παρά μόνο μέσω του εξής μη συμβατικού ορισμού.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Λέμε ότι η **πλειότιμη συνάρτηση** n-οστή ρίζα*

$$\mathbb{C} \setminus \{0\} \ni w \mapsto z = w^{\frac{1}{n}} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

είναι η αντίστροφη συνάρτηση της n-οστής δύναμης $\mathbb{C} \setminus \{0\} \ni z \mapsto w = z^n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Σύμφωνα με τον συμβατικό ορισμό της έννοιας της συνάρτησης, η "συνάρτηση" που ορίσαμε δεν είναι συνάρτηση, διότι στο w δεν αντιστοιχεί μόνο μια τιμή $z = w^{\frac{1}{n}}$. Γι αυτό και λέμε *πλειότιμη συνάρτηση*. Αν θέλουμε να έχουμε αντίστροφη συνάρτηση της n-οστής δύναμης, πρέπει πρώτα να περιορίσουμε το πεδίο ορισμού της ώστε να είναι (στο νέο πεδίο ορισμού) ένα-προς-ένα και κατόπιν να την αντιστρέψουμε.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω $A \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ και συνάρτηση $f : A \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Λέμε ότι η f είναι* **συνεχής κλάδος της n-οστής ρίζας** *στο σύνολο A αν*

(i) η f είναι συνεχής στο A και

(ii) για κάθε $w \in A$ η αντίστοιχη τιμή $z = f(w)$ είναι μια από τις τιμές της $w^{\frac{1}{n}}$ ή, ισοδύναμα, η $z = f(w)$ είναι λύση της εξίσωσης $z^n = w$ ή, ισοδύναμα, ισχύει $f(w)^n = w$.

Η Πρόταση 6.12 δίνει αρκετά παραδείγματα συνεχών κλάδων της n-οστής ρίζας.

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.12. *Θεωρούμε οποιοδήποτε ϕ_0, το αντίστοιχο σύνολο*

$$A_{\phi_0} = \{w = se^{i\phi} \,|\, s > 0, \phi_0 < \phi < \phi_0 + 2\pi\},$$

στο w-επίπεδο (δηλαδή το $\mathbb{C}$ χωρίς την ημιευθεία η οποία περιέχει το 0 και όλα τα w με γωνία ϕ_0) και την ανοικτή γωνία

$$B_{\phi_0/n} = \Big\{z = re^{i\theta} \,\Big|\, r > 0, \frac{\phi_0}{n} < \theta < \frac{\phi_0}{n} + \frac{2\pi}{n}\Big\}$$

στο z-επίπεδο.

Σύμφωνα με προηγούμενη συζήτηση, για κάθε τιμή του w στο A_{ϕ_0} υπάρχει μοναδική τιμή του z στην γωνία $B_{\phi_0/n}$ ώστε $z^n = w$. Ορίζουμε την συνάρτηση

$$f : A_{\phi_0} \to B_{\phi_0/n}$$

έτσι ώστε για κάθε $w \in A_{\phi_0}$ να είναι $f(w) = z$, όπου z είναι ακριβώς αυτή η μοναδική τιμή του z στην γωνία $B_{\phi_0/n}$ ώστε $z^n = w$.

Είναι προφανές ότι η f ικανοποιεί το (ii) του προηγούμενου ορισμού για το σύνολο A_{ϕ_0}. Η f είναι και συνεχής στο A_{ϕ_0}, οπότε ικανοποιεί και το (i) του προηγούμενου ορισμού. Άρα η f είναι συνεχής κλάδος της n-οστής ρίζας στο A_{ϕ_0}.

Απόδειξη. Έστω ότι η f δεν είναι συνεχής σε κάποιο w του A_{ϕ_0}. Τότε υπάρχει κάποια ακολουθία (w_k) στο A_{ϕ_0} για την οποία ισχύει

$$w_k \to w \qquad \text{και} \qquad f(w_k) \not\to f(w).$$

Το $f(w_k) \not\to f(w)$ συνεπάγεται ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(w_k) - f(w)| \geq \delta > 0$ για άπειρα k. Αυτά τα άπειρα k ορίζουν μια υποακολουθία της (w_k) και, τώρα, για απλούστευση όσων θα ακολουθήσουν, περιοριζόμαστε στην υποακολουθία και (αγνοώντας τους υπόλοιπους όρους της αρχικής ακολουθίας) ονομάζουμε (w_k) την υποακολουθία και έτσι έχουμε μια ακολουθία (w_k) στο σύνολο A_{ϕ_0} για την οποία ισχύει

$$w_k \to w \qquad \text{και} \qquad |f(w_k) - f(w)| \geq \delta > 0 \quad \text{για κάθε } k. \tag{6.11}$$

Θέτουμε, επίσης,

$$z = f(w) \qquad \text{και} \qquad z_k = f(w_k) \quad \text{για κάθε } k,$$

οπότε

$$z^n = w \qquad \text{και} \qquad {z_k}^n = w_k \quad \text{για κάθε } k \tag{6.12}$$

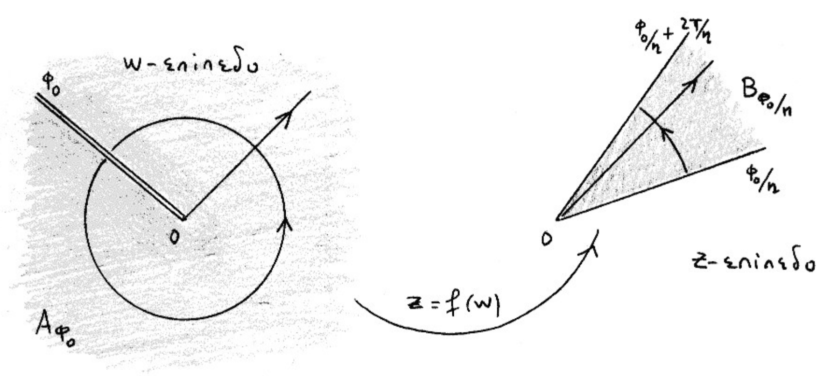
και η (6.11) ξαναγράφεται

$$w_k \to w \qquad \text{και} \qquad |z_k - z| \geq \delta > 0 \quad \text{για κάθε } k. \tag{6.13}$$

Επειδή $w_k, w \in A_{\phi_0}$, τα w_k, w έχουν πολικές αναπαραστάσεις

$$w = |w|e^{i\phi} \qquad \text{και} \qquad w_k = |w_k|e^{i\phi_k} \quad \text{για κάθε } k,$$

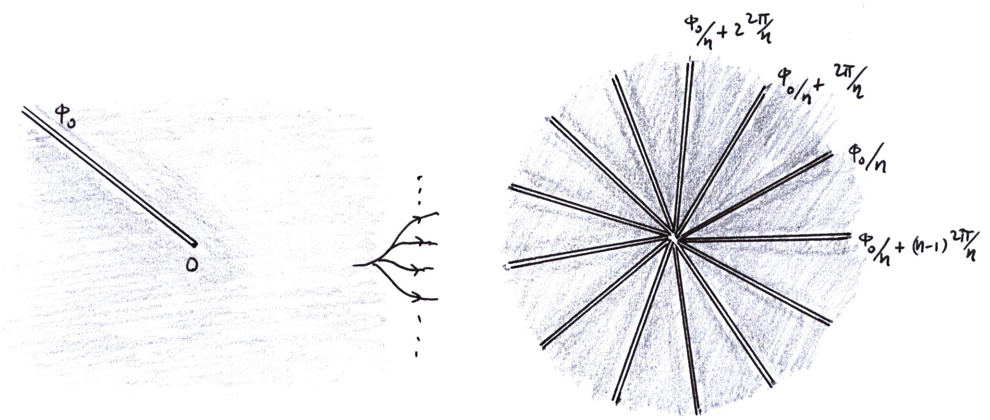
όπου
$$\phi_0 < \phi < \phi_0 + 2\pi \qquad \text{και} \qquad \phi_0 < \phi_k < \phi_0 + 2\pi \quad \text{για κάθε } k.$$
Τώρα, επειδή το σύνολο τιμών της f είναι η γωνία $B_{\phi_0/n}$, έχουμε ότι
$$z = \sqrt[n]{|w|}\, e^{i\frac{\phi}{n}} \qquad \text{και} \qquad z_k = \sqrt[n]{|w_k|}\, e^{i\frac{\phi_k}{n}} \quad \text{για κάθε } k.$$
Επειδή $w_k \to w$, συνεπάγεται $\sqrt[n]{|w_k|} \to \sqrt[n]{|w|}$. Άρα η ακολουθία $(\sqrt[n]{|w_k|})$ είναι φραγμένη. Άρα η μιγαδική ακολουθία (z_k) είναι φραγμένη. Επομένως, από το Θεώρημα των Bolzano - Weierstrass συνεπάγεται ότι υπάρχει υποακολουθία (z_{k_m}) η οποία συγκλίνει σε κάποιο z' :
$$z_{k_m} \to z'. \tag{6.14}$$
Επειδή όλοι οι z_{k_m} ανήκουν στην γωνία $B_{\phi_0/n}$, συνεπάγεται ότι ο z' είναι οριακό σημείο της γωνίας αυτής, οπότε ανήκει στην αντίστοιχη κλειστή γωνία:
$$z' \in \mathrm{cl}\, B_{\phi_0/n} = \left\{ re^{i\theta} \,\middle|\, r > 0, \frac{\phi_0}{n} \le \theta \le \frac{\phi_0}{n} + \frac{2\pi}{n} \right\} \cup \{0\}. \tag{6.15}$$
Για την αντίστοιχη (δηλαδή, με τους ίδιους δείκτες) υποακολουθία της (w_k) έχουμε, λόγω της (6.13),
$$w_{k_m} \to w.$$
Λόγω της συνέχειας της n-οστής δύναμης και λόγω των (6.12) και (6.14), συνεπάγεται
$$w_{k_m} = {z_{k_m}}^n \to z'^n$$
και, επομένως,
$$z'^n = w.$$
Πάλι λόγω της (6.12) έχουμε
$$z'^n = z^n,$$
οπότε οι μιγαδικοί z' και z σχηματίζουν, με το 0 ως κορυφή, γωνία ίση με ακέραιο πολλαπλάσιο του $\frac{2\pi}{n}$. Αυτομάτως καταλήγουμε σε άτοπο, διότι ο z ανήκει στην ανοικτή γωνία $B_{\phi_0/n}$, ο z' ανήκει στην κλειστή γωνία $\mathrm{cl}\, B_{\phi_0/n}$ (δείτε την (6.15)) και οι γωνίες αυτές (ουσιαστικά, η ίδια γωνία) έχουν άνοιγμα ακριβώς $\frac{2\pi}{n}$.
Άρα η f είναι συνεχής σε κάθε w του A_{ϕ_0}. □



Σχ 26.

Από τις ιδιότητες της συνάρτησης $w = z^n$ προκύπτουν τα εξής για τον συνεχή κλάδο $f : A_{\phi_0} \to B_{\phi_0/n}$ της n-οστής ρίζας που ορίσθηκε στην Πρόταση 6.12. Δείτε το σχήμα 26. Η f απεικονίζει τις ημιευθείες στο A_{ϕ_0} με κορυφή το 0 (χωρίς το 0) στις ημιευθείες στο $B_{\phi_0/n}$ με κορυφή το 0 (χωρίς το 0) και τα κυκλικά τόξα στο A_{ϕ_0} κέντρου 0 (χωρίς τα άκρα τους στις δυο συνοριακές ημιευθείες του A_{ϕ_0}) στα κυκλικά τόξα στο $B_{\phi_0/n}$ κέντρου 0 (χωρίς τα άκρα τους στις δυο συνοριακές ημιευθείες του $B_{\phi_0/n}$).

Επιλέγοντας, λοιπόν, ένα οποιοδήποτε πραγματικό ϕ_0, ορίζουμε έναν συνεχή κλάδο της n-οστής ρίζας $z = w^{\frac{1}{n}}$ με πεδίο ορισμού το σύνολο A_{ϕ_0} του w-επιπέδου και σύνολο τιμών την γωνία $B_{\phi_0/n}$ του z-επιπέδου. Παρατηρήστε ότι αν, αντί του ϕ_0, θεωρήσουμε το $\phi_0 + k2\pi$ με οποιοδήποτε $k = 0, 1, \dots, n-1$, τότε το πεδίο ορισμού $A = A_{\phi_0 + k2\pi}$ *μένει το ίδιο* αλλά το σύνολο τιμών, δηλαδή η γωνία $B_{(\phi_0+k2\pi)/n}$ περιστρέφεται με τη θετική ή την αρνητική φορά περιστροφής κατά γωνία $k\frac{2\pi}{n}$. Οι n γωνίες $B_{(\phi_0+k2\pi)/n}$ με $k = 0, 1, \dots, n-1$ είναι διαδοχικές και καλύπτουν ολόκληρο το z-επίπεδο (εκτός από τις ενδιάμεσες συνοριακές ημιευθείες τους και το 0). Δείτε το σχήμα 27.



Σχ 27. n συνεχείς κλάδοι της n-οστής ρίζας στο A_{ϕ_0}

Συνοψίζουμε:
Αν από το w-επίπεδο αφαιρέσουμε μια οποιαδήποτε ημιευθεία με κορυφή το 0, τότε στο συμπληρωματικό ανοικτό σύνολο A ορίζονται n συνεχείς κλάδοι $z = w^{\frac{1}{n}}$ της n-οστής ρίζας. Καθένας από αυτούς απεικονίζει το A επί μιας συγκεκριμένης ανοικτής γωνίας του z-επιπέδου ανοίγματος $\frac{2\pi}{n}$. Οι διάφορες αυτές γωνίες, που αντιστοιχούν στους διάφορους κλάδους της n-οστής ρίζας (στο ίδιο σύνολο A), είναι ξένες ανά δύο, διαδοχικές και καλύπτουν το z-επίπεδο (εκτός από τις συνοριακές ημιευθείες τους και το 0). Φυσικά, αν αλλάξουμε την αρχική ημιευθεία η οποία καθορίζει το σύνολο A, τότε αλλάζουν και οι αντίστοιχες γωνίες και οι αντίστοιχοι συνεχείς κλάδοι της n-οστής ρίζας.

Παράδειγμα 6.4.2. Ένα συγκεκριμένο παράδειγμα συνεχούς κλάδου της n-οστής ρίζας έχουμε όταν πάρουμε $\phi_0 = -\pi$. Τότε το σύνολο

$$A_{-\pi}$$

είναι το w-επίπεδο εκτός του αρνητικού u-ημιάξονα (όπου $w = u + iv$) και το σύνολο τιμών του κλάδου της n-οστής ρίζας είναι η γωνία

$$B_{-\pi/n} = \Big\{ re^{i\theta} \,\Big|\, r > 0, -\frac{\pi}{n} < \theta < \frac{\pi}{n} \Big\}.$$

Ο κλάδος αυτός της n-οστής ρίζας έχει τύπο

$$z = \sqrt[n]{s}\, e^{i\frac{\phi}{n}} \qquad \text{για } w = se^{i\phi} \text{ με } -\pi < \phi < \pi.$$

Είναι φανερό ότι ο τύπος αυτός γράφεται

$$z = \sqrt[n]{|w|}\, e^{i\frac{\operatorname{Arg} w}{n}}.$$

Πρέπει να θυμόμαστε ότι στο ίδιο σύνολο $A_{-\pi}$ του w-επιπέδου, μαζί με τον παραπάνω κλάδο της n-οστής ρίζας, ορίζονται n συνεχείς κλάδοι της n-οστής ρίζας. Καθένας από αυτούς απεικονίζει το $A_{-\pi}$ στην ανάλογη γωνία $B_{(-\pi+k2\pi)/n}$ με $k = 0, 1, \ldots, n-1$, η οποία προκύπτει αν περιστρέψουμε την $B_{-\pi/n}$ με τη θετική φορά κατά γωνία $k\frac{2\pi}{n}$. Ο κλάδος αυτός προκύπτει από τον παραπάνω κλάδο $z = f(w)$ πολλαπλασιάζοντας με τη σταθερά $e^{ik\frac{2\pi}{n}}$ (για να έχουμε περιστροφή κατά γωνία $k\frac{2\pi}{n}$) οπότε ο τύπος του είναι

$$z = f(w)e^{ik\frac{2\pi}{n}} = f(w){\omega_n}^k,$$

όπου ω_n είναι η πρωτεύουσα n-οστή ρίζα της μονάδας.

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.13. *Έστω $A \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ και $f : A \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ η οποία είναι συνεχής κλάδος της n-οστής ρίζας στο σύνολο A. Αν το w_0 είναι οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο του A, τότε η f είναι αυτομάτως παραγωγίσιμη στο w_0 και*

$$f'(w_0) = \frac{f(w_0)}{nw_0}.$$

Απόδειξη. Γράφουμε $z_0 = f(w_0)$ και $z = f(w)$ για κάθε $w \in A$. Επομένως, είναι ${z_0}^n = w_0$ και $z^n = w$. Επειδή η f είναι συνεχής, αν $w \to w_0$ συνεπάγεται $z \to z_0$. Επομένως, χρησιμοποιώντας την παραγωγισιμότητα της n-οστής δύναμης στο z_0, έχουμε ότι όταν $w \to w_0$, τότε

$$\frac{f(w) - f(w_0)}{w - w_0} = \frac{z - z_0}{z^n - {z_0}^n} = \frac{1}{\frac{z^n - {z_0}^n}{z - z_0}} \to \frac{1}{n{z_0}^{n-1}} = \frac{z_0}{nw_0} = \frac{f(w_0)}{nw_0}.$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο w_0 και $f'(w_0) = \frac{f(w_0)}{nw_0}$. □

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι αν η $f : A \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής κλάδος της n-οστής ρίζας στο σύνολο $A \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$, τότε η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του A, δηλαδή η f είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του A. Και, επειδή το εσωτερικό του A είναι ανοικτό σύνολο, η f είναι *αναλυτική* στο εσωτερικό του A. Ειδικώτερα, και με πιο "χαλαρό" συμβολισμό:

Κάθε συνεχής κλάδος $z = w^{\frac{1}{n}}$ σε ανοικτό σύνολο $A \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ είναι αναλυτική συνάρτηση στο A και ισχύει

$$\frac{dz}{dw} = \frac{dw^{\frac{1}{n}}}{dw} = \frac{w^{\frac{1}{n}}}{nw} \qquad \text{στο } A.$$

Γι αυτό κάθε συνεχής κλάδος της n-οστής ρίζας σε ανοικτό σύνολο $A \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ονομάζεται και **αναλυτικός κλάδος της n-οστής ρίζας** *στο A.*

Παράδειγμα 6.4.3. Προηγουμένως ορίσαμε n συνεχείς κλάδους της n-οστής ρίζας στο ανοικτό σύνολο A το οποίο προκύπτει αν από το w-επίπεδο αφαιρέσουμε μια οποιαδήποτε ημιευθεία με κορυφή το 0. Όλοι αυτοί οι κλάδοι είναι αναλυτικοί κλάδοι της n-οστής ρίζας στο A.

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.14. *Έστω $A \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ και $f_1, f_2 : A \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Έστω, επίσης, ω_n η πρωτεύουσα n-οστή ρίζα της μονάδας.*

[α] *Αν η f_1 είναι συνεχής κλάδος της n-οστής ρίζας στο A και ισχύει $\frac{f_2(w)}{f_1(w)} = {\omega_n}^k$ στο A, όπου ο $k = 0, 1, \ldots, n-1$ είναι σταθερός (δηλαδή, ανεξάρτητος του w στο A), τότε και η f_2 είναι συνεχής κλάδος της n-οστής ρίζας στο A.*

[β] *Αν, επιπλέον, το σύνολο A είναι συνεκτικό και αν οι f_1 και f_2 είναι συνεχείς κλάδοι της n-οστής ρίζας στο A, τότε ισχύει $\frac{f_2(w)}{f_1(w)} = {\omega_n}^k$ στο A, όπου ο $k = 0, 1, \ldots, n-1$ είναι σταθερός (δηλαδή, ανεξάρτητος του w στο A).*

Ειδικώτερα, αν οι f_1, f_2 έχουν την ίδια τιμή σε κάποιο $w_0 \in A$, τότε ταυτίζονται στο A.

Απόδειξη. [α] Η f_1 είναι συνεχής στο A και κάθε σταθερή συνάρτηση είναι συνεχής στο A. Άρα και η $f_2 = f_1{\omega_n}^k$ είναι συνεχής στο A.
Επίσης, ισχύει $f_1(w)^n = w$ για κάθε $w \in A$. Άρα

$$f_2(w)^n = f_1(w)^n({\omega_n}^k)^n = w({\omega_n}^n)^k = w1 = w$$

για κάθε $w \in A$. Άρα η f_2 είναι συνεχής κλάδος της n-οστής ρίζας στο A.
[β] Επειδή για κάθε $w \in A$ οι δυο τιμές $f_2(w)$ και $f_1(w)$ είναι τιμές του $w^{\frac{1}{n}}$, συνεπάγεται ότι για κάθε $w \in A$ ισχύει

$$\Big(\frac{f_2(w)}{f_1(w)}\Big)^n = \frac{f_2(w)^n}{f_1(w)^n} = \frac{w}{w} = 1.$$

Άρα για κάθε $w \in A$ ο αριθμός $\frac{f_2(w)}{f_1(w)}$ είναι n-οστή ρίζα της μονάδας. Άρα έχουμε

$$\frac{f_2}{f_1} : A \to \{1, \omega_n, \dots, {\omega_n}^{n-1}\}$$

και το δεύτερο σύνολο αποτελείται από n μεμονωμένα σημεία, τις κορυφές ενός κανονικού n-γώνου στον μοναδιαίο κύκλο $C(0;1)$ μια από τις οποίες είναι το 1.
Η συνάρτηση $\frac{f_2}{f_1}$ είναι συνεχής και το A είναι συνεκτικό, οπότε και το σύνολο τιμών $\frac{f_2}{f_1}(A)$ πρέπει να είναι συνεκτικό. Αυτό μπορεί να συμβεί μόνο αν το σύνολο τιμών είναι μονοσύνολο. Άρα η $\frac{f_2}{f_1}$ είναι σταθερή στο A και, επομένως, ισχύει $\frac{f_2(w)}{f_1(w)} = {\omega_n}^k$ στο A, όπου ο $k = 0, 1, \dots, n-1$ είναι σταθερός (δηλαδή, ανεξάρτητος του w στο A).
Το τελευταίο συμπέρασμα είναι προφανές: αν ισχύει $f_2(w_0) = f_1(w_0)$, τότε, επειδή η $\frac{f_2}{f_1}$ είναι σταθερή στο A, συνεπάγεται ότι ισχύει $\frac{f_2(w)}{f_1(w)} = \frac{f_2(w_0)}{f_1(w_0)} = 1$ για κάθε $w \in A$ οπότε $f_2(w) = f_1(w)$ για κάθε $w \in A$. □

Από την Πρόταση 6.14 έχουμε το εξής:
Αν στο συνεκτικό σύνολο A γνωρίζουμε έναν συνεχή κλάδο της n-οστής ρίζας, τότε παίρνουμε κάθε άλλο συνεχή κλάδο της n-οστής ρίζας στο A πολλαπλασιάζοντας τον αρχικό με μια οποιαδήποτε σταθερή n-οστή ρίζα της μονάδας. Δεν υπάρχουν άλλοι συνεχείς κλάδοι της n-οστής ρίζας στο A.

Μια παρατήρηση (και για τα επόμενα παραδείγματα). Όταν πρέπει να βρούμε έναν συνεχή κλάδο της n-οστής ρίζας σε ένα σύνολο A με μια δοσμένη τιμή z_0 σε ένα δοσμένο σημείο $w_0 \in A$, πρέπει να είναι εξασφαλισμένο ότι η τιμή z_0 είναι *αποδεκτή*. Θα πρέπει δηλαδή το z_0 να είναι μια από τις τιμές της ${w_0}^{\frac{1}{n}}$ ή, ισοδύναμα, ${z_0}^n = w_0$.

Παράδειγμα 6.4.4. Έστω $A = A_{-\pi}$ το w-επίπεδο εκτός του αρνητικού u-ημιάξονα (όπου $w = u + iv$). Θέλουμε να βρούμε συνεχή κλάδο της τετραγωνικής ρίζας $z = w^{\frac{1}{2}}$ στο A με τιμή $z = 1$ για $w = 1$.
Στο A γνωρίζουμε από το παράδειγμα 6.4.2 τον συνεχή κλάδο της τετραγωνικής ρίζας, ο οποίος απεικονίζει το A στη γωνία

$$B_{-\pi/2} = \Big\{re^{i\theta} \,\Big|\, r > 0, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\Big\},$$

δηλαδή στο δεξιό ημιεπίπεδο του z-επιπέδου, και έχει τύπο

$$z = \sqrt{s}\, e^{i\frac{\phi}{2}} = \sqrt{|w|}\, e^{i\frac{\operatorname{Arg} w}{2}} \qquad \text{για } w = se^{i\phi} \text{ με } -\pi < \phi < \pi.$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 6.14[β], επειδή το A είναι συνεκτικό, δεν υπάρχει άλλος τέτοιος συνεχής κλάδος της τετραγωνικής ρίζας στο A.

Παράδειγμα 6.4.5. Έστω $A = A_{-\pi}$ το w-επίπεδο εκτός του αρνητικού u-ημιάξονα (όπου $w = u + iv$). Θέλουμε να βρούμε συνεχή κλάδο της τετραγωνικής ρίζας $z = w^{\frac{1}{2}}$ στο A με τιμή $z = -1$ για $w = 1$.
Ήδη μιλήσαμε στο προηγούμενο παράδειγμα για ένα συνεχή κλάδο της τετραγωνικής ρίζας στο A. Από την Πρόταση 6.14[β] γνωρίζουμε ότι υπάρχουν ακριβώς δυο κλάδοι της τετραγωνικής ρίζας στο συγκεκριμένο συνεκτικό σύνολο A. Τον δεύτερο κλάδο τον βρίσκουμε θεωρώντας την πρωτεύουσα τετραγωνική ρίζα του 1, δηλαδή τον αριθμό

$$\omega_2 = e^{i\frac{2\pi}{2}} = e^{i\pi} = -1.$$

(Δεν θέλει πολλή σκέψη: οι τετραγωνικές ρίζες του 1 είναι οι λύσεις της $z^2 = 1$, δηλαδή οι αριθμοί $1, -1$.)
Άρα ο δεύτερος κλάδος της τετραγωνικής ρίζας έχει τύπο

$$z = \sqrt{s}\, e^{i\frac{\phi}{2}} {\omega_2}^1 = -\sqrt{s}\, e^{i\frac{\phi}{2}} \qquad \text{για } w = se^{i\phi} \text{ με } -\pi < \phi < \pi,$$

δηλαδή ακριβώς ο αντίθετος του προηγούμενου κλάδου. Ο κλάδος αυτός απεικονίζει το A στη γωνία

$$B_{(-\pi+2\pi)/2} = B_{\pi/2} = \Big\{ re^{i\theta} \,\Big|\, r > 0, \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \Big\},$$

δηλαδή στο αριστερό ημιεπίπεδο του z-επιπέδου.
Σύμφωνα με την Πρόταση 6.14[β], επειδή το A είναι συνεκτικό, δεν υπάρχει άλλος τέτοιος συνεχής κλάδος της τετραγωνικής ρίζας στο A.

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.15. *Σε κάθε κύκλο $C(0; r)$ δεν ορίζεται συνεχής κλάδος της n-οστής ρίζας. Άρα δεν ορίζεται συνεχής κλάδος της n-οστής ρίζας σε κανένα σύνολο A το οποίο περιέχει κύκλο με κέντρο* 0.

Απόδειξη. Έστω ότι ορίζεται συνεχής κλάδος της n-οστής ρίζας στον κύκλο $C(0; r)$, δηλαδή

$$g : C(0; r) \to \mathbb{C}$$

η οποία είναι συνεχής στον $C(0; r)$ και για κάθε $w \in C(0; r)$ ισχύει $g(w)^n = w$.
Θεωρούμε τον συνεχή κλάδο f της n-οστής ρίζας, ο οποίος ορίστηκε στο παράδειγμα 6.4.2 και ο οποίος είναι συνεχής συνάρτηση στο w-επίπεδο εκτός από τον αρνητικό u-ημιάξονα.
Το κοινό μέρος του συνόλου στο οποίο είναι ορισμένη η f και του κύκλου $C(0; r)$ είναι το

$$B = C(0; r) \setminus \{-r\}.$$

Άρα ο περιορισμός της g στο B και ο περιορισμός της f στο B είναι δυο συνεχείς κλάδοι της n-οστής ρίζας στο B. Επειδή το B είναι συνεκτικό, υπάρχει (σταθερός) ακέραιος k ώστε να ισχύει

$$f(w) = g(w){\omega_n}^k \qquad \text{για κάθε } w \in B. \tag{6.16}$$

Τώρα θεωρούμε δυο ακολουθίες στο B. Τις (w'_k) και (w''_k) με τύπους

$$w'_k = re^{i(\pi - \frac{\pi}{k})}, \qquad w''_k = re^{i(-\pi + \frac{\pi}{k})} \qquad \text{για κάθε } k.$$

Και οι δυο ακολουθίες "κινούνται" πάνω στον κύκλο $C(0; r)$ προς το σημείο $-r$. Η πρώτη είναι στο άνω ημικύκλιο και πλησιάζει το $-r$ και η δεύτερη είναι στο κάτω ημικύκλιο και πλησιάζει κι αυτή το $-r$.
Επειδή η g είναι ορισμένη και συνεχής σε ολόκληρο τον κύκλο $C(0; r)$, συνεπάγεται

$$g(w'_k) \to g(-r), \qquad g(w''_k) \to g(-r)$$

και, επομένως,

$$\frac{g(w_k')}{g(w_k'')} \to 1.$$

Από την (6.16) συνεπάγεται

$$\frac{f(w_k')}{f(w_k'')} \to 1.$$

Όμως,

$$\frac{f(w_k')}{f(w_k'')} = \frac{\sqrt[n]{r}e^{i\frac{1}{n}(\pi-\frac{\pi}{k})}}{\sqrt[n]{r}e^{i\frac{1}{n}(-\pi+\frac{\pi}{k})}} = e^{i\frac{1}{n}(2\pi-2\frac{\pi}{k})} \to e^{i\frac{2\pi}{n}}$$

και καταλήγουμε σε άτοπο.
Άρα δεν ορίζεται συνεχής κλάδος της n-οστής ρίζας στον κύκλο $C(0;r)$.
Αν ορίζεται συνεχής κλάδος g της n-οστής ρίζας σε κάποιο σύνολο A το οποίο περιέχει κύκλο με κέντρο 0, τότε ο περιορισμός της g στον κύκλο θα ήταν συνεχής κλάδος της n-οστής ρίζας στον κύκλο και αυτό, όπως είδαμε, είναι αδύνατο. □

Παράδειγμα 6.4.6. Δεν ορίζεται συνεχής κλάδος της n-οστής ρίζας σε δακτύλιο με κέντρο 0 ούτε στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

Ασκήσεις.

6.4.1. Υπολογίστε τα $(-1)^{\frac{1}{2}}$, $(-1)^{\frac{1}{3}}$, $(-1)^{\frac{1}{4}}$, $i^{\frac{1}{2}}$, $i^{\frac{1}{3}}$, $i^{\frac{1}{4}}$, $(\frac{1-i\sqrt{3}}{2})^{\frac{1}{2}}$, $(\frac{1-i\sqrt{3}}{2})^{\frac{1}{3}}$, $(\frac{1-i\sqrt{3}}{2})^{\frac{1}{4}}$.

6.4.2. [α] Βρείτε τις τιμές των $\log i^{\frac{1}{2}}$ και $\frac{1}{2}\log i$ και παρατηρήστε ότι $\log i^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log i$.
[β] Βρείτε τις τιμές των $\log i^2$ και $2\log i$ και παρατηρήστε ότι $\log i^2 \neq 2\log i$.
[γ] Γενικεύοντας το [α], αποδείξτε ότι για κάθε $w \neq 0$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $\log w^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\log w$.

6.4.3. Δείτε την άσκηση 1.1.29. Θεωρήστε δύο καμπύλες στο z-επίπεδο με εξισώσεις $x^2 - y^2 = \alpha$ και $2xy = \beta$. Αν υποθέσουμε ότι αυτές τέμνονται σε κάποιο σημείο (x_0, y_0), ποιά είναι η γωνία που σχηματίζουν στο σημείο αυτό; Απαντήστε με δύο τρόπους.

6.4.4. Έστω η $f : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to \mathbb{C}$ με τύπο

$$f(u,v) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\sqrt{u^2+v^2}+u}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{u^2+v^2}-u}{2}}, & \text{αν } u \in \mathbb{R}, v > 0 \\ \sqrt{u}, & \text{αν } u > 0, v = 0 \\ \sqrt{\frac{\sqrt{u^2+v^2}+u}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{u^2+v^2}-u}{2}}, & \text{αν } u \in \mathbb{R}, v < 0 \end{cases}$$

όπου $w = u + iv = (u, v)$.
[α] Αποδείξτε ότι $f(w)^2 = w$ για κάθε $w \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ καθώς και ότι η f ταυτίζεται με τον συνεχή κλάδο της τετραγωνικής ρίζας που είδαμε στο παράδειγμα 6.4.4.
[β] Αποδείξτε ότι η f είναι ένα-προς-ένα και επί του $\{z \mid \mathrm{Re}\, z > 0\}$.
[γ] Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, χρησιμοποιώντας είτε τον τύπο της f είτε ακολουθίες και την ταυτότητα στο [α].
[δ] Αποδείξτε ότι η f είναι αναλυτική στο $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ (με σύντομο τρόπο).

6.4.5. Πόσοι και ποιοί (με τύπους) είναι οι αναλυτικοί κλάδοι της τετραγωνικής ρίζας στο $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$; Ποιά είναι τα σύνολα τιμών τους;

6.4.6. Πόσοι και ποιοί (με τύπους) είναι οι αναλυτικοί κλάδοι της κυβικής ρίζας στο $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$; Ποιά είναι τα σύνολα τιμών τους;

6.4.7. Έστω συνεχής κλάδος $f : A \to \mathbb{C}$ του λογαρίθμου στο σύνολο $A \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ και $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Αποδείξτε ότι η $g : A \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ που ορίζεται με τύπο $g = e^{\frac{1}{n}f}$ είναι συνεχής κλάδος της n-οστής ρίζας στο A.

6.4.8. [α] Θεωρώντας έναν συνεχή κλάδο της $(z+1)^{\frac{1}{2}}$ στο $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$ και έναν συνεχή κλάδο της $(z-1)^{\frac{1}{2}}$ στο $\mathbb{C} \setminus [1, +\infty)$, αποδείξτε ότι ορίζεται συνεχής κλάδος της $(z^2-1)^{\frac{1}{2}}$ στο σύνολο $\Omega = \mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, +\infty))$, δηλαδή $f : \Omega \to \mathbb{C}$ συνεχής στο Ω ώστε να ισχύει $f(z)^2 = z^2 - 1$ για κάθε $z \in \Omega$.

[β] Θεωρώντας έναν συνεχή κλάδο της $(z+1)^{\frac{1}{2}}$ στο $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$ και έναν συνεχή κλάδο της $(z-1)^{\frac{1}{2}}$ στο $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 1]$, αποδείξτε ότι ορίζεται συνεχής κλάδος της $(z^2-1)^{\frac{1}{2}}$ στο σύνολο $\Omega' = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$, δηλαδή $f : \Omega' \to \mathbb{C}$ συνεχής στο Ω' ώστε να ισχύει $f(z)^2 = z^2 - 1$ για κάθε $z \in \Omega'$. *Προσέξτε*: αυτό είναι πιο δύσκολο από το [α].

[γ] Τι σχέση υπάρχει ανάμεσα σε δυο συνεχείς κλάδους της $(z^2-1)^{\frac{1}{2}}$ στο ίδιο σύνολο, είτε το Ω είτε το Ω';

[δ] Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει συνεχής κλάδος της $(z^2-1)^{\frac{1}{2}}$ σε οποιοδήποτε σύνολο περιέχει κύκλο με το -1 στο εσωτερικό του και το 1 στο εξωτερικό του ή αντιστρόφως.

[ε] Αποδείξτε ότι οι συνεχείς κλάδοι της $(z^2-1)^{\frac{1}{2}}$ στο Ω και στο Ω' είναι αναλυτικοί.

6.4.9. [α] Αποδείξτε ότι ισχύει $w^a = \exp(a \log w)$ για κάθε $w \neq 0$ και κάθε $a \in \mathbb{Z}$ και κάθε $a \in \{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$.

[β] Επεκτείνοντας το αποτέλεσμα του [α], ορίζουμε $w^a = \exp(a \log w)$ για κάθε $w \neq 0$ και κάθε a. Η συνάρτηση $f(w) = w^a$ είναι εν γένει πλειότιμη στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

[γ] Αν στο σύνολο $A \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ορίζεται συνεχής κλάδος του λογαρίθμου $f : A \to \mathbb{C}$, τότε λέμε ότι η συνάρτηση $g = \exp(af) : A \to \mathbb{C}$ με τύπο $g(w) = \exp(af(w))$ είναι συνεχής κλάδος της συνάρτησης-δύναμη w^a στο A. Αποδείξτε ότι τότε για κάθε εσωτερικό σημείο w_0 του A η g είναι παραγωγίσιμη στο w_0 και ότι $g'(w_0) = \frac{ag(w_0)}{w_0}$. Δηλαδή, αν στο ανοικτό σύνολο $A \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ορίζεται αναλυτικός κλάδος του λογαρίθμου, τότε ορίζεται στο A και αναλυτικός κλάδος της συνάρτησης-δύναμη w^a και (με "χαλαρό" συμβολισμό) ισχύει $\frac{dw^a}{dw} = \frac{aw^a}{w}$ στο A.

Κεφάλαιο 7

Το Τοπικό Θεώρημα του Cauchy.

7.1 Το Θεώρημα του Cauchy για τρίγωνα.

Θυμόμαστε ότι οι καμπύλες $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ είναι από τον ορισμό τους συνεχείς συναρτήσεις και ότι έχουμε κάνει την επιπλέον παραδοχή ότι οι καμπύλες που θα εξετάζουμε θα είναι τμηματικά ομαλές.

ΛΗΜΜΑ 7.1. *Έστω καμπύλη $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ και $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ συνεχής στο γ^*. Επίσης, έστω ότι η γ είναι σε ένα ανοικτό σύνολο Ω και έστω συνάρτηση $F : \Omega \to \mathbb{C}$ ώστε να ισχύει $F'(z) = f(z)$ για κάθε $z \in \gamma^*$. Τότε*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Ειδικώτερα, αν η γ είναι κλειστή καμπύλη, δηλαδή αν $\gamma(b) = \gamma(a)$, τότε

$$\oint_\gamma f(z)\, dz = 0.$$

Απόδειξη. Είναι

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\, dz = \int_\gamma F'(z)\, dz = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt = \int_a^b (F \circ \gamma)'(t)\, dt \\ = (F \circ \gamma)(b) - (F \circ \gamma)(a) = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).\end{aligned}$$

□

Σχόλιο. Μπορεί κάποιος να αναρωτηθεί γιατί στο Λήμμα 7.1 υποθέτουμε ότι η F ορίζεται σε ένα ανοικτό σύνολο Ω το οποίο περιέχει την τροχιά γ^* και δεν περιοριζόμαστε σε F ορισμένη μόνο στην τροχιά γ^*. Η απάντηση είναι η εξής. Επειδή θέλουμε να ισχύει $F'(z) = f(z)$ για κάθε $z \in \gamma^*$ και επειδή στον ορισμό της παραγωγισιμότητας της F στο z απαιτείται να είναι ορισμένη η F σε μια περιοχή του z, συνεπάγεται ότι για κάθε $z \in \gamma^*$ υπάρχει αντίστοιχος δίσκος $D(z; r_z)$ στον οποίο είναι ορισμένη η F. Άρα η F πρέπει να είναι ορισμένη στο σύνολο $\bigcup_{z\in\gamma^*} D(z; r_z)$. Το σύνολο αυτό περιέχει κάθε $z \in \gamma^*$ και άρα περιέχει την τροχιά γ^* και είναι ανοικτό ως ένωση ανοικτών δίσκων. Άρα είναι αναγκαίο να είναι η F ορισμένη σε κάποιο ανοικτό σύνολο το οποίο περιέχει το γ^*.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Αν το Ω είναι ανοικτό σύνολο και για τις $f, F : \Omega \to \mathbb{C}$ ισχύει $F'(z) = f(z)$ για κάθε $z \in \Omega$, τότε η F χαρακτηρίζεται* **παράγουσα** *της f στο Ω.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 7.1. *Έστω ανοικτό σύνολο Ω.*

[α] *Αν για την $F : \Omega \to \mathbb{C}$ ισχύει $F'(z) = 0$ για κάθε $z \in \Omega$, τότε η F είναι σταθερή σε κάθε συνεκτική συνιστώσα του Ω.*

[β] *Έστω* $f, F_1, F_2 : \Omega \to \mathbb{C}$ *και έστω ότι η* F_1 *είναι παράγουσα της* f *στο* Ω. *Τότε η* F_2 *είναι κι αυτή παράγουσα της* f *στο* Ω *αν και μόνο αν η* $F_2 - F_1$ *είναι σταθερή σε κάθε συνεκτική συνιστώσα του* Ω.
Ειδικώτερα, αν δυο παράγουσες της f *στο* Ω *έχουν ίσες τιμές σε κάποιο* $z_0 \in \Omega$, *τότε οι δυο αυτές παράγουσες ταυτίζονται στη συνεκτική συνιστώσα του* Ω *η οποία περιέχει το* z_0.

Απόδειξη. [α] Έστω U οποιαδήποτε συνεκτική συνιστώσα του Ω. Το U είναι ανοικτό και συνεκτικό σύνολο, οπότε για κάθε $z_1, z_2 \in U$ υπάρχει καμπύλη (και μάλιστα, πολυγωνική) γ στο U με αρχικό άκρο z_1 και τελικό άκρο z_2. Τότε

$$F(z_2) - F(z_1) = \int_\gamma F'(z)\,dz = \int_\gamma 0\,dz = 0.$$

Άρα κάθε δυο τιμές της F στο U είναι ίσες, οπότε η F είναι σταθερή στο U.
[β] Έστω U οποιαδήποτε συνεκτική συνιστώσα του Ω. Αν ισχύει $F_2(z) - F_1(z) = c$ για κάθε $z \in U$, τότε, προφανώς,

$$F_2{}'(z) = F_1{}'(z) + c' = f(z) + 0 = f(z)$$

για κάθε $z \in U$. Άρα η F_2 είναι παράγουσα της f στο U και, επειδή το Ω είναι η ένωση των συνεκτικών συνιστωσών του, η F_2 είναι παράγουσα της f στο Ω.
Αντιστρόφως, αν η F_2 είναι παράγουσα της f στο Ω, τότε για την $F = F_2 - F_1$ ισχύει

$$F'(z) = F_1{}'(z) - F_2{}'(z) = f(z) - f(z) = 0$$

για κάθε $z \in \Omega$, οπότε, βάσει του [α], η F είναι σταθερή σε κάθε συνεκτική συνιστώσα του Ω. □

Πρέπει να τονιστεί ότι οι σταθερές για τις οποίες μιλάει η Πρόταση 7.1 εξαρτώνται από τις διάφορες συνεκτικές συνιστώσες του Ω: σε κάθε συνεκτική συνιστώσα αντιστοιχεί μια σταθερά και σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες μπορεί να αντιστοιχούν διαφορετικές σταθερές.

Παράδειγμα 7.1.1. Θεωρούμε το ανοικτό σύνολο $\Omega = D(0;1) \cup D(3;1)$, το οποίο δεν είναι συνεκτικό και οι συνεκτικές συνιστώσες του είναι οι δυο δίσκοι $D(0;1)$ και $D(3;1)$. Θεωρούμε και τη συνάρτηση

$$F(z) = \begin{cases} c_1, & \text{αν } z \in D(0;1) \\ c_2, & \text{αν } z \in D(3;1) \end{cases}$$

όπου c_1, c_2 είναι δυο οποιεσδήποτε σταθερές.
Προφανώς, ισχύει $F'(z) = 0$ για κάθε $z \in \Omega$, αλλά η F δεν είναι σταθερή στο Ω αν $c_1 \neq c_2$.

Το αντίστροφο της Πρότασης 7.2 θα το δούμε αργότερα στην Πρόταση 7.6.

ΠΡΟΤΑΣΗ 7.2. *Έστω* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *συνεχής στο ανοικτό σύνολο* Ω *και έστω ότι υπάρχει παράγουσα της* f *στο* Ω. *Τότε για κάθε καμπύλη* γ *στο* Ω *το* $\int_\gamma f(z)\,dz$ *δεν εξαρτάται από την καμπύλη αλλά μόνο από τα άκρα της. Ειδικώτερα, για κάθε κλειστή καμπύλη* γ *στο* Ω *είναι*

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Απόδειξη. Υπάρχει $F : \Omega \to \mathbb{C}$ ώστε να ισχύει $F'(z) = f(z)$ για κάθε $z \in \Omega$.
Για κάθε καμπύλη $\gamma : [a,b] \to \Omega$ ισχύει $F'(z) = f(z)$ για κάθε $z \in \gamma^*$, οπότε, σύμφωνα με το Λήμμα 7.1, ισχύει $\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$. Από αυτό συνεπάγονται και τα δυο συμπεράσματα. □

Παράδειγμα 7.1.2. Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση p έχει παράγουσα στο $\mathbb{C}$.
Πράγματι, αν $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, τότε η πολυωνυμική συνάρτηση F με τύπο $F(z) = a_0 z + \frac{a_1}{2} z^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ είναι παράγουσα της p στο $\mathbb{C}$.
Άρα για κάθε κλειστή καμπύλη γ ισχύει

$$\oint_\gamma p(z)\, dz = \int_\gamma (a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n)\, dz = 0.$$

Παράδειγμα 7.1.3. Η εκθετική συνάρτηση e^z έχει παράγουσα τον εαυτό της στο $\mathbb{C}$.
Άρα για κάθε κλειστή καμπύλη γ ισχύει

$$\oint_\gamma e^z\, dz = 0.$$

Παράδειγμα 7.1.4. Έστω z_0 και $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 2$. Τότε η συνάρτηση $\frac{1}{(z-z_0)^n}$ έχει παράγουσα στο $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ την συνάρτηση $-\frac{1}{(n-1)(z-z_0)^{n-1}}$.
Άρα για κάθε κλειστή καμπύλη γ στο $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ (δηλαδή έτσι ώστε το z_0 να μην ανήκει στο γ^*) ισχύει

$$\oint_\gamma \frac{1}{(z-z_0)^n}\, dz = 0 \qquad \text{με } n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Παράδειγμα 7.1.5. Η συνάρτηση $\frac{1}{z-z_0}$ δεν έχει παράγουσα στο $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ και, ακόμη περισσότερο, ούτε σε κανένα δακτύλιο $D(z_0; r_1, r_2)$.
Πράγματι, αν είχε η $\frac{1}{z-z_0}$ παράγουσα στον δακτύλιο $D(z_0; r_1, r_2)$, θα ίσχυε $\int_\gamma \frac{1}{z-z_0}\, dz = 0$ για κάθε κλειστή καμπύλη γ στον $D(z_0; r_1, r_2)$. Όμως, αν θεωρήσουμε ακτίνα r με $r_1 < r < r_2$ και την $\gamma : [0, 2\pi] \to D(z_0; r_1, r_2)$ με παραμετρική εξίσωση $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, τότε η γ είναι κλειστή καμπύλη στον $D(z_0; r_1, r_2)$ και, σύμφωνα με τα σύμβολα στο παράδειγμα 4.4.2, έχουμε

$$\oint_\gamma \frac{1}{z-z_0}\, dz = \oint_{C(z_0;r)} \frac{1}{z-z_0}\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} rie^{it}\, dt = 2\pi i \neq 0.$$

Με βάση αυτό το *πολύ σημαντικό παράδειγμα* μπορούμε να αποδείξουμε με δεύτερο τρόπο κάτι που είχαμε ξαναδεί στο παράδειγμα 6.3.7 ως πόρισμα της Πρότασης 6.11:
Δεν ορίζεται συνεχής κλάδος του λογαρίθμου σε οποιονδήποτε δακτύλιο $D(0; r_1, r_2)$ και, επομένως, ούτε και στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
Πράγματι, αν υπήρχε συνεχής κλάδος f του λογαρίθμου στον δακτύλιο $D(0; r_1, r_2)$, τότε, σύμφωνα με την Πρόταση 6.9, η f θα ήταν αναλυτική με παράγωγο $f'(z) = \frac{1}{z}$ στο $D(0; r_1, r_2)$. Δηλαδή, η $\frac{1}{z}$ θα είχε παράγουσα στο $D(0; r_1, r_2)$ και αυτό, όπως είδαμε, είναι αδύνατο.

Το Θεώρημα του Cauchy για τρίγωνα και η γενίκευσή του, την οποία θα δούμε αρκετά αργότερα, είναι το σημαντικότερο θεώρημα της Μιγαδικής Ανάλυσης.

ΘΕΩΡΗΜΑ 7.1. **[Το Θεώρημα του Cauchy για τρίγωνα]** *Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο ανοικτό σύνολο Ω και τρίγωνο $\Delta \subseteq \Omega$. Τότε*

$$\oint_{\mathrm{bd}\,\Delta} f(z)\, dz = 0.$$

Απόδειξη. Ορίζουμε (για συντομία)

$$I = \oint_{\mathrm{bd}\,\Delta} f(z)\, dz,$$

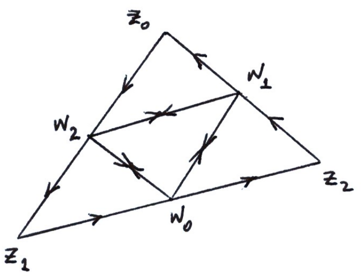
οπότε πρέπει να αποδείξουμε ότι $I = 0$.
Θεωρούμε ότι

$$\Delta = \Delta(z_0, z_1, z_2),$$

δηλαδή ότι τα z_0, z_1, z_2 είναι οι κορυφές του Δ, και έστω w_2, w_0, w_1 τα μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων $[z_0, z_1]$, $[z_1, z_2]$, $[z_2, z_0]$, αντιστοίχως. Δείτε το σχήμα 28. Τότε το τρίγωνο $\Delta(z_0, z_1, z_2)$ χωρίζεται στα τέσσερα τρίγωνα

$$\Delta^{(0)} = \Delta(z_0, w_2, w_1),\ \Delta^{(1)} = \Delta(w_2, z_1, w_0),\ \Delta^{(2)} = \Delta(w_0, z_2, w_1),\ \Delta^{(3)} = \Delta(w_2, w_0, w_1).$$

Σχ 28.



Ορίζουμε τα αντίστοιχα επικαμπύλια ολοκληρώματα

$$I^{(0)} = \oint_{\mathrm{bd}\,\Delta^{(0)}} f(z)\,dz,\ I^{(1)} = \oint_{\mathrm{bd}\,\Delta^{(1)}} f(z)\,dz,\ I^{(2)} = \oint_{\mathrm{bd}\,\Delta^{(2)}} f(z)\,dz,\ I^{(3)} = \oint_{\mathrm{bd}\,\Delta^{(3)}} f(z)\,dz.$$

Βάσει των συμβολισμών και των αποτελεσμάτων στα παραδείγματα 4.4.4, 4.4.5 και 4.4.7, έχουμε

$$\begin{aligned}
I^{(0)} + I^{(1)} + I^{(2)} + I^{(3)} &= \int_{[z_0,w_2]} f(z)\,dz + \int_{[w_2,w_1]} f(z)\,dz + \int_{[w_1,z_0]} f(z)\,dz \\
&\quad + \int_{[w_2,z_1]} f(z)\,dz + \int_{[z_1,w_0]} f(z)\,dz + \int_{[w_0,w_2]} f(z)\,dz \\
&\quad + \int_{[w_0,z_2]} f(z)\,dz + \int_{[z_2,w_1]} f(z)\,dz + \int_{[w_1,w_0]} f(z)\,dz \\
&\quad + \int_{[w_2,w_0]} f(z)\,dz + \int_{[w_0,w_1]} f(z)\,dz + \int_{[w_1,w_2]} f(z)\,dz \\
&= \int_{[z_0,w_2]} f(z)\,dz + \int_{[w_2,z_1]} f(z)\,dz + \int_{[z_1,w_0]} f(z)\,dz \\
&\quad + \int_{[w_0,z_2]} f(z)\,dz + \int_{[z_2,w_1]} f(z)\,dz + \int_{[w_1,z_0]} f(z)\,dz \\
&= \int_{[z_0,z_1]} f(z)\,dz + \int_{[z_1,z_2]} f(z)\,dz + \int_{[z_2,z_0]} f(z)\,dz \\
&= I.
\end{aligned}$$

Άρα

$$|I| \le |I^{(0)}| + |I^{(1)}| + |I^{(2)}| + |I^{(3)}|$$

και, επομένως, για ένα τουλάχιστον από τα $j = 0, 1, 2, 3$ ισχύει

$$|I^{(j)}| \ge \tfrac{1}{4}|I|.$$

Τώρα, θεωρούμε το αντίστοιχο τρίγωνο $\Delta^{(j)}$ και το ξανασυμβολίζουμε Δ_1 και το $I^{(j)}$ το ξανασυμβολίζουμε I_1.
Έχουμε, λοιπόν, αποδείξει ότι μέσα στο αρχικό τρίγωνο Δ υπάρχει κάποιο τρίγωνο Δ_1 ώστε, αν $I = \oint_{\mathrm{bd}\,\Delta} f(z)\,dz$ και $I_1 = \oint_{\mathrm{bd}\,\Delta_1} f(z)\,dz$, να ισχύει $|I_1| \ge \frac{1}{4}|I|$. Παρατηρούμε, επίσης, ότι $\operatorname{diam}\Delta_1 = \frac{1}{2}\operatorname{diam}\Delta$.
Αυτήν την διαδικασία μπορούμε να την επαναλάβουμε επ' άπειρον ώστε να δημιουργήσουμε μια

ακολουθία εγκιβωτισμένων τριγώνων $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \ldots$ και την αντίστοιχη ακολουθία επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$ ώστε να ισχύουν τα εξής:
(i) $\Delta \supseteq \Delta_1 \supseteq \cdots \supseteq \Delta_n \supseteq \Delta_{n+1} \supseteq \cdots$,
(ii) $|I_n| \geq \frac{1}{4^n}|I|$,
(iii) $\operatorname{diam} \Delta_n = \frac{1}{2^n} \operatorname{diam} \Delta$.
Από την (i) και από την Πρόταση 2.12 συνεπάγεται ότι υπάρχει κάποιο σημείο z το οποίο ανήκει σε κάθε τρίγωνο Δ_n. Ειδικώτερα, το z ανήκει στο Δ και, επομένως, στο Ω, οπότε η f είναι παραγωγίσιμη στο z.
Τώρα θεωρούμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$.
Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο z, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει

$$\Big|\frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} - f'(z)\Big| < \epsilon \qquad \text{όταν } 0 < |\zeta - z| < \delta.$$

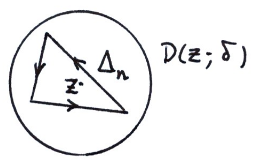
Πολλαπλασιάζουμε την τελευταία σχέση με το $|\zeta - z|$ και, αφού παρατηρήσουμε ότι η σχέση που θα προκύψει ισχύει και για $\zeta = z$, έχουμε

$$|f(\zeta) - f(z) - f'(z)(\zeta - z)| \leq \epsilon|\zeta - z| \qquad \text{όταν } |\zeta - z| < \delta. \tag{7.1}$$

Κατόπιν, βάσει της (iii), θεωρούμε αρκετά μεγάλο n ώστε

$$\operatorname{diam} \Delta_n < \delta.$$

Σχ 29.



Δείτε το σχήμα 29. Επειδή $z \in \Delta_n$ και $\operatorname{diam} \Delta_n < \delta$, συνεπάγεται ότι για κάθε $\zeta \in \operatorname{bd} \Delta_n \subseteq \Delta_n$ ισχύει

$$|\zeta - z| \leq \operatorname{diam} \Delta_n < \delta,$$

οπότε από την (7.1) και από την (iii) έχουμε

$$|f(\zeta) - f(z) - f'(z)(\zeta - z)| \leq \epsilon|\zeta - z| \leq \epsilon \operatorname{diam} \Delta_n = \frac{\epsilon}{2^n} \operatorname{diam} \Delta$$

για κάθε $\zeta \in \operatorname{bd} \Delta_n$. Άρα

$$\begin{aligned} \Big|\oint_{\operatorname{bd} \Delta_n} (f(\zeta) - f(z) - f'(z)(\zeta - z))\, d\zeta\Big| &\leq \frac{\epsilon}{2^n} \operatorname{diam} \Delta \ \text{μήκος} \operatorname{bd} \Delta_n \\ &\leq \frac{3\epsilon}{2^n} \operatorname{diam} \Delta \ \operatorname{diam} \Delta_n \qquad (7.2) \\ &= \frac{3\epsilon}{4^n} (\operatorname{diam} \Delta)^2. \end{aligned}$$

Τώρα παρατηρούμε ότι, σύμφωνα με το παράδειγμα 7.1.2, είναι

$$\oint_{\operatorname{bd} \Delta_n} (f(z) + f'(z)(\zeta - z))\, d\zeta = 0$$

διότι η συνάρτηση $f(z) + f'(z)(\zeta - z)$ είναι πολυωνυμική συνάρτηση του ζ.
Άρα η (7.2) γίνεται

$$|I_n| = \Big|\oint_{\operatorname{bd} \Delta_n} f(\zeta)\, d\zeta\Big| \leq \frac{3\epsilon}{4^n} (\operatorname{diam} \Delta)^2.$$

Τέλος, από την (ii) συνεπάγεται

$$|I| \leq 3\epsilon (\operatorname{diam} \Delta)^2.$$

Επειδή το ϵ είναι τυχών θετικός αριθμός, συνεπάγεται $I = 0$. □

Τώρα θα δούμε μια μικρή επέκταση του Θεωρήματος του Cauchy για τρίγωνα με λίγο ασθενέστερες υποθέσεις για τη συνάρτηση.

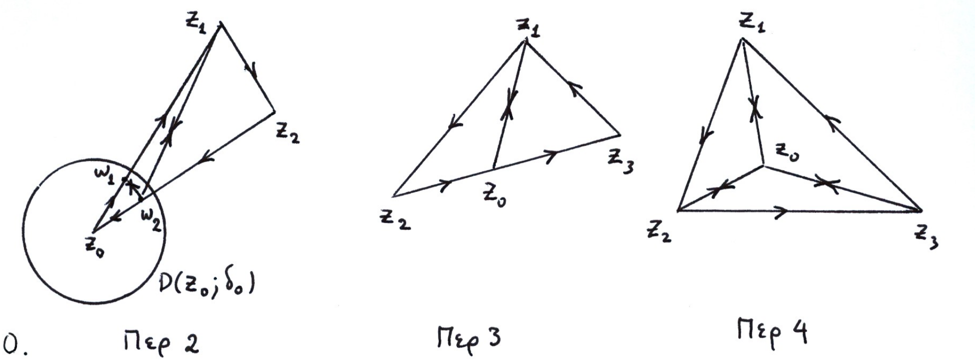
ΠΡΟΤΑΣΗ 7.3. *Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο ανοικτό σύνολο Ω εκτός από πεπερασμένου πλήθους σημεία του Ω στα οποία η f είναι απλώς συνεχής και έστω τρίγωνο $\Delta \subseteq \Omega$. Τότε*

$$\oint_{\mathrm{bd}\,\Delta} f(z)\,dz = 0.$$

Απόδειξη. Έστω ότι στο Ω υπάρχει *ένα μόνο* σημείο z_0 στο οποίο η f είναι απλώς συνεχής, οπότε η f είναι αναλυτική στο $\Omega \setminus \{z_0\}$.

Περίπτωση 1. Αν το z_0 δεν ανήκει στο τρίγωνο Δ, τότε $\Delta \subseteq \Omega\setminus\{z_0\}$ και το $\Omega\setminus\{z_0\}$ είναι ανοικτό, οπότε από το προηγούμενο Θεώρημα του Cauchy έχουμε ότι $\oint_{\mathrm{bd}\,\Delta} f(z)\,dz = 0$.

Περίπτωση 2. Υποθέτουμε ότι το z_0 είναι μια από τις κορυφές του Δ, δηλαδή $\Delta = \Delta(z_0, z_1, z_2)$. Δείτε το σχήμα 30.



Σχ 30.

Έστω $\epsilon > 0$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο z_0, είναι φραγμένη κοντά στο z_0 και, επομένως, υπάρχει $\delta_0 > 0$ και $M_0 \geq 0$ ώστε

$$|f(z)| \leq M_0 \qquad \text{για } z \in D(z_0; \delta_0). \tag{7.3}$$

Τώρα, θεωρούμε δυο σημεία w_1, w_2 στα ευθ. τμήματα $[z_0, z_1]$, $[z_0, z_2]$, αντιστοίχως, τόσο κοντά στο z_0 ώστε να ανήκουν και τα δυο στον $D(z_0; \delta_0)$ και ώστε το τρίγωνο

$$\Delta_0 = \Delta(z_0, w_1, w_2)$$

να έχει περίμετρο

$$\text{μήκος}\,\mathrm{bd}\,\Delta_0 < \frac{\epsilon}{M_0}. \tag{7.4}$$

Τώρα, εκτός από το $\Delta_0 = \Delta(z_0, w_1, w_2)$ θεωρούμε και τα τρίγωνα

$$\Delta_1 = \Delta(w_1, z_1, w_2), \quad \Delta_2 = \Delta(z_1, z_2, w_2)$$

καθώς και τα αντίστοιχα επικαμπύλια ολοκληρώματα

$$\oint_{\mathrm{bd}\,\Delta_0} f(z)\,dz, \quad \oint_{\mathrm{bd}\,\Delta_1} f(z)\,dz, \quad \oint_{\mathrm{bd}\,\Delta_2} f(z)\,dz.$$

Είναι φανερό ότι το Δ χωρίζεται στα τρία τρίγωνα $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2$ και, όπως στην απόδειξη του προηγούμενου Θεωρήματος του Cauchy,

$$\oint_{\mathrm{bd}\,\Delta} f(z)\,dz = \oint_{\mathrm{bd}\,\Delta_0} f(z)\,dz + \oint_{\mathrm{bd}\,\Delta_1} f(z)\,dz + \oint_{\mathrm{bd}\,\Delta_2} f(z)\,dz. \tag{7.5}$$

Επειδή τα Δ_1 και Δ_2 δεν περιέχουν το z_0, από την Περίπτωση 1 συνεπάγεται

$$\oint_{\mathrm{bd}\,\Delta_1} f(z)\,dz = 0, \qquad \oint_{\mathrm{bd}\,\Delta_2} f(z)\,dz = 0. \tag{7.6}$$

Επίσης, επειδή το Δ_0 περιέχεται στον $D(z_0;\delta_0)$, από την (7.3) συνεπάγεται ότι ισχύει $|f(z)| \le M_0$ για κάθε $z \in \mathrm{bd}\,\Delta_0$, οπότε βάσει και της (7.4) έχουμε

$$\Big|\oint_{\mathrm{bd}\,\Delta_0} f(z)\,dz\Big| \le M_0 \text{ μήκος}\,\mathrm{bd}\,\Delta_0 < M_0\,\frac{\epsilon}{M_0} = \epsilon. \tag{7.7}$$

Από τις (7.5), (7.6) και (7.7) συνεπάγεται

$$\Big|\oint_{\mathrm{bd}\,\Delta} f(z)\,dz\Big| < \epsilon$$

και, επειδή αυτό ισχύει για κάθε $\epsilon > 0$, συνεπάγεται ότι $\oint_{\mathrm{bd}\,\Delta} f(z)\,dz = 0$.

Περίπτωση 3. Κατόπιν, υποθέτουμε ότι το z_0 ανήκει σε κάποια πλευρά του Δ. Έστω, λοιπόν, $\Delta = \Delta(z_1, z_2, z_3)$ και έστω ότι το z_0 ανήκει στο ευθ. τμήμα $[z_2, z_3]$. Τώρα χωρίζουμε το Δ στα τρίγωνα $\Delta_3 = \Delta(z_1, z_2, z_0)$ και $\Delta_2 = \Delta(z_1, z_0, z_3)$. Τότε το z_0 είναι κορυφή καθενός από τα Δ_2, Δ_3, οπότε από την Περίπτωση 2 έχουμε

$$\oint_{\mathrm{bd}\,\Delta} f(z)\,dz = \oint_{\mathrm{bd}\,\Delta_2} f(z)\,dz + \oint_{\mathrm{bd}\,\Delta_3} f(z)\,dz = 0 + 0 = 0.$$

Περίπτωση 4. Τέλος, έστω ότι το z_0 είναι εσωτερικό σημείο του $\Delta = \Delta(z_1, z_2, z_3)$. Τώρα χωρίζουμε το Δ στα τρίγωνα $\Delta_1 = \Delta(z_2, z_3, z_0), \Delta_2 = \Delta(z_3, z_1, z_0), \Delta_3 = \Delta(z_1, z_2, z_0)$. Τότε το z_0 είναι κορυφή καθενός από τα $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, οπότε από την Περίπτωση 2 έχουμε

$$\oint_{\mathrm{bd}\,\Delta} f(z)\,dz = \oint_{\mathrm{bd}\,\Delta_1} f(z)\,dz + \oint_{\mathrm{bd}\,\Delta_2} f(z)\,dz + \oint_{\mathrm{bd}\,\Delta_3} f(z)\,dz = 0 + 0 + 0 = 0.$$

Άρα έχουμε τελειώσει στην περίπτωση που στο Ω υπάρχει ένα μόνο σημείο z_0 στο οποίο η f είναι απλώς συνεχής. Η γενική περίπτωση αποδεικνύεται επαγωγικά ως προς τον αριθμό των σημείων στα οποία η f είναι απλώς συνεχής. □

Σχόλιο. Παρατηρήστε ότι στην απόδειξη της περίπτωσης 2 χρησιμοποιήσαμε μόνο το ότι η f είναι φραγμένη κοντά στο σημείο z_0. Η συνέχεια της f χρησιμοποιήθηκε μόνο για να μπορούν να ορισθούν τα επικαμπύλια ολοκληρώματα πάνω στα διάφορα ευθ. τμήματα με άκρο το z_0. Θα δούμε λίγο αργότερα, αλλά με διαφορετική τεχνική, ότι, αν η $f : \Omega \to \mathbb{C}$ είναι αναλυτική στο ανοικτό σύνολο Ω εκτός από πεπερασμένου πλήθους σημεία του Ω στα οποία η f δεν ορίζεται αλλά κοντά στα οποία είναι φραγμένη, τότε η f επεκτείνεται και σ' αυτά τα σημεία ώστε να είναι συνεχής (και μάλιστα παραγωγίσιμη) και σ' αυτά και άρα ισχύει $\oint_{\mathrm{bd}\,\Delta} f(z)\,dz = 0$ για κάθε τρίγωνο $\Delta \subseteq \Omega$.

7.2 Παράγουσες και το Γενικό Θεώρημα του Cauchy σε αστρόμορφα σύνολα.

Οι Προτάσεις 7.4 και 7.5 αναφέρουν δυο βασικά αποτελέσματα της Μιγαδικής Ανάλυσης αλλά στην περίπτωση ανοικτού και *αστρόμορφου* συνόλου. Σε πολλά βιβλία τα ίδια αποτελέσματα αναφέρονται για ανοικτά και *κυρτά* σύνολα: τα κυρτά σύνολα είναι ειδικές περιπτώσεις αστρόμορφων συνόλων.

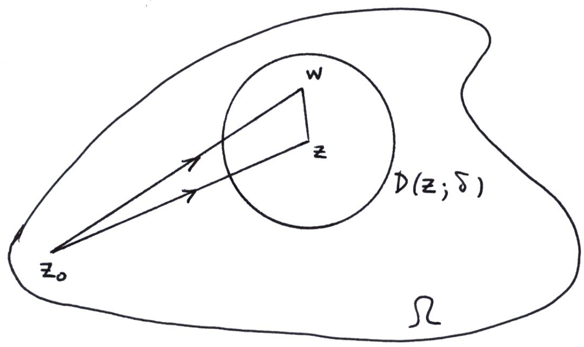
ΠΡΟΤΑΣΗ 7.4. *Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο ανοικτό και αστρόμορφο σύνολο Ω εκτός από πεπερασμένου πλήθους σημεία του Ω στα οποία η f είναι απλώς συνεχής. Τότε υπάρχει παράγουσα της f στο Ω.*

Απόδειξη. Θεωρούμε σταθερό σημείο $z_0 \in \Omega$, το οποίο είναι κέντρο του Ω, και για κάθε $z \in \Omega$ ορίζουμε

$$F(z) = \int_{[z_0,z]} f(\zeta)\, d\zeta. \tag{7.8}$$

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ορίζεται διότι το ευθύγραμμο τμήμα $[z_0, z]$ περιέχεται στο Ω και η f είναι συνεχής. Θα αποδείξουμε ότι $F'(z) = f(z)$ για κάθε $z \in \Omega$.
Θεωρούμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$. Δείτε το σχήμα 31.

Σχ 31.



Επειδή η f είναι συνεχής στο z, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να είναι

$$|f(\zeta) - f(z)| < \epsilon \qquad \text{για } |\zeta - z| < \delta.$$

Έστω $|w - z| < \delta$. Τότε για κάθε $\zeta \in [z, w]$ ισχύει $|\zeta - z| < \delta$ και, επομένως, $|f(\zeta) - f(z)| < \epsilon$. Άρα

$$\Big| \int_{[z,w]} (f(\zeta) - f(z))\, d\zeta \Big| \le \epsilon |w - z| \qquad \text{για } |w - z| < \delta. \tag{7.9}$$

Παρατηρούμε ότι το τρίγωνο $\Delta(z_0, w, z)$ περιέχεται στο Ω (δικαιολογήστε), οπότε, σύμφωνα με το Θεώρημα του Cauchy στην λίγο πιο γενική μορφή της Πρότασης 7.3, είναι

$$\oint_{\mathrm{bd}\,\Delta(z_0,w,z)} f(z)\, dz = 0.$$

Επομένως,

$$\int_{[z_0,w]} f(\zeta)\, d\zeta + \int_{[w,z]} f(\zeta)\, d\zeta + \int_{[z,z_0]} f(\zeta)\, d\zeta = 0$$

και, επομένως, βάσει και του τύπου (7.8) είναι

$$F(w) - F(z) = \int_{[z,w]} f(\zeta)\, d\zeta. \tag{7.10}$$

Χρησιμοποιώντας τις (7.9) και (7.10), έχουμε ότι, αν $|w - z| < \delta$, τότε

$$\begin{aligned} \Big| \frac{F(w) - F(z)}{w - z} - f(z) \Big| &= \Big| \frac{F(w) - F(z) - (w - z) f(z)}{w - z} \Big| = \frac{\big| \int_{[z,w]} f(\zeta)\, d\zeta - \int_{[z,w]} f(z)\, d\zeta \big|}{|w - z|} \\ &= \frac{\big| \int_{[z,w]} (f(\zeta) - f(z))\, d\zeta \big|}{|w - z|} \le \frac{\epsilon |w - z|}{|w - z|} = \epsilon. \end{aligned}$$

Άρα $\lim_{w \to z} \frac{F(w) - F(z)}{w - z} = f(z)$. □

Η Πρόταση 7.4 λέει ειδικότερα ότι
Κάθε αναλυτική συνάρτηση σε ανοικτό και αστρόμορφο σύνολο έχει παράγουσα στο σύνολο αυτό.

ΠΡΟΤΑΣΗ 7.5. **[Το Γενικό Θεώρημα του Cauchy σε αστρόμορφα σύνολα]** *Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο ανοικτό και αστρόμορφο σύνολο Ω εκτός από πεπερασμένου πλήθους σημεία του Ω στα οποία η f είναι απλώς συνεχής. Τότε για κάθε καμπύλη γ στο Ω το $\int_\gamma f(z)\,dz$ δεν εξαρτάται από την καμπύλη αλλά μόνο από τα άκρα της. Ειδικώτερα, για κάθε κλειστή καμπύλη γ στο Ω είναι*

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Απόδειξη. Συνδυασμός των Προτάσεων 7.2 και 7.4. □

Παράδειγμα 7.2.1. Θεωρούμε το ανοικτό σύνολο A το οποίο προκύπτει αν από το $\mathbb{C}$ αφαιρέσουμε μια οποιαδήποτε ημιευθεία με κορυφή το 0. Τότε

$$\oint_\gamma \frac{1}{z}\,dz = 0$$

για κάθε κλειστή καμπύλη γ στο A.
Αυτό μπορούμε να το δούμε με δυο τρόπους.
Γνωρίζουμε ότι στο A ορίζεται συνεχής και, επομένως, αναλυτικός κλάδος του λογαρίθμου και ότι κάθε τέτοιος κλάδος είναι παράγουσα της $\frac{1}{z}$ στο A. Άρα το αποτέλεσμα είναι άμεση εφαρμογή της Πρότασης 7.2.
Πιο απλά, το A είναι αστρόμορφο σύνολο και η $\frac{1}{z}$ είναι αναλυτική σ' αυτό. Άρα το αποτέλεσμα είναι άμεση εφαρμογή της Πρότασης 7.5.
Φυσικά, με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι

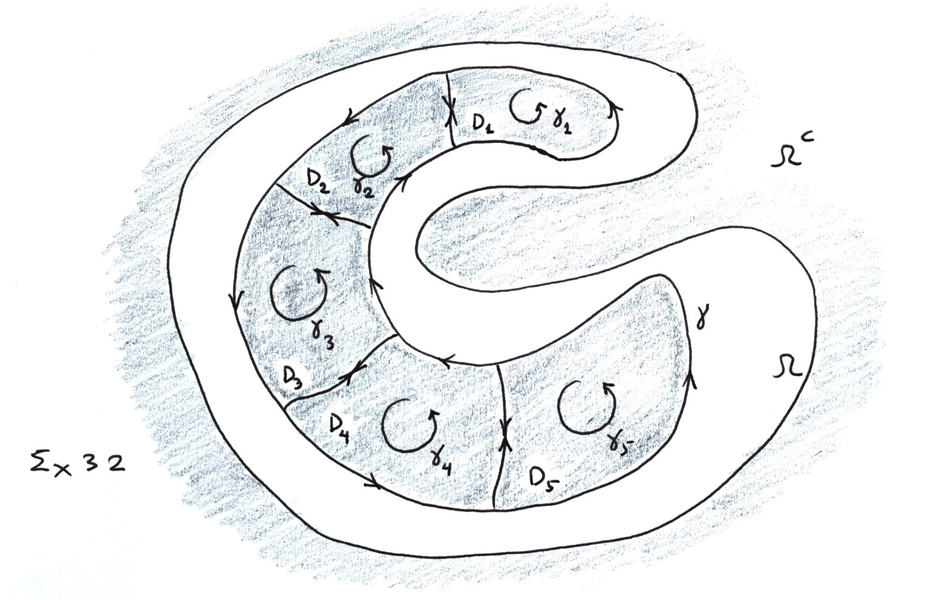
$$\oint_\gamma \frac{1}{z-z_0}\,dz = 0$$

για κάθε κλειστή καμπύλη γ στο ανοικτό σύνολο A, το οποίο προκύπτει αν από το $\mathbb{C}$ αφαιρέσουμε μια οποιαδήποτε ημιευθεία με κορυφή το z_0. (Πάλι το σύνολο A είναι αστρόμορφο.)
Ας δούμε *πολύ προσεκτικά* τη διαφορά με την κατάσταση στο παράδειγμα 7.1.5. Στο παράδειγμα 7.1.5 η καμπύλη γ είναι κύκλος με κέντρο z_0 και, επομένως, η γ "περικυκλώνει" το σημείο z_0. Αν, όμως, αφαιρέσουμε μια ημιευθεία με κορυφή z_0 και θεωρήσουμε, όπως στο παρόν παράδειγμα, καμπύλη γ στο σύνολο A που απομένει, τότε η γ δεν μπορεί να "κόψει" την ημιευθεία και, επομένως, δεν μπορεί να "περικυκλώσει" το z_0.
Το να δώσουμε ακριβές και αυστηρό μαθηματικό νόημα στην έννοια "περικυκλώνει" για μια καμπύλη και ένα σημείο και να δούμε για ποιόν λόγο προκύπτουν μηδενικά ή μη-μηδενικά επικαμπύλια ολοκληρώματα ανάλογα με την περίπτωση είναι ένας από τους κεντρικούς στόχους του μαθήματος.

Θα περιγράψουμε τώρα μια πάρα πολύ χρήσιμη τεχνική για να χειριζόμαστε επικαμπύλια ολοκληρώματα αναλυτικών συναρτήσεων. Η τεχνική αυτή χρησιμοποιείται κυρίως σε δυο χαρακτηριστικές περιπτώσεις.
Πρώτη περίπτωση. Έστω ότι η $f : \Omega \to \mathbb{C}$ είναι αναλυτική στο ανοικτό σύνολο Ω, ότι το Ω *δεν είναι αστρόμορφο* και έστω και μια κλειστή καμπύλη γ στο Ω. Θέλουμε να υπολογίσουμε το $\oint_\gamma f(z)\,dz$.
Αν το Ω ήταν αστρόμορφο, θα συμπεραίναμε ότι $\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$. Υποθέτουμε ότι το σχήμα της γ είναι οπτικά απλό και ότι μπορούμε να διακρίνουμε το "εσωτερικό" της, δηλαδή το ανοικτό σύνολο D των σημείων τα οποία η γ "περικυκλώνει", και υποθέτουμε ότι το D είναι υποσύνολο του Ω, οπότε η f είναι αναλυτική στο D και στην τροχιά γ^* της καμπύλης. Υποθέτουμε, επίσης, ότι $\mathrm{bd}\, D = \gamma^*$. Τώρα, η τεχνική που θα εφαρμόσουμε έχει ως εξής. Δείτε το σχήμα 32. Χωρίζουμε το D σε ανοικτά σύνολα $D_1, \dots, D_n$ ξένα ανά δύο έτσι ώστε τα σύνορα $\mathrm{bd}\, D_1, \dots, \mathrm{bd}\, D_n$ να είναι τροχιές κλειστών καμπυλών $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, έτσι ώστε $\mathrm{cl}\, D = \mathrm{cl}\, D_1 \cup \cdots \cup \mathrm{cl}\, D_n$ και, τέλος, έτσι ώστε: όταν αναλύσουμε με κατάλληλο τρόπο καθεμιά από τις $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ σε μικρότερες καμπύλες και όταν απαλείψουμε από αυτές τις μικρότερες καμπύλες εκείνες που είναι αντίθετες να απομείνουν

κάποιες καμπύλες των οποίων η σύνθεση είναι η αρχική καμπύλη γ. Το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας είναι:

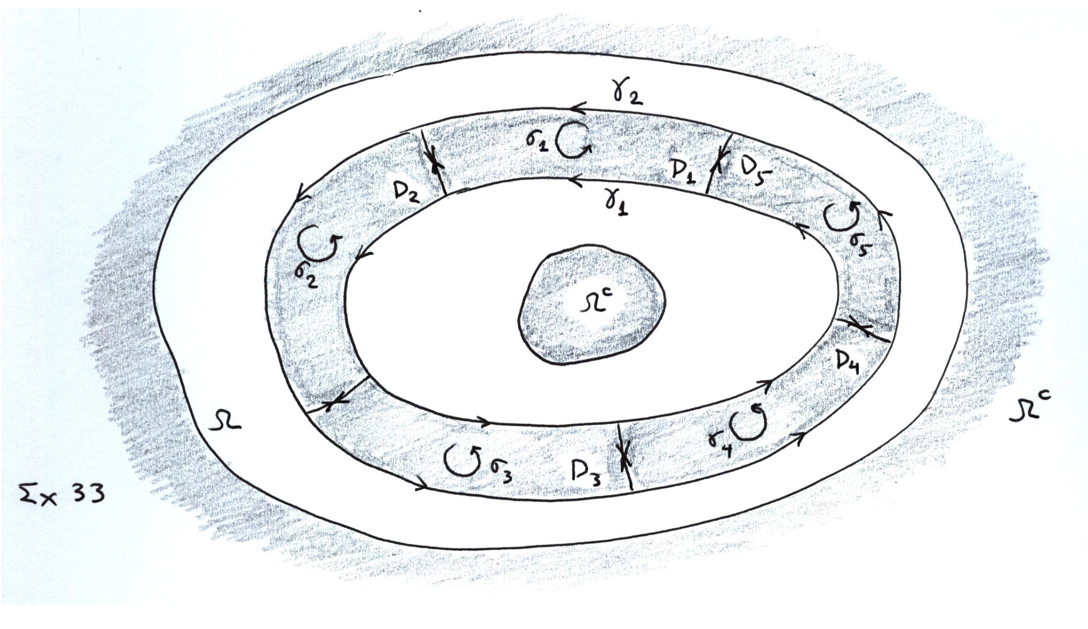
$$\oint_{\gamma} f(z)\,dz = \oint_{\gamma_1} f(z)\,dz + \cdots + \oint_{\gamma_n} f(z)\,dz.$$



Αυτήν την τεχνική την εφαρμόσαμε ήδη στην απόδειξη του Θεωρήματος 7.1 και στην απόδειξη της Πρότασης 7.3 με τον χωρισμό τριγώνου σε μικρότερα τρίγωνα.
Αν, τώρα, καταφέρουμε να επιλέξουμε τα διάφορα $D_1, \ldots, D_n$ έτσι ώστε καθένα από αυτά μαζί με την συνοριακή καμπύλη του, δηλαδή καθένα από τα $\mathrm{cl}\, D_1, \ldots, \mathrm{cl}\, D_n$, να περιέχεται σε ένα αντίστοιχο *αστρόμορφο* ανοικτό υποσύνολο του Ω, τότε θα συμπεράνουμε ότι

$$\oint_{\gamma} f(z)\,dz = \oint_{\gamma_1} f(z)\,dz + \cdots + \oint_{\gamma_n} f(z)\,dz = 0 + \cdots + 0 = 0.$$

Δεύτερη περίπτωση. Έστω ότι η $f : \Omega \to \mathbb{C}$ είναι αναλυτική στο ανοικτό σύνολο Ω και έστω δυο κλειστές καμπύλες γ_1, γ_2 στο Ω. Θέλουμε να συσχετίσουμε τα $\oint_{\gamma_1} f(z)\,dz$, $\oint_{\gamma_2} f(z)\,dz$. Δείτε το σχήμα 33.



Υποθέτουμε ότι τα σχήματα των γ_1, γ_2 είναι οπτικά απλά, ότι διακρίνουμε ότι η γ_2 "περικυκλώνει" την γ_1 και ότι διακρίνουμε το "ενδιάμεσο" σύνολο, δηλαδή το ανοικτό σύνολο D των σημείων τα οποία "περικυκλώνει" η γ_2 και δεν "περικυκλώνει" η γ_1, και υποθέτουμε ότι το D είναι υποσύνολο του Ω, οπότε η f είναι αναλυτική στο D και στις τροχιές $\gamma_1{}^*$, $\gamma_2{}^*$ των καμπυλών. Υποθέτουμε, επίσης, ότι $\mathrm{bd}\, D = \gamma_1{}^* \cup \gamma_2{}^*$. Τώρα, η τεχνική έχει ως εξής. Χωρίζουμε το D σε ανοικτά σύνολα $D_1, \dots, D_n$ ξένα ανά δύο έτσι ώστε τα σύνορα $\mathrm{bd}\, D_1, \dots, \mathrm{bd}\, D_n$ να είναι τροχιές κλειστών καμπυλών $\sigma_1, \dots, \sigma_n$, έτσι ώστε $\mathrm{cl}\, D = \mathrm{cl}\, D_1 \cup \cdots \cup \mathrm{cl}\, D_n$ και, τέλος, έτσι ώστε: όταν αναλύσουμε με κατάλληλο τρόπο καθεμιά από τις $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ σε μικρότερες καμπύλες και όταν απαλείψουμε από αυτές τις μικρότερες καμπύλες εκείνες που είναι αντίθετες να απομείνουν κάποιες καμπύλες των οποίων η σύνθεση είναι η αρχική καμπύλη γ_2 και η αντίθετη αρχική καμπύλη $-\gamma_1$. Το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας είναι:

$$\oint_{\gamma_2} f(z)\, dz - \oint_{\gamma_1} f(z)\, dz = \oint_{\sigma_1} f(z)\, dz + \cdots + \oint_{\sigma_n} f(z)\, dz.$$

Αν καταφέρουμε να επιλέξουμε τα διάφορα $D_1, \dots, D_n$ έτσι ώστε καθένα από αυτά μαζί με την συνοριακή καμπύλη του, δηλαδή καθένα από τα $\mathrm{cl}\, D_1, \dots, \mathrm{cl}\, D_n$, να περιέχεται σε ένα αντίστοιχο *αστρόμορφο* ανοικτό υποσύνολο του Ω, τότε θα συμπεράνουμε ότι

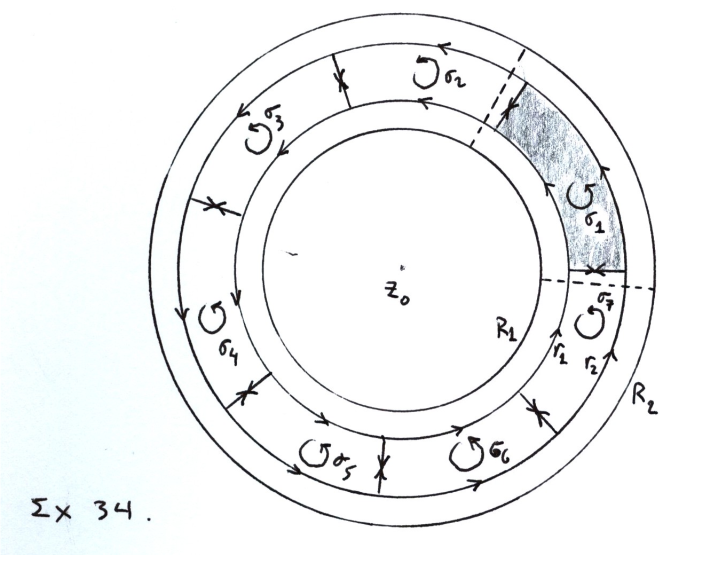
$$\oint_{\gamma_2} f(z)\, dz - \oint_{\gamma_1} f(z)\, dz = \oint_{\sigma_1} f(z)\, dz + \cdots + \oint_{\sigma_n} f(z)\, dz = 0 + \cdots + 0 = 0$$

και, επομένως,

$$\oint_{\gamma_2} f(z)\, dz = \oint_{\gamma_1} f(z)\, dz.$$

Παράδειγμα 7.2.2. Έστω $f : D(z_0; R_1, R_2) \to \mathbb{C}$ αναλυτική στον δακτύλιο $D(z_0; R_1, R_2)$ και έστω $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$. Θα αποδείξουμε ότι

$$\oint_{C(z_0;r_1)} f(z)\, dz = \oint_{C(z_0;r_2)} f(z)\, dz. \tag{7.11}$$



Ανάμεσα στους κύκλους $C(z_0; r_1)$ και $C(z_0; r_2)$ βρίσκεται ο δακτύλιος $D(z_0; r_1, r_2)$. Δείτε το σχήμα 34. Θεωρούμε ημιευθείες με κορυφή το z_0 και χωρίζουμε τον $D(z_0; r_1, r_2)$ σε μικρότερα τμήματά του. Στο σχήμα έχουμε χωρίσει με αυτόν τον τρόπο τον δακτύλιο σε επτά "κυκλικά ορθογώνια". Παρατηρήστε ένα από αυτά τα τμήματα, για παράδειγμα αυτό που στο σχήμα είναι γραμμοσκιασμένο. Μπορούμε να βρούμε ένα λίγο μεγαλύτερο αντίστοιχο "κυκλικό ορθογώνιο" του μεγαλύτερου δακτυλίου $D(z_0; R_1, R_2)$ το οποίο να είναι αστρόμορφο. Στο σχήμα είναι αυτό που φράσσεται από τα διακεκομμένα ακτινικά τμήματα (και τους δύο εξωτερικούς κύκλους). Το ίδιο μπορούμε να κάνουμε και με τα υπόλοιπα έξι "κυκλικά ορθογώνια" του $D(z_0; r_1, r_2)$. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα αρκούν επτά (ίσως και λιγότερα) τμήματα του $D(z_0; r_1, r_2)$. Αν οι ακτίνες R_1, R_2 είναι πιο κοντά μεταξύ τους, τότε πρέπει να χωρίσουμε τον $D(z_0; r_1, r_2)$ σε περισσότερα, έστω n, τμήματα. Τώρα, επειδή κάθε τμήμα του $D(z_0; r_1, r_2)$ περιέχεται σε ένα αντίστοιχο αστρόμορφο υποσύνολο του $D(z_0; R_1, R_2)$, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f στην συνοριακή καμπύλη του κάθε τμήματος είναι ίσο με 0. Δηλαδή, αν συμβολίσουμε $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ τις συνοριακές καμπύλες των n τμημάτων με την θετική φορά διαγραφής τους, τότε είναι

$$\oint_{\sigma_1} f(z)\, dz = \ldots = \oint_{\sigma_n} f(z)\, dz = 0.$$

Τώρα αθροίζουμε τα n επικαμπύλια ολοκληρώματα και αναλύουμε το καθένα από αυτά σε τέσσερις μικρότερες καμπύλες, όπως φαίνονται στο σχήμα (δύο κυκλικά τόξα και δύο ευθύγραμμα τμήματα). Κατόπιν παρατηρούμε ότι στο συνολικό άθροισμα κάθε ευθύγραμμο τμήμα εμφανίζεται δύο φορές με αντίθετες φορές διαγραφής, ότι τα εξωτερικά κυκλικά τόξα συντίθενται στον κύκλο $C(z_0; r_2)$ με την θετική φορά διαγραφής του και ότι τα εσωτερικά κυκλικά τόξα συντίθενται στον κύκλο $C(z_0; r_1)$ με την αρνητική φορά διαγραφής του. Το αποτέλεσμα είναι:

$$\oint_{C(z_0;r_2)} f(z)\, dz - \oint_{C(z_0;r_1)} f(z)\, dz = \int_{\sigma_1} f(z)\, dz + \cdots + \oint_{\sigma_n} f(z)\, dz = 0$$

και άρα αποδείχθηκε η (7.11).
Το συμπέρασμα είναι ότι, *αν μια συνάρτηση f είναι αναλυτική σε δακτύλιο $D(z_0; R_1, R_2)$, τότε το $\oint_{C(z_0;r)} f(z)\, dz$ είναι ανεξάρτητο της ακτίνας r (με $R_1 < r < R_2$).*

Ας δούμε τώρα το αντίστροφο της Πρότασης 7.2.

ΠΡΟΤΑΣΗ 7.6. *Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ συνεχής στο ανοικτό σύνολο Ω. Τα παρακάτω (i), (ii), (iii) είναι ισοδύναμα.*
(i) Για κάθε καμπύλη γ στο Ω το $\int_\gamma f(z)\, dz$ δεν εξαρτάται από την καμπύλη αλλά μόνο από τα άκρα της.
(ii) Για κάθε κλειστή καμπύλη γ στο Ω είναι $\oint_\gamma f(z)\, dz = 0$.
(iii) Υπάρχει παράγουσα της f στο Ω.

Απόδειξη. Η Πρόταση 7.2 λέει ότι το (iii) συνεπάγεται τα (i), (ii). Άρα αρκεί να αποδείξουμε ότι τα (i), (ii) είναι ισοδύναμα και ότι συνεπάγονται το (iii).
Έστω ότι ισχύει το (i). Αν η καμπύλη $\gamma : [a, b] \to \Omega$ είναι κλειστή, δηλαδή $\gamma(a) = \gamma(b)$, θέτουμε $z_0 = \gamma(a) = \gamma(b)$ και θεωρούμε την *σταθερή* καμπύλη $\gamma_1 : [a, b] \to \Omega$ με $\gamma_1(t) = z_0$ για κάθε $t \in [a, b]$. Οι γ, γ_1 έχουν τα ίδια άκρα, οπότε λόγω υπόθεσης ισχύει

$$\oint_\gamma f(z)\, dz = \oint_{\gamma_1} f(z)\, dz = \int_a^b f(\gamma_1(t)){\gamma_1}'(t)\, dt = \int_a^b f(z_0)\, 0\, dt = 0.$$

Άρα ισχύει το (ii).
Έστω ότι ισχύει το (ii). Έστω ότι οι καμπύλες γ_1, γ_2 στο Ω έχουν τα ίδια άκρα. Τότε η καμπύλη $\gamma = \gamma_1 \dot{+} (-\gamma_2)$ είναι στο Ω και είναι κλειστή. Άρα λόγω υπόθεσης έχουμε

$$\int_{\gamma_1} f(z)\, dz - \int_{\gamma_2} f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz + \int_{-\gamma_2} f(z)\, dz = \oint_\gamma f(z)\, dz = 0,$$

οπότε $\int_{\gamma_1} f(z)\, dz = \int_{\gamma_2} f(z)\, dz$.
Έστω ότι ισχύει το (i). Κατ' αρχάς υποθέτουμε ότι το Ω είναι *και συνεκτικό*.

Θεωρούμε και ένα σταθερό σημείο z_0 του Ω.
Επειδή το Ω είναι ανοικτό και συνεκτικό, για κάθε $z \in \Omega$ υπάρχει τουλάχιστον μια καμπύλη γ (και μάλιστα, πολυγωνική) στο Ω η οποία έχει αρχικό άκρο το z_0 και τελικό άκρο το z. Ορίζουμε

$$F(z) = \int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta.$$

Έτσι ορίζεται συνάρτηση

$$F : \Omega \to \mathbb{C}.$$

Τώρα είναι βασικό να καταλάβουμε ότι για να είναι η F *συνάρτηση* πρέπει ο αριθμός $F(z)$ να είναι *μονοσήμαντα ορισμένος*. Δηλαδή, πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι το αποτέλεσμα του $\int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta$ εξαρτάται μόνο από το z και όχι από την καμπύλη γ που επιλέγουμε για να συνδέσουμε το z_0 με το z. Αυτό, όμως, εξασφαλίζεται ακριβώς από την υπόθεση (i).
Απομένει να αποδείξουμε ότι ισχύει $F'(z) = f(z)$ για κάθε $z \in \Omega$.
Θεωρούμε οποιοδήποτε $z_1 \in \Omega$ και, επειδή το Ω είναι ανοικτό, μπορούμε να πάρουμε έναν δίσκο $D(z_2; r)$ ώστε

$$z_1 \in D(z_2; r) \subseteq \Omega.$$

Κρατάμε τον $D(z_2; r)$ σταθερό και θεωρούμε και μια σταθερή καμπύλη γ_0 στο Ω με αρχικό άκρο z_0 και τελικό άκρο z_2 και για κάθε $z \in D(z_2; r)$ θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα $[z_2, z]$ και ορίζουμε

$$G(z) = \int_{[z_2,z]} f(\zeta)\, d\zeta \qquad \text{για } z \in D(z_2; r).$$

Ο δίσκος $D(z_2; r)$ είναι, φυσικά, αστρόμορφο σύνολο με κέντρο z_2 και παρατηρήστε ότι η συνάρτηση G που ορίσαμε στον $D(z_2; r)$ είναι ακριβώς η συνάρτηση που ορίσαμε στην γενική περίπτωση αστρόμορφου συνόλου στην απόδειξη της Πρότασης 7.4. Άρα ισχύει

$$G'(z) = f(z) \qquad \text{για } z \in D(z_2; r).$$

Τώρα, όμως, θέτουμε

$$\gamma = \gamma_0 \dot{+} [z_2, z] \qquad \text{για } z \in D(z_2; r).$$

και η γ είναι καμπύλη στο Ω με αρχικό άκρο z_0 και τελικό άκρο z. Άρα

$$F(z) = \int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta = \int_{\gamma_0} f(\zeta)\, d\zeta + \int_{[z_2,z]} f(\zeta)\, d\zeta = \int_{\gamma_0} f(\zeta)\, d\zeta + G(z) \qquad \text{για } z \in D(z_2; r).$$

Επειδή το $\int_{\gamma_0} f(\zeta)\, d\zeta$ είναι σταθερός αριθμός, συνεπάγεται

$$F'(z) = G'(z) = f(z) \qquad \text{για } z \in D(z_2; r)$$

και, επομένως, $F'(z_1) = f(z_1)$. Επειδή το z_1 είναι οποιοδήποτε σημείο του Ω, η F είναι παράγουσα της f στο Ω.

Τώρα, ας δούμε τη γενική περίπτωση, όταν το Ω δεν είναι συνεκτικό.
Γνωρίζουμε ότι το Ω είναι η ένωση των ξένων ανά δύο συνεκτικών συνιστωσών του. Έστω U μια οποιαδήποτε συνεκτική συνιστώσα του Ω. Το U είναι ανοικτό και συνεκτικό σύνολο και η f είναι συνεχής στο U. Επίσης, αν έχουμε δυο καμπύλες στο U με κοινά άκρα, τότες αυτές είναι και στο μεγαλύτερο σύνολο Ω, οπότε τα επικαμπύλια ολοκληρώματα της f στις δυο καμπύλες είναι ίσα. Άρα η υπόθεση (i) ισχύει και για το σύνολο U. Άρα, σύμφωνα με το αποτέλεσμα στην ειδική περίπτωση, η f έχει παράγουσα στο U. Δηλαδή υπάρχει συνάρτηση F_U ορισμένη στην συνιστώσα U για την οποία ισχύει ${F_U}'(z) = f(z)$ για κάθε $z \in U$.
Αυτό, όμως, μπορεί να γίνει σε κάθε συνεκτική συνιστώσα U του Ω. Δηλαδή, σε κάθε συνεκτική συνιστώσα U ορίζεται μια αντίστοιχη συνάρτηση F_U. Επειδή οι συνεκτικές συνιστώσες U είναι ξένες ανά δύο, από όλες τις αντίστοιχες συναρτήσεις F_U ορίζεται μια συνάρτηση F στο Ω έτσι

ώστε ο περιορισμός της F στην κάθε U να ισούται με την αντίστοιχη F_U. Αυτή η F είναι παράγουσα της f στο Ω. Πράγματι, κάθε $z \in \Omega$ ανήκει σε μία (μοναδική) συνιστώσα U, οπότε $F'(z) = F_U{}'(z) = f(z)$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 7.7. *Έστω ανοικτό σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. Στο Ω ορίζεται αναλυτικός κλάδος του λογαρίθμου $\log(z - z_0)$ αν και μόνο αν ισχύει $\oint_\gamma \frac{1}{z-z_0}\,dz = 0$ για κάθε κλειστή καμπύλη γ στο Ω.*

Απόδειξη. Έστω ότι στο Ω ορίζεται αναλυτικός κλάδος του λογαρίθμου $\log(z - z_0)$. Δηλαδή υπάρχει $F : \Omega \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο Ω ώστε να ισχύει $e^{F(z)} = z - z_0$ για κάθε $z \in \Omega$. Συνεπάγεται $F'(z)e^{F(z)} = 1$ για κάθε $z \in \Omega$ και άρα

$$F'(z) = \frac{1}{z - z_0} \qquad \text{για κάθε } z \in \Omega.$$

Άρα η $F(z)$ είναι παράγουσα της $\frac{1}{z-z_0}$ στο Ω, οπότε ισχύει $\oint_\gamma \frac{1}{z-z_0}\,dz = 0$ για κάθε κλειστή καμπύλη γ στο Ω.
Αντιστρόφως, έστω ότι ισχύει $\oint_\gamma \frac{1}{z-z_0}\,dz = 0$ για κάθε κλειστή καμπύλη γ στο Ω. Τότε η $\frac{1}{z-z_0}$ έχει, σύμφωνα με την Πρόταση 7.6, παράγουσα στο Ω, δηλαδή υπάρχει $F : \Omega \to \mathbb{C}$ ώστε να ισχύει

$$F'(z) = \frac{1}{z - z_0} \qquad \text{για } z \in \Omega.$$

Τώρα,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\big((z - z_0)e^{-F(z)}\big) &= e^{-F(z)} - (z - z_0)F'(z)e^{-F(z)} \\ &= (1 - (z - z_0)F'(z))e^{-F(z)} = 0 \qquad \text{για } z \in \Omega.\end{aligned}$$

Από την Πρόταση 7.1 συνεπάγεται ότι για κάθε συνεκτική συνιστώσα U του Ω υπάρχει αντίστοιχη σταθερά c_U ώστε να ισχύει

$$(z - z_0)e^{-F(z)} = c_U \qquad \text{για } z \in U.$$

Επειδή $c_U \neq 0$, υπάρχει d_U ώστε $e^{d_U} = c_U$ και, επομένως, ισχύει

$$e^{F(z)+d_U} = z - z_0 \qquad \text{για } z \in U.$$

Τώρα, ορίζουμε τη συνάρτηση $G : \Omega \to \mathbb{C}$ προσθέτοντας στην F σε κάθε συνεκτική συνιστώσα U του Ω την αντίστοιχη σταθερά d_U. Τότε,

$$e^{G(z)} = z - z_0 \qquad \text{για } z \in \Omega,$$

οπότε η G είναι αναλυτικός κλάδος του λογαρίθμου $\log(z - z_0)$ στο Ω. □

Ασκήσεις.

7.2.1. Υπολογίστε το $\oint_\gamma (z - z_0)^m\,dz$, όπου $m \in \mathbb{Z}$ και γ είναι καμπύλη που περιγράφει με τη θετική φορά την περίμετρο τετραγώνου με κέντρο z_0 και πλευρές παράλληλες στους κύριους άξονες, με δυο τρόπους:
[α] Χρησιμοποιώντας παραμετρικές εξισώσεις των ευθυγράμμων τμημάτων που αποτελούν την γ και κάνοντας υπολογισμούς.
[β] Βλέποντας ότι, αν $m \geq 0$ ή $m \leq -2$, η απάντηση είναι πολύ απλή και ότι, αν $m = -1$, τότε με τρόπο όμοιο με του παραδείγματος 7.2.2 η απάντηση ανάγεται στον υπολογισμό επικαμπύλιου ολοκληρώματος σε κύκλο με κέντρο z_0 και είναι πάλι πολύ απλή.

7.2.2. Έστω $a \in D(z_0; R)$ και $a \neq z_0$. Υπολογίστε το $\oint_{C(z_0;R)} \frac{1}{z-a}\, dz$ με δυο τρόπους:

[α] Χρησιμοποιώντας την παραμετρική εξίσωση του κύκλου και κάνοντας υπολογισμούς.

[β] Βλέποντας ότι με τρόπο όμοιο με του παραδείγματος 7.2.2 η απάντηση ανάγεται στον υπολογισμό επικαμπύλιου ολοκληρώματος σε έναν μικρό(;) κύκλο με κέντρο a και είναι πολύ απλή.

Εξαρτάται η απάντηση από τη θέση του a μέσα στον δίσκο $D(z_0; R)$; Ποιά είναι η απάντηση όταν $a = z_0$;

7.2.3. Υπάρχουν πολυώνυμα p_n ώστε να ισχύει $p_n(z) \to \frac{1}{z}$ ομοιόμορφα στον κύκλο $C(0; 1)$;

7.2.4. Έστω γ_R η κλειστή καμπύλη η οποία περιγράφει μια φορά με τη θετική φορά διαδοχικά το ευθύγραμμο τμήμα από το 0 στο R, το τόξο του κύκλου με κέντρο 0 και ακτίνα R από το R στο $Re^{i\frac{\pi}{4}}$ και το ευθύγραμμο τμήμα από το $Re^{i\frac{\pi}{4}}$ στο 0. Έστω, επίσης, σ_R η καμπύλη η οποία περιγράφει μόνο το προαναφερθέν τόξο από το R στο $Re^{i\frac{\pi}{4}}$.

[α] Αποδείξτε ότι $\int_{\sigma_R} e^{-z^2}\, dz \to 0$ όταν $R \to +\infty$.

[β] Κατόπιν, χρησιμοποιώντας κατάλληλα την γ_R και τον τύπο $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, αποδείξτε τους τύπους για τα λεγόμενα ολοκληρώματα Fresnel: $\int_0^{+\infty} \sin t^2\, dt = \int_0^{+\infty} \cos t^2\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$.

7.2.5. Έστω $y, R > 0$ και $\gamma_{R,y}$ η κλειστή καμπύλη η οποία περιγράφει μια φορά με τη θετική φορά διαδοχικά το ευθ.τμήμα $[-R, R]$, το ευθ. τμήμα $[R, R+iy]$, το ευθ. τμήμα $[R+iy, -R+iy]$ και το ευθ. τμήμα $[-R+iy, -R]$.

[α] Αποδείξτε ότι, με σταθερό $y > 0$, έχουμε $\int_{[R,R+iy]} e^{-z^2}\, dz \to 0$ και $\int_{[-R+iy,-R]} e^{-z^2}\, dz \to 0$ όταν $R \to +\infty$.

[β] Κατόπιν, αποδείξτε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+iy)^2}\, dx$ δεν εξαρτάται από το $y \in [0, +\infty)$.

[γ] Τέλος, χρησιμοποιώντας τον τύπο $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, αποδείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos(2xy)\, dx = \sqrt{\pi} e^{-y^2}$$

για κάθε $y \geq 0$ και, αμέσως μετά και πολύ εύκολα, για κάθε $y \leq 0$. Ο τύπος αυτός είναι κεντρικής σημασίας για την Ανάλυση Fourier.

7.3 Δείκτης στροφής καμπύλης ως προς σημείο.

Θεωρούμε καμπύλη

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{C},$$

όπου η γ είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ του $\mathbb{R}$ και υποθέτουμε, όπως έχουμε συμφωνήσει, ότι η γ είναι τμηματικά ομαλή. Ειδικώτερα, υπάρχουν σημεία $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ ώστε η γ να είναι συνεχώς παραγωγίσιμη σε κάθε υποδιάστημα $[t_{k-1}, t_k]$.

Θεωρούμε, επίσης, οποιοδήποτε σημείο

$$z_0 \notin \gamma^* = \{\gamma(t) \,|\, t \in [a, b]\},$$

δηλαδή τέτοιο ώστε $z_0 \neq \gamma(t)$ για κάθε $t \in [a, b]$.

Τώρα ορίζουμε τη συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ με τύπο

$$f(t) = \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0}\, ds \qquad \text{για } t \in [a, b].$$

Η συνάρτηση μέσα στο ολοκλήρωμα είναι τμηματικά συνεχής (ο αριθμητής είναι τμηματικά συνεχής και ο παρονομαστής είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται). Άρα το ολοκλήρωμα ορίζεται και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο t στο οποίο η $\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z_0}$ είναι συνεχής, δηλαδή παραγωγίσιμη σε κάθε ανοικτό υποδιάστημα (t_{k-1}, t_k). Επίσης, σε κάθε τέτοιο ανοικτό υποδιάστημα ισχύει

$$f'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0}.$$

Εργαζόμενοι σε ένα τέτοιο υποδιάστημα, έχουμε

$$\frac{d}{dt}\big((\gamma(t) - z_0)e^{-f(t)}\big) = \gamma'(t)e^{-f(t)} - (\gamma(t) - z_0)f'(t)e^{-f(t)} = 0.$$

Άρα η συνάρτηση $(\gamma(t) - z_0)e^{-f(t)}$ είναι σταθερή σε κάθε υποδιάστημα (t_{k-1}, t_k) και η σταθερή τιμή της εξαρτάται από το k. Αλλά, επειδή η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής σε *ολόκληρο* το $[a, b]$, είναι σταθερή σε ολόκληρο το $[a, b]$. Δηλαδή, υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{C}$ ώστε

$$(\gamma(t) - z_0)e^{-f(t)} = c \qquad \text{για } t \in [a, b].$$

Αυτό το γράφουμε

$$ce^{f(t)} = \gamma(t) - z_0 \qquad \text{για } t \in [a, b]$$

και, επειδή πρέπει να είναι $c \neq 0$, οπότε υπάρχει $d \in \mathbb{C}$ ώστε $e^d = c$, έχουμε

$$e^{f(t)+d} = \gamma(t) - z_0 \qquad \text{για } t \in [a, b].$$

Τέλος, ορίζουμε την $g : [a, b] \to \mathbb{C}$ με τύπο

$$g(t) = f(t) + d = \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0}\, ds + d \qquad \text{για } t \in [a, b] \tag{7.12}$$

και έχουμε ότι

$$e^{g(t)} = \gamma(t) - z_0 \qquad \text{για } t \in [a, b].$$

Ο άμεσος στόχος μας είναι να καταλάβουμε το γεωμετρικό περιεχόμενο της συνάρτησης g.

Το πραγματικό μέρος του $g(t)$ είναι ίσο με $\ln|\gamma(t) - z_0|$ και, αν συμβολίσουμε $\theta(t)$ το φανταστικό μέρος του $g(t)$, έχουμε

$$g(t) = \ln|\gamma(t) - z_0| + i\theta(t), \tag{7.13}$$

όπου, για κάθε $t \in [a, b]$,

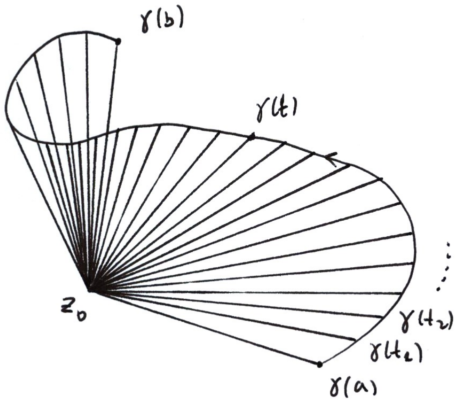
$\theta(t)$ είναι μια από τις τιμές του ορίσματος του μη-μηδενικού μιγαδικού αριθμού $\gamma(t) - z_0$.

Δηλαδή, για κάθε $t \in [a, b]$, το $\theta(t)$ είναι μια από τις (άπειρες) γωνίες του διανύσματος $\gamma(t) - z_0$, το οποίο έχει αρχή το σταθερό σημείο z_0 και καταλήγει στο σημείο $\gamma(t)$ πάνω στην τροχιά της καμπύλης.

Το σημαντικό είναι ότι *η συνάρτηση* $\theta : [a, b] \to \mathbb{R}$ *είναι συνεχής στο* $[a, b]$. Αυτό σημαίνει ότι: καθώς το t μεταβάλλεται στο $[a, b]$ και, επομένως, το σημείο $\gamma(t)$ μεταβάλλεται πάνω στην τροχιά της καμπύλης και, επομένως, το διάνυσμα $\gamma(t) - z_0$ περιστρέφεται γύρω από τη σταθερή αρχή του (δηλαδή το z_0) ακολουθώντας το σημείο $\gamma(t)$, τότε η τιμή της γωνίας του $\gamma(t) - z_0$ μεταβάλλεται *με συνεχή τρόπο* (δηλαδή, χωρίς απότομα άλματα).

Τώρα προσέξτε: για κάθε $t \in [a, b]$ το διάνυσμα $\gamma(t) - z_0$ έχει άπειρες γωνίες, οι οποίες ανά δύο διαφέρουν κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π, οπότε για κάθε $t \in [a, b]$ έχουμε να επιλέξουμε τον $\theta(t)$ από άπειρους αριθμούς. Όμως, από τη στιγμή που θα κάνουμε μια συγκεκριμένη επιλογή της γωνίας $\theta(a)$, η επιλογή που θα κάνουμε για την γωνία $\theta(t)$ για οποιοδήποτε άλλο $t \in [a, b]$ είναι *μονοσήμαντα καθορισμένη*. Αυτό μπορούμε να το κατανοήσουμε ως εξής. Δείτε το σχήμα 35. Ας υποθέσουμε ότι η γωνία $\theta(a)$ είναι 30^o. (Στην πραγματικότητα έχουμε άπειρες επιλογές:

$30^o + k360^o$ με $k \in \mathbb{Z}$. Εμείς κάνουμε μια επιλογή και έστω ότι αυτή είναι 30^o.) Αν πάρουμε ένα t_1 πολύ κοντά στο a, επειδή η θ είναι συνεχής, το $\theta(t_1)$ πρέπει να είναι πολύ κοντά στο $\theta(a)$. Ας πούμε ότι μια υποψήφια τιμή για το $\theta(t_1)$ είναι 31^o, οπότε για το $\theta(t_1)$ έχουμε άπειρες επιλογές: $31^o + k360^o$ με $k \in \mathbb{Z}$. Όμως, από αυτές τις άπειρες τιμές η *μοναδική* που είναι κοντά στην τιμή 30^o του $\theta(a)$ είναι η τιμή 31^o. Άρα είμαστε υποχρεωμένοι να επιλέξουμε ως τιμή του $\theta(t_1)$ την 31^o. Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι, αν προχωρήσουμε σε ένα t_2 λίγο πιο πέρα από το t_1 και πολύ κοντά στο t_1, τότε η τιμή της γωνίας $\theta(t_2)$ θα καθοριστεί μονοσήμαντα από την (ήδη μονοσήμαντα καθορισμένη) τιμή του $\theta(t_1)$ διότι πρέπει να είναι πολύ κοντά σ' αυτήν. Αυτό συνεχίζεται μέχρι να φτάσουμε από σημείο σε σημείο στο άλλο άκρο b καλύπτοντας όλο το διάστημα $[a, b]$. Αν ως αρχική επιλογή γωνίας $\theta(a)$ δεν είχαμε κάνει την 30^o αλλά την $390^o = 30^o + 1 \cdot 360^o$, τότε ως επιλογή για την γωνία $\theta(t_1)$ θα έπρεπε να κάνουμε την $391^o = 31^o + 1 \cdot 360^o$ και ούτω καθ' εξής.



Σχ 35.

Τα προηγούμενα μπορούμε να τα αιτιολογήσουμε με αυστηρά μαθηματικό τρόπο ως εξής. Έστω ότι $\theta_1, \theta_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις ώστε για κάθε $t \in [a, b]$ οι τιμές $\theta_1(t)$ και $\theta_2(t)$ να είναι γωνίες του ίδιου διανύσματος $\gamma(t) - z_0$. Τότε για κάθε $t \in [a, b]$ η διαφορά $\theta_2(t) - \theta_1(t)$ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π, οπότε μπορούμε να ορίσουμε τη συνάρτηση $k : [a, b] \to \mathbb{R}$ με τύπο $k(t) = \frac{\theta_2(t)-\theta_1(t)}{2\pi}$. Η k είναι συνεχής στο συνεκτικό σύνολο $[a, b]$ με πραγματικές τιμές, οπότε έχει την ιδιότητα ενδιάμεσης τιμής. Επειδή οι τιμές της είναι ακέραιοι, συνεπάγεται ότι είναι σταθερή. Άρα υπάρχει ένας σταθερός (δηλαδή, ανεξάρτητος του $t \in [a, b]$) ακέραιος k ώστε να ισχύει $\theta_2(t) - \theta_1(t) = k2\pi$ για κάθε $t \in [a, b]$. Ειδικώτερα, αν $\theta_2(a) = \theta_1(a)$, τότε $k = 0$ και, επομένως, $\theta_2(t) = \theta_1(t)$ για κάθε $t \in [a, b]$. Αυτό μας λέει ό,τι είδαμε με μη αυστηρό τρόπο στην προηγούμενη παράγραφο: αν δυο από εμάς κάνουμε την ίδια επιλογή γωνίας $\theta_2(a) = \theta_1(a)$ στο αρχικό σημείο $t = a$, τότε θα κάνουμε την ίδια επιλογή γωνίας $\theta_2(t) = \theta_1(t)$ σε κάθε επόμενο t σε ολόκληρο το διάστημα $[a, b]$.

Τώρα προσέξτε και πάλι: αν δυο από εμάς κάνουμε δυο επιλογές (ίδιες ή διαφορετικές) $\theta_1(a)$ και $\theta_2(a)$ για $t = a$, τότε η δυο διαφορές "τελική γωνία μείον αρχική γωνία" που θα βρούμε θα είναι ίδια και για τους δυο μας! Πράγματι:

$$\theta_2(b) - \theta_2(a) = (\theta_1(b) + k2\pi) - (\theta_1(a) + k2\pi) = \theta_1(b) - \theta_1(a).$$

Συνοψίζουμε:

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Μέσω των τύπων (7.12) και (7.13) ορίζεται μια συνάρτηση $\theta : [a, b] \to \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[a, b]$ και η οποία αποτελεί μια* **συνεχή επιλογή γωνίας** *του διανύσματος $\gamma - z_0$. Δυο οποιεσδήποτε τέτοιες συνεχείς επιλογές γωνίας του $\gamma - z_0$ διαφέρουν κατά σταθερό ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π στο $[a, b]$. Η διαφορά $\theta(b) - \theta(a)$ είναι ανεξάρτητη από την συγκεκριμένη επιλογή-συνάρτηση $\theta : [a, b] \to \mathbb{R}$ και αποτελεί ένα ιδιαίτερο χαρακτηριστικό της καμπύλης γ σε σχέση με το σημείο z_0. Η διαφορά αυτή ονομάζεται, φυσιολογικά,* **συνολική μεταβολή γωνίας** *κατά μήκος της καμπύλης γ σε σχέση με το σημείο z_0.*

Ας θεωρήσουμε τώρα την πιο σημαντική ειδική περίπτωση που η καμπύλη γ είναι κλειστή, δηλαδή όταν $\gamma(b) = \gamma(a)$. Αυτό σημαίνει ότι τα διανύσματα $\gamma(b) - z_0$ και $\gamma(a) - z_0$ ταυτίζονται, οπότε $\ln|\gamma(b) - z_0| = \ln|\gamma(a) - z_0|$ και οι γωνίες $\theta(b)$ και $\theta(a)$ διαφέρουν κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π. Δηλαδή, σύμφωνα με τον προηγούμενο ορισμό, η συνολική μεταβολή γωνίας κατά μήκος της καμπύλης γ σε σχέση με το σημείο z_0 είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω κλειστή καμπύλη $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ και σημείο $z_0 \notin \gamma^*$. Αν $\theta : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι οποιαδήποτε συνεχής επιλογή γωνίας του διανύσματος $\gamma - z_0$, τότε συμβολίζουμε*

$$n(\gamma; z_0) = \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi}.$$

Ο αριθμός $n(\gamma; z_0)$ είναι ακέραιος και δηλώνει με ποιό ακριβώς πολλαπλάσιο του 2π είναι ίση η συνολική μεταβολή γωνίας κατά μήκος της καμπύλης γ σε σχέση με το σημείο z_0 ή, με άλλα λόγια, τον αριθμό περιστροφών της καμπύλης γ γύρω από το z_0. Ο αριθμός $n(\gamma; z_0)$ ονομάζεται **δείκτης στροφής** *της γ ως προς το z_0.*

Αυτό το τελευταίο σχετικά με τον αριθμό περιστροφών της καμπύλης γ γύρω από το z_0 μπορεί να το κατανοήσει κανείς αν δει απλά παραδείγματα, όπως μια κυκλική καμπύλη γύρω από ένα εσωτερικό της σημείο ή γύρω από ένα εξωτερικό της σημείο.

Τώρα θα εκμεταλευτούμε τους τύπους (7.12) και (7.13) για να βρούμε έναν απλό τύπο για τον δείκτη στροφής $n(\gamma; z_0)$. Επειδή η γ είναι κλειστή και, επομένως, όπως είπαμε πιο πάνω, ισχύει $\ln|\gamma(b) - z_0| = \ln|\gamma(a) - z_0|$, από τον τύπο (7.13) έχουμε

$$g(b) - g(a) = i(\theta(b) - \theta(a)).$$

Επίσης, από τον τύπο (7.12) έχουμε

$$g(a) = \int_a^a \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0}\, ds + d = d, \qquad g(b) = \int_a^b \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0}\, ds + d,$$

οπότε

$$n(\gamma; z_0) = \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi i}(g(b) - g(a)) = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0}\, ds.$$

Τέλος, από τον ορισμό του επικαμπύλιου ολοκληρώματος έχουμε

$$n(\gamma; z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{1}{z - z_0}\, dz.$$

Παράδειγμα 7.3.1. Έστω $n \in \mathbb{Z}$ και η κλειστή καμπύλη $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ με τύπο $\gamma(t) = z_0 + re^{int}$. Είναι σαφές ότι, αν $n \neq 0$ και το t διατρέχει το διάστημα $[0, 2\pi]$, τότε το $\gamma(t)$ διατρέχει $|n|$ φορές τον κύκλο $C(z_0; r)$ με τη θετική φορά, αν $n > 0$, και με την αρνητική φορά, αν $n < 0$. Αν $n = 0$, τότε το $\gamma(t)$ διατρέχει $|n| = 0$ φορές τον κύκλο $C(z_0; r)$ αφού μένει σταθερό στο ίδιο σημείο $z_0 + r$. Όλα αυτά πιστοποιούνται με τον εξής υπολογισμό:

$$n(\gamma; z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{1}{z - z_0}\, dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{1}{(z_0 + re^{int}) - z_0}\, rine^{int}\, dt = \frac{1}{2\pi i}\, in2\pi = n.$$

Στην ειδική περίπτωση $n = 1$ έχουμε

$$n(C(z_0; r); z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C(z_0;r)} \frac{1}{z - z_0}\, dz = 1.$$

Η Πρόταση 7.8 είναι απλή αναδιατύπωση της Πρότασης 7.7.

ΠΡΟΤΑΣΗ 7.8. *Έστω ανοικτό σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. Στο Ω ορίζεται αναλυτικός κλάδος του λογαρίθμου $\log(z - z_0)$ αν και μόνο αν ισχύει $n(\gamma; z_0) = 0$ για κάθε κλειστή καμπύλη γ στο Ω.*

Παράδειγμα 7.3.2. Θεωρούμε το σύνολο Ω το οποίο προκύπτει αν από το $\mathbb{C}$ αφαιρέσουμε μια οποιαδήποτε ημιευθεία με κορυφή z_0.
Τότε το σύνολο $A = \Omega - z_0$ προκύπτει με παράλληλη μεταφορά του Ω κατά το $-z_0$, οπότε το A είναι το $\mathbb{C}$ εκτός από μια ημιευθεία με κορυφή 0. Άρα στο A ορίζεται αναλυτικός κλάδος του $\log z$. Δηλαδή υπάρχει $G : A \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο A ώστε να ισχύει $e^{G(z)} = z$ για κάθε $z \in A$. Τώρα, η $F : \Omega \to \mathbb{C}$ με τύπο $F(z) = G(z - z_0)$ για $z \in \Omega$ είναι αναλυτική στο Ω και ισχύει $e^{F(z)} = e^{G(z-z_0)} = z - z_0$ για κάθε $z \in \Omega$. Άρα η F είναι αναλυτικός κλάδος του $\log(z - z_0)$ στο Ω.
Επειδή, λοιπόν, ορίζεται αναλυτικός κλάδος του $\log(z - z_0)$ στο Ω, από την Πρόταση 7.8 συνεπάγεται ότι είναι $n(\gamma; z_0) = 0$ για κάθε κλειστή καμπύλη γ στο Ω.
Το αποτέλεσμα αυτό πρέπει να το κατανοήσουμε ως εξής: *επειδή η γ περιέχεται στο σύνολο Ω, δεν τέμνει την συμπληρωματική του Ω ημιευθεία με κορυφή z_0, οπότε δεν μπορεί να συμπληρώσει καμιά πλήρη περιστροφή γύρω από το z_0.*
Το προηγούμενο επιχείρημα μπορούμε να το επαναλάβουμε "ανάποδα" για να αποδείξουμε την ύπαρξη αναλυτικού κλάδου του $\log(z - z_0)$ στο Ω. Πράγματι, επειδή το Ω είναι αστρόμορφο σύνολο και επειδή η συνάρτηση $\frac{1}{z-z_0}$ είναι αναλυτική στο Ω (αφού το Ω δεν περιέχει το z_0), συνεπάγεται $n(\gamma; z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{1}{z-z_0}\,dz = 0$ για κάθε κλειστή καμπύλη γ στο Ω. Άρα πάλι από την Πρόταση 7.8 έχουμε ότι ορίζεται αναλυτικός κλάδος του $\log(z - z_0)$ στο Ω.

ΠΡΟΤΑΣΗ 7.9. *Έστω γ μια κλειστή καμπύλη. Τότε η συνάρτηση*

$$n(\gamma;\,\cdot\,) : \mathbb{C} \setminus \gamma^* \to \mathbb{Z}$$

είναι συνεχής στο ανοικτό σύνολο $\mathbb{C}\setminus\gamma^*$ και είναι σταθερή σε κάθε συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{C}\setminus\gamma^*$.

Απόδειξη. Έστω $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$. Επειδή το $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ είναι ανοικτό, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$D(z;\delta) \subseteq \mathbb{C} \setminus \gamma^*,$$

δηλαδή η τροχιά της γ δεν τέμνει τον δίσκο $D(z;\delta)$.
Τώρα θεωρούμε τον μικρότερο δίσκο $D(z;\frac{\delta}{2})$ και έχουμε τα εξής

$$|\zeta - z| \geq \delta \qquad \text{για κάθε } \zeta \in \gamma^* \tag{7.14}$$

και

$$|\zeta - w| \geq \frac{\delta}{2} \qquad \text{για κάθε } \zeta \in \gamma^* \text{ και κάθε } w \in D\Big(z;\frac{\delta}{2}\Big). \tag{7.15}$$

Τώρα, για κάθε $w \in D(z;\frac{\delta}{2})$ έχουμε

$$\begin{aligned} n(\gamma;w) - n(\gamma;z) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{1}{\zeta - w}\,d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{1}{\zeta - z}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \Big(\frac{1}{\zeta - w} - \frac{1}{\zeta - z}\Big)\,d\zeta \\ &= \frac{w-z}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{1}{(\zeta - w)(\zeta - z)}\,d\zeta. \end{aligned}$$

και, επομένως,

$$|n(\gamma;w) - n(\gamma;z)| = \frac{|w-z|}{2\pi}\Big|\oint_\gamma \frac{1}{(\zeta - w)(\zeta - z)}\,d\zeta\Big|.$$

Από τις (7.14) και (7.15) συνεπάγεται

$$\Big|\frac{1}{(\zeta - w)(\zeta - z)}\Big| = \frac{1}{|\zeta - w|\,|\zeta - z|} \leq \frac{2}{\delta^2} \qquad \text{για κάθε } \zeta \in \gamma^*,$$

οπότε

$$|n(\gamma;w) - n(\gamma;z)| \leq \frac{|w-z|}{2\pi}\,\frac{2}{\delta^2}\ \text{μήκος}\,\gamma.$$

Αυτό ισχύει για κάθε $w \in D(z; \frac{\delta}{2})$, οπότε όταν $w \to z$ συνεπάγεται $n(\gamma; w) \to n(\gamma; z)$.
Τώρα, έστω U οποιαδήποτε συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.
Επειδή το U είναι συνεκτικό σύνολο και η $n(\gamma; z)$, ως συνάρτηση του z στο U, είναι συνεχής και έχει πραγματικές (ακέραιες) τιμές, συνεπάγεται ότι έχει την ιδιότητα ενδιάμεσης τιμής στο U.
Άρα, επειδή έχει μόνο ακέραιες τιμές, συνεπάγεται ότι είναι σταθερή στο U. $\square$

Το τελευταίο συμπέρασμα της Πρότασης 7.9 διαβάζεται ως εξής:
Αν οι z_1, z_2 βρίσκονται στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του συμπληρώματος της τροχιάς της κλειστής καμπύλης γ, τότε ο αριθμός περιστροφών της γ γύρω από το z_1 είναι ίδιος με τον αριθμό περιστροφών της γ γύρω από το z_2.

Η Πρόταση 7.9 είναι πολύ χρήσιμη όταν θέλουμε να υπολογίσουμε τον δείκτη στροφής μιας κλειστής καμπύλης γ ως προς ένα σημείο z που δεν ανήκει στην τροχιά της. Αν μπορούμε να βρούμε ένα άλλο σημείο z' έτσι ώστε τα δυο σημεία z, z' να βρίσκονται στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του συμπληρώματος της τροχιάς της γ και έτσι ώστε να μπορεί να υπολογιστεί εύκολα ο δείκτης στροφής της γ ως προς το z', τότε $n(\gamma; z) = n(\gamma; z')$. Έτσι, με έμμεσο τρόπο υπολογίζουμε εύκολα τον $n(\gamma; z)$.

Παράδειγμα 7.3.3. Έστω $n \in \mathbb{Z}$ και η κλειστή καμπύλη $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ με τύπο $\gamma(t) = z_0 + re^{int}$ που είδαμε στο παράδειγμα 7.3.1. Αν $n \neq 0$, η τροχιά της γ είναι ο κύκλος $C(z_0; r)$ και το συμπλήρωμα της τροχιάς έχει εμφανώς δυο συνεκτικές συνιστώσες: τον δίσκο $D(z_0; r)$ και τον εξωτερικό δακτύλιο $D(z_0; r, +\infty)$.
Τότε για κάθε $z \in D(z_0; r)$ έχουμε

$$n(\gamma; z) = n(\gamma; z_0) = n.$$

Παρατηρήστε ότι, αν $z \neq z_0$ και προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε τον δείκτη στροφής $n(\gamma; z)$ μέσω του τύπου

$$n(\gamma; z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta$$

χρησιμοποιώντας την παραμετρική εξίσωση της γ, θα δυσκολευτούμε αρκετά. Όμως, ο ίδιος υπολογισμός στην περίπτωση του σημείου $z = z_0$ είναι απλούστατος και έγινε στο παράδειγμα 7.3.1. Παρεμπιπτόντως, αν θεωρήσουμε οποιοδήποτε z στον εξωτερικό δακτύλιο $D(z_0; r, +\infty)$, τότε ο υπολογισμός του $n(\gamma; z)$ μέσω του επικαμπύλιου ολοκληρώματος και της παραμετρικής εξίσωσης της γ δεν είναι απλός. Όμως, τώρα βλέπουμε ότι υπάρχει κάποια ημιευθεία με κορυφή z η οποία δεν τέμνει την τροχιά της γ, οπότε από το παράδειγμα 7.3.2 συνεπάγεται χωρίς κανένα υπολογισμό (!) ότι $n(\gamma; z) = 0$.

Μια χρήσιμη ιδιότητα του δείκτη στροφής είναι η εξής.

ΠΡΟΤΑΣΗ 7.10. *Έστω κλειστές καμπύλες γ_1 και γ_2 με τα ίδια άκρα, οπότε ορίζεται η κλειστή καμπύλη $\gamma_1 \dot{+} \gamma_2$. Έστω, επίσης, σημείο z_0 το οποίο δεν ανήκει στις τροχιές των δυο καμπυλών, οπότε δεν ανήκει ούτε στην τροχιά της $\gamma_1 \dot{+} \gamma_2$. Τότε*

$$n(\gamma_1 \dot{+} \gamma_2; z_0) = n(\gamma_1; z_0) + n(\gamma_2; z_0).$$

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι απλή:

$$\begin{aligned} n(\gamma_1 \dot{+} \gamma_2; z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1 \dot{+} \gamma_2} \frac{1}{z - z_0}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{1}{z - z_0}\, dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} \frac{1}{z - z_0}\, dz \\ &= n(\gamma_1; z_0) + n(\gamma_2; z_0). \end{aligned}$$

$\square$

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω κλειστή καμπύλη γ και $z \notin \gamma^*$. Λέμε ότι η γ **περικλείει** το z αν $n(\gamma; z) \neq 0$.*

Ασκήσεις.

7.3.1. [α] Έστω κλειστές καμπύλες γ_1 και γ_2 και σημείο z το οποίο δεν ανήκει στις τροχιές των δυο καμπυλών. Υποθέτουμε τα εξής: υπάρχουν διαδοχικά σημεία $w_1^{(1)}, \dots, w_n^{(1)}, w_{n+1}^{(1)} = w_1^{(1)}$ της γ_1 και (ίδιου πλήθους) "αντίστοιχα" διαδοχικά σημεία $w_1^{(2)}, \dots, w_n^{(2)}, w_{n+1}^{(2)} = w_1^{(2)}$ της γ_2 και καμπύλες $\sigma_1, \dots, \sigma_n, \sigma_{n+1} = \sigma_1$ έτσι ώστε κάθε σ_j να έχει αρχικό σημείο το $w_j^{(1)}$ και τελικό σημείο το $w_j^{(2)}$ και έτσι ώστε, για κάθε $j = 1, \dots, n$, το τμήμα της γ_1 που είναι ανάμεσα στα $w_j^{(1)}, w_{j+1}^{(1)}$ και το τμήμα της γ_2 που είναι ανάμεσα στα $w_j^{(2)}, w_{j+1}^{(2)}$ και η σ_j και η σ_{j+1} να είναι όλες μαζί σε ένα αντίστοιχο αστρόμορφο υποσύνολο του $\mathbb{C} \setminus \{z\}$.
Μετά από όλες αυτές τις υποθέσεις, αποδείξτε ότι

$$n(\gamma_1; z) = n(\gamma_2; z).$$

[β] Θεωρήστε σημείο z και δυο (διαφορετικές) ημιευθείες l και m με κορυφή z. Θεωρήστε και σημείο $A \neq z$ της l και σημείο $B \neq z$ της m. Θεωρήστε καμπύλη γ_1 με αρχικό άκρο A και τελικό άκρο B, η οποία είναι μέσα στη μία από τις δυο γωνίες που σχηματίζουν οι l, m. Θεωρήστε καμπύλη γ_2 με αρχικό άκρο B και τελικό άκρο A, η οποία είναι μέσα στην άλλη από τις δυο γωνίες που σχηματίζουν οι l, m. Θεωρήστε την κλειστή καμπύλη $\gamma = \gamma_1 \dot{+} \gamma_2$. Χρησιμοποιώντας έναν μικρό κυκλάκο με κέντρο z, αποδείξτε ότι

$$n(\gamma; z) = \pm 1.$$

Το πρόσημο εξαρτάται από το ποιά γωνία περιέχει την γ_1 και ποιά την γ_2.

7.4 Οι τύποι του Cauchy σε αστρόμορφα σύνολα και η άπειρη παραγωγισιμότητα μιας αναλυτικής συνάρτησης.

ΠΡΟΤΑΣΗ 7.11. **[Ο τύπος του Cauchy σε αστρόμορφα σύνολα]** *Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο ανοικτό και αστρόμορφο σύνολο Ω. Τότε για κάθε κλειστή καμπύλη γ στο Ω ισχύει*

$$n(\gamma; z)\, f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \qquad \text{για κάθε } z \in \Omega \setminus \gamma^*.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε μια κλειστή καμπύλη γ στο Ω και ένα σημείο z στο Ω και όχι πάνω στην τροχιά της γ.
Ορίζουμε τη συνάρτηση $g : \Omega \to \mathbb{C}$ με τύπο

$$g(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}, & \text{αν } \zeta \in \Omega, \zeta \neq z \\ f'(z), & \text{αν } \zeta = z \end{cases}$$

Η συνάρτηση g είναι ορισμένη στο Ω και είναι αναλυτική στο Ω εκτός, ίσως, στο σημείο z. Πράγματι, οι $f(\zeta) - f(z)$ και $\zeta - z$ είναι, ως συναρτήσεις του ζ, αναλυτικές στο $\Omega \setminus \{z\}$ και η δεύτερη δεν μηδενίζεται στο $\Omega \setminus \{z\}$. Άρα και η $g(\zeta)$ είναι αναλυτική στο $\Omega \setminus \{z\}$.
Τώρα, στο z η $g(\zeta)$ είναι συνεχής, διότι

$$\lim_{\zeta \to z} g(\zeta) = \lim_{\zeta \to z} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} = f'(z) = g(z).$$

Άρα η Πρόταση 7.5 εφαρμόζεται στην συνάρτηση g στο ανοικτό και αστρόμορφο Ω και έχουμε

$$\oint_\gamma g(\zeta)\, d\zeta = 0. \tag{7.16}$$

Επειδή το z δεν ανήκει στην τροχιά της γ, όταν το σημείο ζ διατρέχει την τροχιά της γ οι αντίστοιχες τιμές $g(\zeta)$ δίνονται από τον τύπο $g(\zeta) = \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}$, οπότε η (7.16) γίνεται

$$\oint_\gamma \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\,d\zeta = 0.$$

Συνεπάγεται

$$\oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta - f(z)\oint_\gamma \frac{1}{\zeta-z}\,d\zeta = 0$$

και, επομένως,

$$\oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta = f(z)\oint_\gamma \frac{1}{\zeta-z}\,d\zeta = 2\pi i\, n(\gamma;z)\, f(z).$$

□

ΠΡΟΤΑΣΗ 7.12. [**Ο τύπος του Cauchy για κύκλους σε ανοικτά σύνολα**] *Έστω $f:\Omega\to\mathbb{C}$ αναλυτική στο ανοικτό σύνολο Ω. Αν $\mathrm{cl}\,D(z_0;r)\subseteq\Omega$, τότε*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C(z_0;r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta \qquad \textit{για κάθε } z\in D(z_0;r).$$

Απόδειξη. Ο κλειστός δίσκος $\mathrm{cl}\,D(z_0;r)$ είναι συμπαγές σύνολο και το Ω^c είναι κλειστό. Τα δυο αυτά σύνολα είναι ξένα, οπότε από την Πρόταση 2.11 συνεπάγεται ότι υπάρχει $\delta>0$ ώστε να ισχύει $|z-w|\ge\delta$ για κάθε $z\in\mathrm{cl}\,D(z_0;r)$ και κάθε $w\in\Omega^c$.
Τώρα παίρνουμε οποιοδήποτε R με $0<r<R\le r+\delta$ και βλέπουμε εύκολα ότι

$$\mathrm{cl}\,D(z_0;r)\subseteq D(z_0;R)\subseteq\Omega.$$

Η f είναι αναλυτική στο *αστρόμορφο* ανοικτό σύνολο $D(z_0;R)$ (προσέξτε: το Ω μπορεί να μην είναι αστρόμορφο), και η καμπύλη που διαγράφει μια φορά και με τη θετική κατεύθυνση τον κύκλο $C(z_0;r)$ περιέχεται στον $D(z_0;R)$ και έχει δείκτη στροφής ίσο με 1 για κάθε $z\in D(z_0;r)$. Άρα η Πρόταση 7.11 συνεπάγεται αμέσως τον τύπο που έχουμε να αποδείξουμε. □

ΛΗΜΜΑ 7.2. *Έστω $n\in\mathbb{N}$ και καμπύλη (όχι αναγκαστικά κλειστή) γ και $\phi:\gamma^*\to\mathbb{C}$ συνεχής στην τροχιά γ^* της γ. Ορίζουμε τη συνάρτηση $g:\mathbb{C}\setminus\gamma^*\to\mathbb{C}$ με τύπο*

$$g(z) = \int_\gamma \frac{\phi(\zeta)}{(\zeta-z)^n}\,d\zeta \qquad \textit{για } z\notin\gamma^*.$$

Τότε η g είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}\setminus\gamma^*$ και ισχύει

$$g'(z) = n\int_\gamma \frac{\phi(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta \qquad \textit{για } z\notin\gamma^*.$$

Απόδειξη. Ξεκινάμε όπως στην απόδειξη της Πρότασης 7.9.
Έστω $z\in\mathbb{C}\setminus\gamma^*$. Επειδή το $\mathbb{C}\setminus\gamma^*$ είναι ανοικτό, υπάρχει $\delta>0$ ώστε

$$D(z;\delta)\subseteq\mathbb{C}\setminus\gamma^*,$$

δηλαδή η τροχιά της γ δεν τέμνει τον δίσκο $D(z;\delta)$.
Τώρα θεωρούμε τον μικρότερο δίσκο $D(z;\frac{\delta}{2})$ και έχουμε ότι

$$|\zeta-w|\ge\frac{\delta}{2} \qquad \text{για κάθε } \zeta\in\gamma^* \text{ και κάθε } w\in D\Big(z;\frac{\delta}{2}\Big). \tag{7.17}$$

Τώρα, για κάθε $w \in D(z; \frac{\delta}{2})$ έχουμε

$$g(w) - g(z) = \int_\gamma \frac{\phi(\zeta)}{(\zeta - w)^n}\, d\zeta - \int_\gamma \frac{\phi(\zeta)}{(\zeta - z)^n}\, d\zeta = \int_\gamma \Big(\frac{1}{(\zeta - w)^n} - \frac{1}{(\zeta - z)^n} \Big) \phi(\zeta)\, d\zeta,$$

οπότε

$$\frac{g(w) - g(z)}{w - z} = \int_\gamma \frac{\frac{1}{(\zeta-w)^n} - \frac{1}{(\zeta-z)^n}}{w - z} \phi(\zeta)\, d\zeta.$$

Άρα

$$\frac{g(w) - g(z)}{w - z} - n \int_\gamma \frac{\phi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta = \int_\gamma \Big(\frac{\frac{1}{(\zeta-w)^n} - \frac{1}{(\zeta-z)^n}}{w - z} - \frac{n}{(\zeta - z)^{n+1}} \Big) \phi(\zeta)\, d\zeta. \quad (7.18)$$

Τώρα, για απλούστευση των συμβόλων θέτουμε προσωρινά

$$A = \zeta - w, \qquad B = \zeta - z, \quad \text{οπότε} \quad B - A = w - z$$

και για την παράσταση μέσα στην παρένθεση της (7.18) χρησιμοποιούμε τον αλγεβρικό τύπο (τον οποίο θα αποδείξετε εσείς)

$$\frac{\frac{1}{A^n} - \frac{1}{B^n}}{B - A} - \frac{n}{B^{n+1}} = (B - A)\Big(\frac{1}{A^n B^2} + \frac{2}{A^{n-1} B^3} + \cdots + \frac{n-1}{A^2 B^n} + \frac{n}{A B^{n+1}} \Big).$$

Από την (7.17) έχουμε ότι για κάθε $\zeta \in \gamma^*$ και κάθε $w \in D(z; \frac{\delta}{2})$ ισχύει $|A| \geq \frac{\delta}{2}$ και $|B| \geq \frac{\delta}{2}$, οπότε για την παράσταση μέσα στην παρένθεση της (7.18) έχουμε

$$\begin{aligned} \Big| \frac{\frac{1}{A^n} - \frac{1}{B^n}}{B - A} - \frac{n}{B^{n+1}} \Big| &\leq |B - A| \Big(\frac{1}{|A|^n |B|^2} + \frac{2}{|A|^{n-1} |B|^3} + \cdots + \frac{n-1}{|A|^2 |B|^n} + \frac{n}{|A||B|^{n+1}} \Big) \\ &\leq |w - z| \frac{1 + 2 + \cdots + (n-1) + n}{(\frac{\delta}{2})^{n+2}} \leq |w - z| \frac{n^2 2^{n+2}}{\delta^{n+2}}. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Επίσης, επειδή η τροχιά γ^* είναι συμπαγές σύνολο και η ϕ είναι συνεχής στην γ^* συνεπάγεται ότι η ϕ είναι φραγμένη στην γ^*, οπότε υπάρχει αριθμός $M \geq 0$ ώστε να ισχύει

$$|\phi(\zeta)| \leq M \qquad \text{για } \zeta \in \gamma^*. \quad (7.20)$$

Από τις (7.19) και (7.20) η (7.18) γίνεται

$$\Big| \frac{g(w) - g(z)}{w - z} - n \int_\gamma \frac{\phi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta \Big| \leq |w - z| \frac{n^2 2^{n+2}}{\delta^{n+2}} M \,\text{μήκος}\, \gamma \quad \text{για } w \in D\Big(z; \frac{\delta}{2}\Big). \quad (7.21)$$

Επειδή οι $n, \delta, M,$ μήκος γ είναι σταθεροί αριθμοί, από την (7.21) συνεπάγεται

$$\lim_{w \to z} \frac{g(w) - g(z)}{w - z} = n \int_\gamma \frac{\phi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta,$$

οπότε η g είναι παραγωγίσιμη στο z και $g'(z) = n \int_\gamma \frac{\phi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta$.
Άρα η g είναι παραγωγίσμη σε κάθε $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ και, επειδή το $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ είναι ανοικτό σύνολο, η g είναι αναλυτική στο $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$. □

Προσέξτε ότι το Λήμμα 7.2 ουσιαστικά λέει ότι μπορούμε να κάνουμε μια εναλλαγή παραγώγισης και ολοκλήρωσης:

$$g'(z) = \frac{d}{dz} g(z) = \frac{d}{dz} \int_\gamma \frac{\phi(\zeta)}{(\zeta - z)^n}\, d\zeta = \int_\gamma \frac{d}{dz} \Big(\frac{\phi(\zeta)}{(\zeta - z)^n} \Big) d\zeta = n \int_\gamma \frac{\phi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta.$$

Γενικά, τέτοιες εναλλαγές παραγώγισης και ολοκλήρωσης δεν επιτρέπονται και κάθε φορά πρέπει να αποδεικνύονται. Στη συγκεκριμένη περίπτωση το Λήμμα 7.2 αποδεικνύει μια τέτοια εναλλαγή.

Τώρα θα χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα 7.2 για εναλλαγή παραγώγισης και ολοκλήρωσης και τον τύπο του Cauchy από τις Προτάσεις 7.11 και 7.12 για να βγάλουμε διάφορα συμπεράσματα για τις παραγώγους μιας αναλυτικής συνάρτησης.

ΘΕΩΡΗΜΑ 7.2. *Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο ανοικτό σύνολο Ω. Τότε η f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο Ω.*

Απόδειξη. Θεωρούμε οποιοδήποτε $z_0 \in \Omega$ και έναν κλειστό δίσκο $\mathrm{cl}\, D(z_0; r) \subseteq \Omega$. Η Πρόταση 7.12 λέει ότι

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(z_0;r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \qquad \text{για κάθε } z \in D(z_0; r). \tag{7.22}$$

Θεωρούμε τις δυο μεριές της (7.22) ως συναρτήσεις περιορισμένες στον ανοικτό δίσκο $D(z_0; r)$. Η αριστερή μεριά f είναι αναλυτική στον $D(z_0; r)$ και, σύμφωνα με το Λήμμα 7.2, και η δεξιά μεριά είναι αναλυτική στον δίσκο $D(z_0; r)$. Η (7.22) λέει ότι οι δυο συναρτήσεις ταυτίζονται στον $D(z_0; r)$, οπότε και οι παράγωγοί τους ταυτίζονται στον $D(z_0; r)$. Επομένως, χρησιμοποιώντας και τον τύπο για την παράγωγο της δεξιάς μεριάς από το Λήμμα 7.2, έχουμε

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(z_0;r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta \qquad \text{για κάθε } z \in D(z_0; r). \tag{7.23}$$

Τώρα δεν γνωρίζουμε αν η αριστερή μεριά της (7.23) είναι, ως συνάρτηση του z στον δίσκο $D(z_0; r)$, παραγωγίσιμη. Γνωρίζουμε, όμως, από το Λήμμα 7.2 ότι η δεξιά μεριά της (7.23) είναι παραγωγισιμη στον δίσκο $D(z_0; r)$, οπότε επειδή οι δυο μεριές ταυτίζονται στον δίσκο $D(z_0; r)$, συνεπάγεται ότι και η αριστερή μεριά f' είναι παραγωγίσιμη στον δίσκο $D(z_0; r)$ και, από τον τύπο του Λήμματος 7.2, έχουμε

$$f''(z) = \frac{2}{2\pi i} \oint_{C(z_0;r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^3}\, d\zeta \qquad \text{για κάθε } z \in D(z_0; r). \tag{7.24}$$

Αυτό το επιχείρημα το επαναλαμβάνουμε επαγωγικά και καταλήγουμε στο ότι για κάθε n η f είναι n φορές παραγωγίσιμη στον δίσκο $D(z_0; r)$ και ότι ισχύει

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{C(z_0;r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta \qquad \text{για κάθε } z \in D(z_0; r). \tag{7.25}$$

Άρα η f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στον δίσκο $D(z_0; r)$ και, ειδικώτερα, στο σημείο z_0. Επειδή το z_0 είναι τυχόν σημείο του Ω, έχουμε ότι η f άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο Ω. □

Σχόλιο. Μπορούμε τώρα να δικαιολογήσουμε το σχόλιο που κάναμε στο τέλος της ενότητας 5.3. Επίσης, μπορούμε να κλείσουμε το "άνοιγμα" που υπάρχει σε σχέση με την απόδειξη της Πρότασης 5.10. Πράγματι, από την $f = u + iv$ έχουμε ότι

$$f' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Επειδή η f' είναι παραγωγίσιμη, συνεπάγεται ότι οι $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, έχουν μερικές παραγώγους ως προς x, y και, μάλιστα,

$$f'' = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - i\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - i\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

Επίσης, επειδή η f'' είναι συνεχής, έχουμε ότι όλες οι παράγωγοι δεύτερης τάξης των u, v ως προς x, y είναι συνεχείς.
Επαγωγικά, μπορούμε να δούμε ότι οι u, v είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμες ως προς x, y.

ΠΡΟΤΑΣΗ 7.13. [**Οι τύποι του Cauchy για παραγώγους και για κύκλους σε ανοικτά σύνολα**] *Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο ανοικτό σύνολο Ω. Αν* $\mathrm{cl}\, D(z_0; r) \subseteq \Omega$*, τότε για κάθε n έχουμε*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{C(z_0;r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta \qquad \textit{για κάθε } z \in D(z_0; r).$$

Απόδειξη. Η απόδειξη έγινε ήδη μέσα στην απόδειξη του Θεωρήματος 7.2. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 7.14. [**Οι τύποι του Cauchy για παραγώγους σε αστρόμορφα σύνολα**] *Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο ανοικτό και αστρόμορφο σύνολο Ω. Τότε για κάθε κλειστή καμπύλη γ στο Ω και για κάθε n ισχύει*

$$n(\gamma; z)\, f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta \qquad \textit{για κάθε } z \in \Omega \setminus \gamma^*.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε μια κλειστή καμπύλη γ στο Ω και τυχόν σημείο z_0 στο Ω και όχι πάνω στην τροχιά της γ.
Θεωρούμε έναν ανοικτό δίσκο $D(z_0; r)$ ο οποίος να περιέχεται στο Ω και να μην τέμνει την τροχιά γ^* της γ.
Από την Πρόταση 7.11 συνεπάγεται

$$n(\gamma; z)\, f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \qquad \text{για κάθε } z \in D(z_0; r).$$

Ο δίσκος $D(z_0; r)$ είναι *συνεκτικό* σύνολο και, επειδή περιέχεται στο $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, περίεχεται ολόκληρος σε μια *μοναδική* συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$. Από την Πρόταση 7.9 συνεπάγεται ότι ο δείκτης στροφής $n(\gamma; z)$ είναι σταθερός στον δίσκο $D(z_0; r)$, οπότε υπάρχει ακέραιος k, ανεξάρτητος του z στον $D(z_0; r)$, ώστε να είναι

$$k f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \qquad \text{για κάθε } z \in D(z_0; r).$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας το Λήμμα 7.2, επαναλαμβάνουμε τα επιχειρήματα της απόδειξης του Θεωρήματος 7.2 με τα οποία περνάγαμε διαδοχικά από την (7.22) στην (7.23) και μετά στην (7.24) και καταλήγουμε στην αντίστοιχη της (7.25). Έχουμε, δηλαδή,

$$k f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta \qquad \text{για κάθε } z \in D(z_0; r).$$

Αντικαθιστούμε το k με το $n(\gamma; z)$ και έχουμε

$$n(\gamma; z)\, f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta \qquad \text{για κάθε } z \in D(z_0; r).$$

Αυτό ισχύει ειδικώτερα για $z = z_0$, οπότε

$$n(\gamma; z_0)\, f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta.$$

Επειδή το z_0 είναι τυχόν σημείο του $\Omega \setminus \gamma^*$, η απόδειξη έχει τελειώσει. □

Ασκήσεις.

7.4.1. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπολογίστε το

$$\oint_{C(0;1)} \frac{e^z}{z^n}\, dz$$

και κατόπιν υπολογίστε τα πραγματικά ολοκληρώματα

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \sin(n\theta - \sin\theta)\, d\theta, \qquad \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \cos(n\theta - \sin\theta)\, d\theta.$$

7.4.2. Έστω $f(z) = (\frac{1}{z} + \frac{a}{z^3})e^z$ για $z \neq 0$. Βρείτε όλες τις τιμές του a ώστε να είναι $\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$ για κάθε κλειστή καμπύλη γ στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

7.4.3. [α] Υπολογίστε όλες τις δυνατές τιμές του $\oint_\gamma \frac{2z-1}{z^2-z}\,dz$, όπου γ είναι τυχούσα κλειστή καμπύλη στο $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$.
[β] Υπολογίστε όλες τις δυνατές τιμές του $\int_\gamma \frac{2z-1}{z^2-z}\,dz$, όπου γ είναι τυχούσα καμπύλη στο $\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ με αρχικό άκρο $-i$ και τελικό άκρο i.

7.4.4. Χρησιμοποιώντας τους τύπους του Cauchy, υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

$$\oint_{C(0;1)} e^{iz} z^{-2}\,dz, \quad \oint_{C(0;1)} z^{-3}\sin z\,dz, \quad \oint_{C(0;1)} (e^z - e^{-z})z^{-n}\,dz, \quad \oint_{C(0;1)} \Big(z-\frac{1}{2}\Big)^{-n}\,dz,$$

$$\oint_{C(0;r)} \frac{z^2+1}{z(z^2+4)}\,dz \quad \text{με } 0<r<2, \qquad \oint_{C(0;r)} \frac{z^2+1}{z(z^2+4)}\,dz \quad \text{με } 2<r<+\infty.$$

7.5 Το Θεώρημα του Liouville, η Αρχή Μεγίστου, το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας.

ΘΕΩΡΗΜΑ 7.3. [Το Θεώρημα του Liouville] *Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο $\mathbb{C}$. Αν η f είναι φραγμένη στο $\mathbb{C}$, τότε η f είναι σταθερή.*

Απόδειξη. Η f είναι φραγμένη, οπότε υπάρχει $M \geq 0$ ώστε να ισχύει $|f(z)| \leq M$ για κάθε z. Παίρνουμε οποιοδήποτε z και εφαρμόζουμε τον τύπο του Cauchy στην Πρόταση 7.13 με $n = 1$ με τυχόντα κύκλο $C(z;r)$ κέντρου z. Παρατηρήστε ότι στο σύνολο αναλυτικότητας $\mathbb{C}$ της f περιέχεται ο δίσκος $\mathrm{cl}\,D(z;r)$ για οσοδήποτε μεγάλο r. Έχουμε, λοιπόν,

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C(z;r)} \frac{f(\zeta)}{(z-\zeta)^2}\,d\zeta.$$

Έχουμε ότι $\left|\frac{f(\zeta)}{(z-\zeta)^2}\right| = \frac{|f(\zeta)|}{r^2} \leq \frac{M}{r^2}$ για κάθε $\zeta \in C(z;r)$ και άρα

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi}\frac{M}{r^2}\,2\pi r = \frac{M}{r}.$$

Επειδή αυτή η ανισότητα ισχύει για κάθε $r > 0$, συνεπάγεται $|f'(z)| = 0$.
Άρα ισχύει $f'(z) = 0$ για κάθε z και, επομένως, η f είναι σταθερή. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 7.4. [Η Αρχή Μεγίστου] *Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο ανοικτό σύνολο Ω και έστω $M = \sup\{|f(z)| \,|\, z \in \Omega\}$. Αν υπάρχει $z_0 \in \Omega$ έτσι ώστε $|f(z_0)| = M$, τότε η f είναι σταθερή στη συνεκτική συνιστώσα του Ω η οποία περιέχει το z_0.*

Απόδειξη. Έστω $z_0 \in \Omega$ έτσι ώστε $|f(z_0)| = M$ και έστω U η συνεκτική συνιστώσα του Ω η οποία περιέχει το z_0. Το U είναι ανοικτό σύνολο.
Θεωρούμε ανοικτό δίσκο $D(z_0;R) \subseteq U$ και οποιοδήποτε r με $0 < r < R$. Εφαρμόζουμε τον τύπο του Cauchy στην Πρόταση 7.12 με $z = z_0$ και χρησιμοποιούμε την παραμετρική εξίσωση $\zeta = z_0 + re^{it}$ με $0 \leq t \leq 2\pi$ και έχουμε ότι

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C(z_0;r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\,dt. \tag{7.26}$$

Επειδή ισχύει

$$|f(z_0 + re^{it})| \leq M \qquad \text{για κάθε } t \in [0,2\pi] \tag{7.27}$$

συνεπάγεται
$$\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})| \, dt \leq \int_0^{2\pi} M \, dt = 2\pi M. \tag{7.28}$$
Άρα η (7.26) συνεπάγεται
$$M = |f(z_0)| = \Big| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) \, dt \Big| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})| \, dt \leq M. \tag{7.29}$$
Αυτό σημαίνει ότι οι δυο ανισότητες στην (7.29) πρέπει να είναι ισότητες, οπότε η ανισότητα (7.28) πρέπει να είναι ισότητα. Όμως, η (7.28) προέκυψε από την (7.27) και, επειδή οι δυο μεριές της (7.27) είναι συνεχείς συναρτήσεις του t στο $[0, 2\pi]$, συνεπάγεται
$$|f(z_0 + re^{it})| = M \qquad \text{για κάθε } t \in [0, 2\pi].$$
Τώρα θυμόμαστε ότι το r είναι τυχόν στο διάστημα $(0, R)$, οπότε
$$|f(z_0 + re^{it})| = M \qquad \text{για κάθε } t \in [0, 2\pi] \text{ και κάθε } r \in (0, R).$$
Άρα
$$|f(z)| = M \qquad \text{για κάθε } z \in D(z_0; R).$$
Μέχρι στιγμής έχουμε αποδείξει ότι:
Αν ισχύει $|f(z)| = M$ σε κάποιο σημείο $z \in U$, τότε η ισότητα αυτή ισχύει σε κάθε σημείο σε μια περιοχή του z.
Αυτό το αποδείξαμε για το συγκεκριμένο σημείο $z = z_0$, αλλά η μόνη ιδιότητα του z_0 που χρησιμοποιήθηκε ήταν ότι $|f(z_0)| = M$, οπότε ισχύει και για κάθε άλλο σημείο με αυτήν την ιδιότητα.
Κατόπιν θεωρούμε τα εξής υποσύνολα του U.
$$B = \{z \in U \,|\, |f(z)| = M\}, \qquad C = \{z \in U \,|\, |f(z)| < M\}.$$
Είναι σαφές ότι
$$B \cup C = U, \qquad B \cap C = \emptyset.$$
Αν πάρουμε οποιοδήποτε $z \in B$, τότε $|f(z)| = M$, οπότε σύμφωνα με αυτό που αποδείξαμε προηγουμένως, θα ισχύει η ίδια ισότητα σε κάθε σημείο σε μια περιοχή του z, οπότε μια περιοχή του z δεν θα έχει κανένα σημείο του συνόλου C και, επομένως, το z είναι εξωτερικό σημείο του C. Άρα το B δεν περιέχει κανένα οριακό σημείο του C. Απο την άλλη μεριά, αν το C περιείχε κάποιο οριακό σημείο z του B, τότε θα ήταν $|f(z)| < M$ και θα υπήρχε και μια ακολουθία (z_n) στο B ώστε $z_n \to z$. Τότε, όμως, θα ήταν $|f(z_n)| = M$ για κάθε n και, παίρνοντας όριο, θα ήταν $|f(z)| = M$ και θα καταλήγαμε σε άτοπο. Άρα ούτε το C περιέχει οριακό σημείο του B.
Αν, τώρα, τα B και C ήταν και τα δυο μη-κενά, τότε θα αποτελούσαν διάσπαση του U και αυτό είναι αδύνατο διότι το U είναι συνεκτικό. Άρα ένα από τα δυο σύνολα είναι κενό. Επειδή $z_0 \in B$, συνεπάγεται $C = \emptyset$ και άρα
$$|f(z)| = M \qquad \text{για κάθε } z \in U. \tag{7.30}$$
Τέλος, θα αποδείξουμε ότι η f είναι σταθερή στο U γνωρίζοντας ότι το μέτρο της, το $|f|$, είναι σταθερό στο U.
Κατ' αρχάς, αν $M = 0$, τότε είναι προφανές ότι από την $|f| = 0$ συνεπάγεται $f = 0$ στο U. Άρα, αρκεί να θεωρήσουμε την περίπτωση $M > 0$. Γράφουμε
$$f = u + iv,$$
όπου u και v είναι το πραγματικό μέρος και το φανταστικό μέρος της f.
Η (7.30) γράφεται
$$u^2 + v^2 = M^2 \qquad \text{στο } U$$

και, παραγωγίζοντας ως προς x και y ξεχωριστά, έχουμε

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}=0,\quad u\frac{\partial u}{\partial y}+v\frac{\partial v}{\partial y}=0\qquad \text{στο } U.$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (C-R), μετασχηματίζουμε την δεύτερη ισότητα και έχουμε

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}=0,\quad -u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial x}=0\qquad \text{στο } U. \tag{7.31}$$

Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη ισότητα (7.31) με u και την δεύτερη με v και προσθέτοντας, βρίσκουμε

$$(u^2+v^2)\frac{\partial u}{\partial x}=0\qquad \text{στο } U$$

και, επειδή $u^2+v^2=M^2>0$, συνεπάγεται

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0\qquad \text{στο } U.$$

Ομοίως, πολλαπλασιάζοντας την πρώτη ισότητα (7.31) με v και την δεύτερη με $-u$ και προσθέτοντας, βρίσκουμε

$$(u^2+v^2)\frac{\partial v}{\partial x}=0\qquad \text{στο } U$$

και, πάλι επειδή $u^2+v^2=M^2>0$, συνεπάγεται

$$\frac{\partial v}{\partial x}=0\qquad \text{στο } U.$$

Επομένως,

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}(z)+i\frac{\partial v}{\partial x}(z)=0\qquad \text{για κάθε } z\in U.$$

Άρα η f είναι σταθερή στο συνεκτικό U. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 7.5. [Το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας] *Κάθε πολυώνυμο βαθμού ≥ 1 έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\mathbb{C}$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε πολυώνυμο p βαθμού ≥ 1 και υποθέτουμε ότι το πολυώνυμο δεν έχει καμία ρίζα στο $\mathbb{C}$.
Θεωρούμε την συνάρτηση $f=\frac{1}{p}$ η οποία είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$ και αποδεικνύουμε εύκολα ότι είναι φραγμένη στο $\mathbb{C}$. Πράγματι, επειδή $\lim_{z\to\infty}p(z)=\infty$, συνεπάγεται ότι $\lim_{z\to\infty}f(z)=0$, οπότε υπάρχει $R>0$ ώστε να ισχύει $|f(z)|\leq 1$ για κάθε z με $|z|>R$. Η $|f|$ είναι συνεχής στον συμπαγή δίσκο $\mathrm{cl}\,D(0;R)$, οπότε είναι φραγμένη σ'αυτόν τον δίσκο και άρα υπάρχει $M'\geq 0$ ώστε να ισχύει $|f(z)|\leq M'$ για κάθε z με $|z|\leq R$. Θεωρώντας τον αριθμό $M=\max\{M',1\}$, έχουμε ότι ισχύει $|f(z)|\leq M$ για κάθε z και άρα η f είναι φραγμένη.
Τώρα, από το Θεώρημα του Liouville συνεπάγεται ότι η f και, επομένως, και το πολυώνυμο p είναι σταθερή συνάρτηση. Αυτό είναι άτοπο.

Υπάρχει κι ένας δεύτερος τρόπος απόδειξης.

Υποθέτουμε πάλι ότι το πολυώνυμο p δεν έχει καμία ρίζα στο $\mathbb{C}$ και θεωρούμε πάλι την συνάρτηση $f=\frac{1}{p}$ η οποία είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$ και για την οποία ισχύει $\lim_{z\to\infty}f(z)=0$.
Είναι προφανές ότι η $f=\frac{1}{p}$ δεν μηδενίζεται πουθενά στο $\mathbb{C}$. Παίρνουμε, λοιπόν, τυχόντα z_0 και τότε είναι $|f(z_0)|>0$. Επειδή $\lim_{z\to\infty}f(z)=0$, υπάρχει $R>0$ ώστε να ισχύει

$$|f(z)|<|f(z_0)|\qquad \text{για κάθε } z \text{ με } |z|>R. \tag{7.32}$$

Είναι τότε σαφές ότι $|z_0| \leq R$.
Η $|f|$ είναι συνεχής στον συμπαγή δίσκο $\mathrm{cl}\, D(0;R)$, οπότε έχει μέγιστη τιμή σ'αυτόν τον δίσκο και άρα υπάρχει z_1 με $|z_1| \leq R$ ώστε να ισχύει

$$|f(z)| \leq |f(z_1)| \qquad \text{για κάθε } z \text{ με } |z| \leq R. \tag{7.33}$$

Επειδή $|z_0| \leq R$, έχουμε ότι $|f(z_0)| \leq |f(z_1)|$ και από την (7.32) συνεπάγεται ότι ισχύει

$$|f(z)| < |f(z_1)| \qquad \text{για κάθε } z \text{ με } |z| > R.$$

Από την τελευταία σχέση και από την (7.33) έχουμε ότι

$$|f(z)| \leq |f(z_1)| \qquad \text{για κάθε } z,$$

οπότε το z_1 είναι σημείο μεγίστου για την $|f|$ στο ανοικτό και συνεκτικό $\mathbb{C}$. Από την Αρχή Μεγίστου συνεπάγεται ότι η f και άρα και το πολυώνυμο p είναι σταθερή συνάρτηση, οπότε και πάλι καταλήγουμε σε άτοπο. □

Έχοντας αποδείξει ότι ένα πολυώνυμο $p(z)$ έχει μια ρίζα z_1, με αλγεβρικές πράξεις αποδεικνύεται πολύ εύκολα ότι το $z - z_1$ είναι παράγων του πολυωνύμου, δηλαδή ότι υπάρχει πολυώνυμο $p_1(z)$ ώστε να ισχύει $p(z) = (z - z_1)p_1(z)$ για κάθε z. Αν το $p_1(z)$ είναι βαθμού ≥ 1, τότε κι αυτό έχει κάποια ρίζα z_2 και με το ίδιο επιχείρημα έχουμε ότι υπάρχει πολυώνυμο $p_2(z)$ ώστε να ισχύει $p_1(z) = (z - z_2)p_2(z)$ και, επομένως, $p(z) = (z - z_1)(z - z_2)p_2(z)$ για κάθε z. Συνεχίζοντας επαγωγικά, καταλήγουμε στο ότι, αν $n \geq 1$ είναι ο βαθμός του αρχικού πολυωνύμου $p(z)$, υπάρχουν $z_1, \ldots, z_n$ ώστε να ισχύει

$$p(z) = c(z - z_1) \cdots (z - z_n) \qquad \text{για κάθε } z$$

όπου c είναι μια σταθερά. Είναι προφανές ότι το c είναι ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου του $p(z)$.
Έτσι, λοιπόν, αποδεικνύεται ότι:
Κάθε πολυώνυμο $p(z)$ βαθμού $n \geq 1$ έχει n ρίζες στο $\mathbb{C}$.

Ασκήσεις.

7.5.1. Έστω $f : U \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο ανοικτό και συνεκτικό σύνολο U. Μιμούμενοι τα επιχειρήματα στο τέλος της απόδειξης του Θεωρήματος 7.4, αποδείξτε τα παρακάτω.

[α] Αν η f έχει σταθερό πραγματικό μέρος στο U, τότε είναι σταθερή στο U.

[β] Αν η f έχει σταθερό φανταστικό μέρος στο U, τότε είναι σταθερή στο U.

[γ] Αν l είναι μια ευθεία και ισχύει $f(z) \in l$ για κάθε $z \in U$, τότε η f είναι σταθερή στο U.

7.5.2. Αποδείξτε την **Αρχή Ελαχίστου**.
Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο ανοικτό σύνολο Ω και έστω $m = \inf\{|f(z)| \,|\, z \in \Omega\}$. Αν υπάρχει $z_0 \in \Omega$ έτσι ώστε $|f(z_0)| = m$, τότε είτε $m = 0$ (οπότε $f(z_0) = 0$) είτε $m > 0$ και η f είναι σταθερή στη συνεκτική συνιστώσα του Ω η οποία περιέχει το z_0.

7.5.3. Έστω ανοικτό, συνεκτικό και φραγμένο σύνολο U και $f : \mathrm{cl}\, U \to \mathbb{C}$ η οποία είναι συνεχής στο $\mathrm{cl}\, U$ και αναλυτική στο U και έστω $M = \sup\{|f(z)| \,|\, z \in U\}$ και $N = \sup\{|f(z)| \,|\, z \in \mathrm{cl}\, U\}$. Προφανώς, $0 \leq M \leq N$.

[α] Αποδείξτε ότι υπάρχει $z_0 \in \mathrm{cl}\, U$ ώστε $|f(z_0)| = N$.

[β] Αποδείξτε ότι $M = N$.

[γ] Αν η f δεν είναι σταθερή στο U, αποδείξτε ότι ισχύει $|f(z)| < M$ για κάθε $z \in U$, οπότε όποια σημεία $z \in \mathrm{cl}\, U$ ικανοποιούν την $|f(z)| = M$ ανήκουν στο $\mathrm{bd}\, U$.

[δ] Αν η f είναι σταθερή στο U, αποδείξτε ότι είναι σταθερή και στο $\mathrm{cl}\, U$.

[ε] Σε κάθε περίπτωση, αποδείξτε ότι η μέγιστη τιμή της $|f|$ στο $\mathrm{cl}\, U$ πιάνεται στο $\mathrm{bd}\, U$.

7.5.4. Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο ανοικτό σύνολο Ω και έστω $K = \sup\{\operatorname{Re} f(z) \,|\, z \in \Omega\}$. Αν υπάρχει $z_0 \in \Omega$ ώστε $\operatorname{Re} f(z_0) = K$, αποδείξτε (χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση e^f) ότι η f είναι σταθερή στη συνεκτική συνιστώσα του Ω η οποία περιέχει το z_0.

7.5.5. Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο ανοικτό σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ και έστω ότι $\lim_{z\to\zeta} f(z) = 0$ για κάθε $\zeta \in \operatorname{bd}\Omega$. (Αν το Ω δεν είναι φραγμένο, τότε ένα από τα $\zeta \in \operatorname{bd}\Omega$ είναι το ∞.) Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή 0 στο Ω.

7.5.6. Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο $\mathbb{C}$ και έστω ότι υπάρχουν σταθεροί αριθμοί A, M και φυσικός n ώστε να ισχύει $|f(z)| \leq A + M|z|^n$ για κάθε z. Ακολουθώντας τη μέθοδο της απόδειξης του Θεωρήματος του Liouville, αποδείξτε ότι ισχύει $f^{(n+1)}(z) = 0$ για κάθε z και, τέλος, ότι η f είναι πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $\leq n$.

7.6 Το Θεώρημα του Morera και η αναλυτικότητα μιας συνάρτησης.

Από την Πρόταση 7.6 παίρνουμε το εξής πόρισμα:

Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ συνεχής στο ανοικτό σύνολο Ω. Αν ισχύει $\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$ για κάθε κλειστή καμπύλη γ στο Ω, τότε η f είναι αναλυτική στο Ω.

Πράγματι, τότε η f έχει παράγουσα, έστω F, στο Ω, δηλαδή ισχύει $f = F'$ στο Ω. Τότε η F είναι αναλυτική στο Ω και άρα η F είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο Ω. Επειδή $f = F'$ στο Ω, έχουμε ότι και η f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο Ω και, ειδικώτερα, η f είναι αναλυτική στο Ω.

Το Θεώρημα του Morera έχει ασθενέστερες υποθέσεις από το πόρισμα που είδαμε μόλις τώρα αλλά το ίδιο συμπέρασμα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 7.6. [**Το Θεώρημα του Morera**] *Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ συνεχής στο ανοικτό σύνολο Ω. Αν ισχύει $\oint_{\operatorname{bd}\Delta} f(z)\,dz = 0$ για κάθε τρίγωνο Δ το οποίο περιέχεται στο Ω, τότε η f είναι αναλυτική στο Ω.*

Απόδειξη. Έστω τυχόν $z_0 \in \Omega$. Επειδή το Ω είναι ανοικτό, υπάρχει δίσκος $D = D(z_0; r) \subseteq \Omega$. Ο δίσκος D είναι ανοικτό και αστρόμορφο (και μάλιστα κυρτό) σύνολο με κέντρο το z_0. Τώρα ορίζουμε τη συνάρτηση $F : D \to \mathbb{C}$ με τύπο

$$F(z) = \int_{[z_0,z]} f(\zeta)\,d\zeta \qquad \text{για κάθε } z \in D.$$

Παρατηρήστε ότι αυτή η F είναι η ίδια με την F που ορίστηκε με τον τύπο (7.8) στην Πρόταση 7.4. Τον ρόλο του ανοικτού, αστρόμορφου Ω της Πρότασης 7.4 τον παίζει τώρα ο δίσκος D. Κατόπιν, δεν κάνουμε τίποτε άλλο από το να επαναλάβουμε την απόδειξη της Πρότασης 7.4, χρησιμοποιώντας το ότι ισχύει $\oint_{\operatorname{bd}\Delta} f(z)\,dz = 0$ για κάθε τρίγωνο Δ το οποίο περιέχεται στο D (αφού ισχύει για κάθε τρίγωνο Δ το οποίο περιέχεται στο τωρινό Ω). Η κατάληξη είναι ότι ισχύει $F'(z) = f(z)$ για κάθε $z \in D$.

Επομένως, η F είναι αναλυτική στον ανοικτό δίσκο D και άρα η F είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο D. Επειδή $f = F'$ στο D, έχουμε ότι και η f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο D. Ειδικώτερα, η f είναι αναλυτική στο D.

Άρα η f είναι αναλυτική στο σημείο z_0 και, επειδή, το z_0 είναι τυχόν σημείο του Ω, η f είναι αναλυτική στο Ω. $\square$

Τώρα, από την Πρόταση 7.4 έχουμε το εξής πόρισμα, στο οποίο δεν χρειάζεται να υποθέσουμε την αστρομορφία του Ω:

Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο ανοικτό σύνολο Ω εκτός από κάποια σημεία του Ω στα οποία η f είναι απλώς συνεχής. Αν τα σημεία του Ω στα οποία υποθέτουμε ότι η f είναι απλώς συνεχής δεν έχουν κανένα σημείο συσσώρευσης στο Ω, τότε η f είναι αναλυτική στο Ω.

Η απόδειξη έχει ως εξής. Κατ' αρχάς έστω A το σύνολο των σημείων του Ω στα οποία υποθέτουμε ότι η f είναι απλώς συνεχής. Θεωρούμε τυχόν $z_0 \in \Omega$ και κάποιον δίσκο $D = D(z_0; r) \subseteq \Omega$, στον οποίο να μην περιέχεται κανένα σημείο του A, εκτός ίσως από το ίδιο το z_0. Αυτό είναι εφικτό, αν το r είναι αρκετά μικρό, επειδή το z_0 δεν μπορεί να είναι σημείο συσσώρευσης του A. Τώρα παρατηρούμε ότι ο δίσκος D είναι ανοικτό και αστρόμορφο σύνολο και η f είναι αναλυτική στο D εκτός ίσως από το z_0 στο οποίο είναι συνεχής. Από την Πρόταση 7.4 συνεπάγεται ότι η f είναι αναλυτική στο D. Άρα η f είναι αναλυτική στο σημείο z_0 και, επειδή, το z_0 είναι τυχόν σημείο του Ω, η f είναι αναλυτική στο Ω.

Τώρα, με την βοήθεια του Θεωρήματος του Morera, θα αποδείξουμε ένα παρόμοιο αποτέλεσμα αλλά τώρα τα σημεία στα οποία υποθέτουμε ότι η f είναι απλώς συνεχής σχηματίζουν ολόκληρη γραμμή μέσα στο Ω.

ΠΡΟΤΑΣΗ 7.15. *Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ και ευθεία l στο $\mathbb{C}$. Υποθέτουμε ότι η f είναι αναλυτική στα σημεία του Ω τα οποία δεν ανήκουν στην l και συνεχής στα σημεία του Ω τα οποία ανήκουν στην l. (Δηλαδή η f είναι συνεχής στο Ω και αναλυτική στο $\Omega \setminus l$.) Τότε η f είναι αναλυτική στο Ω.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τυχόν τρίγωνο Δ το οποίο περιέχεται στο Ω και διακρίνουμε περιπτώσεις ως προς την θέση του Δ σε σχέση με την ευθεία l. Η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη της Πρότασης 7.3.

Περίπτωση 1. Αν το τρίγωνο Δ δεν τέμνει την l, τότε $\Delta \subseteq \Omega \setminus l$ και, επειδή το $\Omega \setminus l$ είναι ανοικτό, από το Θεώρημα του Cauchy έχουμε ότι $\oint_{\mathrm{bd}\,\Delta} f(z)\,dz = 0$.

Περίπτωση 2. Υποθέτουμε ότι το Δ έχει μοναδικό κοινό σημείο με την l μία από τις κορυφές του: έστω $\Delta = \Delta(z_0, z_1, z_2)$ και $z_0 \in l$.

Τώρα επαναλαμβάνουμε αυτολεξεί την περίπτωση 2 της απόδειξης της Πρότασης 7.3 και βλέπουμε ότι και πάλι ισχύει $\oint_{\mathrm{bd}\,\Delta} f(z)\,dz = 0$.

Περίπτωση 3. Υποθέτουμε ότι το Δ έχει μόνο μια πλευρά του πάνω στην ευθεία l: έστω $\Delta = \Delta(z_0, z_1, z_2)$ και $[z_1, z_2] \subseteq l$.

Έστω τυχόν $\epsilon > 0$.

Επειδή η $|f|$ είναι συνεχής στο συμπαγές Δ, είναι φραγμένη στο Δ, οπότε υπάρχει $M \geq 0$ ώστε

$$|f(z)| \leq M \qquad \text{για } z \in \Delta. \tag{7.34}$$

Επίσης, η f είναι συνεχής στο συμπαγές Δ και άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής στο Δ, οπότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει

$$|f(z') - f(z'')| < \epsilon \qquad \text{για } z', z'' \in \Delta \text{ με } |z' - z''| < \delta. \tag{7.35}$$

Είναι σαφές ότι, μικραίνοντας αν χρειάζεται το δ, μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$\delta \leq \epsilon. \tag{7.36}$$

Τώρα θεωρούμε δυο σημεία w_1, w_2 στα ευθ. τμήματα $[z_0, z_1]$, $[z_0, z_2]$, αντιστοίχως, έτσι ώστε

$$|w_1 - z_1| < \delta, \quad |w_2 - z_2| < \delta. \tag{7.37}$$

Τότε συνεπάγεται

$$\Big|\int_{[w_1,z_1]} f(z)\,dz\Big| \leq M|w_1 - z_1| < M\delta, \quad \Big|\int_{[w_2,z_2]} f(z)\,dz\Big| \leq M|w_2 - z_2| < M\delta. \tag{7.38}$$

Επίσης, για κάθε $t \in [0,1]$ έχουμε ότι τα σημεία $(1-t)z_1 + tz_2$ και $(1-t)w_1 + tw_2$ ανήκουν στα ευθύγραμμα τμήματα $[z_1, z_2]$ και $[w_1, w_2]$, αντιστοίχως, και άρα ανήκουν στο Δ και, λόγω της (7.37), ικανοποιούν την

$$\begin{aligned}\big|\big((1-t)w_1 + tw_2\big) - \big((1-t)z_1 + tz_2\big)\big| &= |(1-t)(w_1 - z_1) + t(w_2 - z_2)| \\ &\leq (1-t)|w_1 - z_1| + t|w_2 - z_2| < (1-t)\delta + t\delta = \delta,\end{aligned}$$

οπότε από την (7.35) συνεπάγεται

$$\big|f((1-t)w_1+tw_2)-f((1-t)z_1+tz_2)\big|<\epsilon. \tag{7.39}$$

Από τις (7.34), (7.37) και (7.39) συνεπάγεται

$$\begin{aligned}
\Big|\int_{[w_1,w_2]} f(z)\,dz - \int_{[z_1,z_2]} f(z)\,dz\Big| &= \Big|(w_2-w_1)\int_0^1 f((1-t)w_1+tw_2)\,dt \\
&\quad - (z_2-z_1)\int_0^1 f((1-t)z_1+tz_2)\,dt\Big| \\
&= \Big|(w_2-w_1)\int_0^1 f((1-t)w_1+tw_2)\,dt \\
&\quad - (w_2-w_1)\int_0^1 f((1-t)z_1+tz_2)\,dt \\
&\quad + (w_2-w_1)\int_0^1 f((1-t)z_1+tz_2)\,dt \\
&\quad - (z_2-z_1)\int_0^1 f((1-t)z_1+tz_2)\,dt\Big| \\
&\le |w_2-w_1|\int_0^1 \big|f((1-t)w_1+tw_2)-f((1-t)z_1+tz_2)\big|\,dt \\
&\quad + |(w_2-w_1)-(z_2-z_1)|\int_0^1 |f((1-t)z_1+tz_2)|\,dt \\
&\le |z_2-z_1|\int_0^1 \epsilon\,dt + (|w_2-z_2|+|w_1-z_1|)\int_0^1 M\,dt \\
&\le |z_2-z_1|\epsilon + 2M\delta.
\end{aligned} \tag{7.40}$$

Τώρα, εκτός από το $\Delta = \Delta(z_0,z_1,z_2)$ θεωρούμε και το τρίγωνο $\Delta_0 = \Delta(z_0,w_1,w_2)$ και τα ευθύγραμμα τμήματα $[w_1,w_2],[z_1,z_2],[w_1,z_1],[w_2,z_2]$. Το Δ_0 δεν τέμνει την ευθεία l, οπότε $\oint_{\mathrm{bd}\,\Delta_0} f(z)\,dz = 0$ και άρα

$$\begin{aligned}
\Big|\oint_{\mathrm{bd}\,\Delta} f(z)\,dz\Big| &= \Big|\oint_{\mathrm{bd}\,\Delta_0} f(z)\,dz \\
&\quad + \int_{[w_1,z_1]} f(z)\,dz + \int_{[z_1,z_2]} f(z)\,dz - \int_{[w_2,z_2]} f(z)\,dz - \int_{[w_1,w_2]} f(z)\,dz\Big| \\
&\le \Big|\int_{[w_1,z_1]} f(z)\,dz\Big| + \Big|\int_{[w_2,z_2]} f(z)\,dz\Big| + \Big|\int_{[w_1,w_2]} f(z)\,d\zeta - \int_{[z_1,z_2]} f(z)\,dz\Big| \\
&\le M\delta + M\delta + |z_2-z_1|\epsilon + 2M\delta = 4M\delta + |z_2-z_1|\epsilon
\end{aligned}$$

Άρα, βάσει της (7.36), έχουμε ότι

$$\Big|\oint_{\mathrm{bd}\,\Delta} f(z)\,dz\Big| \le (4M+|z_2-z_1|)\epsilon.$$

Επειδή αυτό ισχύει για τυχόν $\epsilon > 0$, συνεπάγεται ότι $\oint_{\mathrm{bd}\,\Delta} f(z)\,dz = 0$.

Περίπτωση 4. Τέλος, η ευθεία l μπορεί να τέμνει το εσωτερικό του τριγώνου Δ.

Σ' αυτήν την περίπτωση μπορούμε να χωρίσουμε το Δ σε δύο ή τρία τρίγωνα καθένα από τα οποία έχει είτε μόνο μία κορυφή του κοινή με την l είτε μόνο μία πλευρά του κοινή με την l. Από τις δύο προηγούμενες περιπτώσεις έχουμε ότι τα επικαμπύλια ολοκληρώματα της f σ' αυτά τα μικρότερα τρίγωνα μηδενίζονται, οπότε πάλι καταλήγουμε στο ότι $\oint_{\mathrm{bd}\,\Delta} f(z)\,dz = 0$. Συμπληρώστε εσείς τις λεπτομέρειες.

Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι ισχύει $\oint_{\mathrm{bd}\,\Delta} f(z)\,dz = 0$ για κάθε τρίγωνο Δ το οποίο περιέχεται στο Ω και από το Θεώρημα του Morera συμπεραίνουμε ότι η f είναι αναλυτική στο Ω. □

Ασκήσεις.

7.6.1. Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ και κύκλος $C = C(z_0; r)$ στο $\mathbb{C}$. Υποθέτουμε ότι η f είναι αναλυτική στα σημεία του Ω τα οποία δεν ανήκουν στον C και συνεχής στα σημεία του Ω τα οποία ανήκουν στον C. Αποδείξτε ότι η f είναι αναλυτική στο Ω.

Κεφάλαιο 8

Σειρές Taylor και Laurent.

8.1 Γενικά για σειρές μιγαδικών αριθμών.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Για κάθε ακολουθία (z_n) μιγαδικών αριθμών θεωρούμε την παράσταση*

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots \qquad \textit{ή} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} z_n$$

και την ονομάζουμε **σειρά** *των z_n. Μια σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ ονομάζεται και* **σειρά μιγαδικών αριθμών** *ή, απλώς,* **μιγαδική σειρά**. *Αν ισχύει $z_n \in \mathbb{R}$ για κάθε n, τότε η $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ ονομάζεται* **σειρά πραγματικών αριθμών** *ή, απλώς,* **πραγματική σειρά**.
Οι $s_n = z_1 + \cdots + z_n$ ονομάζονται **μερικά αθροίσματα** *της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$.*
Λέμε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ **συγκλίνει** *αν η ακολουθία (s_n) συγκλίνει και τότε το όριο s της (s_n) ονομάζεται* **άθροισμα** *της σειράς και γράφουμε*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = s.$$

Λέμε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ **αποκλίνει** *αν η ακολουθία (s_n) αποκλίνει. Αν η (s_n) αποκλίνει στο ∞, τότε λέμε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$* **αποκλίνει στο** ∞ *και ότι το ∞ είναι το* **άθροισμα** *της σειράς και γράφουμε*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = \infty.$$

Προσέξτε. *Μια μιγαδική σειρά μπορεί να έχει άθροισμα ∞. Μόνο μια πραγματική σειρά μπορεί να έχει άθροισμα $+\infty$ ή $-\infty$.* Δηλαδή, όταν γράφουμε $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = +\infty$ ή $-\infty$, εννοούμε ότι ισχύει $z_n \in \mathbb{R}$ για κάθε n και ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ ως πραγματική σειρά αποκλίνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$. Φυσικά, αν μια πραγματική σειρά αποκλίνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$, τότε ως μιγαδική σειρά αποκλίνει στο ∞.

Παράδειγμα 8.1.1. Είναι $\sum_{n=1}^{+\infty} c = \begin{cases} 0, & \text{αν } c = 0 \\ \infty, & \text{αν } c \neq 0 \end{cases}$

Παράδειγμα 8.1.2. Η **γεωμετρική σειρά** $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$. Για το άθροισμα της γεωμετρικής σειράς θα δούμε ότι

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n \begin{cases} = \frac{1}{1-z}, & \text{αν } |z| < 1 \\ = \infty, & \text{αν } |z| > 1 \text{ ή } z = 1 \\ \text{δεν υπάρχει}, & \text{αν } |z| = 1,\ z \neq 1 \end{cases}$$

Αν $z = 1$, τότε η σειρά είναι η $\sum_{n=0}^{+\infty} 1$ και έχει άθροισμα ∞.
Αν $z \neq 1$, τότε $s_n = 1 + z + \cdots + z^n = \frac{z^{n+1}-1}{z-1}$ και το αποτέλεσμα προκύπτει από τα συμπεράσματα

για το όριο γεωμετρικής προόδου.
Παρατηρήστε ότι, αν $z < -1$ (οπότε $z \in \mathbb{R}$), τότε η $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ ως μιγαδική σειρά αποκλίνει στο ∞, αλλά ως πραγματική σειρά δεν αποκλίνει σε κανένα από τα $\pm\infty$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 8.1. *Έστω $z_n = x_n + iy_n$ για κάθε n. Τότε η μιγαδική σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν οι πραγματικές σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνουν και σ' αυτήν την περίπτωση είναι*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n + i \sum_{n=1}^{+\infty} y_n.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα $u_n = x_1 + \cdots + x_n$, $v_n = y_1 + \cdots + y_n$ και $s_n = z_1 + \cdots + z_n$ και εύκολα βλέπουμε ότι ισχύει

$$s_n = u_n + iv_n \qquad \text{για κάθε } n.$$

Τώρα, η $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η (s_n) συγκλίνει αν και μόνο αν οι (u_n), (v_n) συγκλίνουν αν και μόνο αν οι $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνουν. Επίσης

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} u_n + i \lim_{n\to+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n + i \sum_{n=1}^{+\infty} y_n.$$

□

Δηλαδή,

$$\mathrm{Re} \sum_{n=1}^{+\infty} z_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{Re}\, z_n, \qquad \mathrm{Im} \sum_{n=1}^{+\infty} z_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{Im}\, z_n.$$

Μέσω της Πρότασης 8.1 μπορούμε να αποδείξουμε διάφορα αποτελέσματα για μιγαδικές σειρές ανάγοντάς τα σε ανάλογα αποτελέσματα για πραγματικές σειρές.

ΠΡΟΤΑΣΗ 8.2. *Αν η $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ συγκλίνει, τότε $z_n \to 0$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα $s_n = z_1 + \cdots + z_n$. Αν s είναι το άθροισμα (μιγαδικός αριθμός) της $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$, τότε

$$z_n = s_n - s_{n-1} \to s - s = 0.$$

□

ΠΡΟΤΑΣΗ 8.3. [α] *Αν οι $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} w_n$ έχουν άθροισμα και το $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n + \sum_{n=1}^{+\infty} w_n$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε και η $\sum_{n=1}^{+\infty}(z_n + w_n)$ έχει άθροισμα και*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(z_n + w_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} z_n + \sum_{n=1}^{+\infty} w_n.$$

[β] *Αν η $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ έχει άθροισμα και το $\lambda \sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε και η $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda z_n$ έχει άθροισμα και*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda z_n = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} z_n.$$

[γ] *Αν η $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ έχει άθροισμα, τότε και η $\sum_{n=1}^{+\infty} \overline{z_n}$ έχει άθροισμα και*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \overline{z_n} = \overline{\sum_{n=1}^{+\infty} z_n}.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα $s_n = z_1 + \cdots + z_n$, $t_n = w_1 + \cdots + w_n$, $p_n = (z_1 + w_1) + \cdots + (z_n + w_n)$, $q_n = \lambda z_1 + \cdots + \lambda z_n$ και $r_n = \overline{z_1} + \cdots + \overline{z_n}$.
[α] Ισχύει $p_n = s_n + t_n$ για κάθε n, οπότε

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(z_n + w_n) = \lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty} s_n + \lim_{n\to+\infty} t_n = \sum_{n=1}^{+\infty} z_n + \sum_{n=1}^{+\infty} w_n.$$

[β] Ισχύει $q_n = \lambda s_n$ για κάθε n, οπότε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda z_n = \lim_{n\to+\infty} q_n = \lambda \lim_{n\to+\infty} s_n = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} z_n.$$

[γ] Ισχύει $r_n = \overline{s_n}$ για κάθε n, οπότε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \overline{z_n} = \lim_{n\to+\infty} r_n = \overline{\lim_{n\to+\infty} s_n} = \overline{\sum_{n=1}^{+\infty} z_n}.$$

□

Όσον αφορά στα *θεωρήματα σύγκρισης σειρών*, επειδή αυτά βασίζονται στις ιδιότητες των ανισοτικών σχέσεων που, όπως είδαμε, ισχύουν μόνο για πραγματικούς αριθμούς, μπορούμε να πούμε τα εξής. Όταν γράφουμε $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} w_n$ ως συνέπεια των $z_n \leq w_n$, εννοούμε ότι *οι z_n, w_n είναι όλοι πραγματικοί αριθμοί και ότι, απλώς, εφαρμόζουμε τα γνωστά θεωρήματα σύγκρισης για πραγματικές σειρές.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 8.1. [Το κριτήριο του Cauchy] *Η $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει*

$$\Big|\sum_{k=m+1}^{n} z_k\Big| = |z_{m+1} + \cdots + z_n| < \epsilon$$

για κάθε m, n με $n > m \geq n_0$.

Απόδειξη. Θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα $s_n = z_1 + \cdots + z_n$.
Η $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η (s_n) συγκλίνει ή, ισοδύναμα, αν και μόνο αν η (s_n) είναι ακολουθία Cauchy. Το ότι η (s_n) είναι ακολουθία Cauchy σημαίνει ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε

$$|z_{m+1} + \cdots + z_n| = |(z_1 + \cdots + z_n) - (z_1 + \cdots + z_m)| = |s_n - s_m| < \epsilon$$

για κάθε n, m με $n > m \geq n_0$. □

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Λέμε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$* **συγκλίνει απολύτως** *αν η $\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|$ συγκλίνει ή, ισοδύναμα, αν $\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n| < +\infty$.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 8.2. [Κριτήριο απόλυτης σύγκλισης] *Αν η $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ συγκλίνει απολύτως, τότε συγκλίνει και*

$$\Big|\sum_{n=1}^{+\infty} z_n\Big| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|.$$

Απόδειξη. Έστω ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|$ συγκλίνει. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε, από το κριτήριο του Cauchy, υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $|z_{m+1}| + \cdots + |z_n| < \epsilon$ και, επομένως,

$$|z_{m+1} + \cdots + z_n| \leq |z_{m+1}| + \cdots + |z_n| < \epsilon$$

για κάθε m, n με $n > m \geq n_0$. Άρα, πάλι από το κριτήριο του Cauchy, η $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ συγκλίνει.
Τώρα θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα $s_n = z_1 + \cdots + z_n$ και $S_n = |z_1| + \cdots + |z_n|$. Ισχύει $|s_n| \leq S_n$ για κάθε n και, επομένως,

$$\Big|\sum_{n=1}^{+\infty} z_n\Big| = |\lim_{n\to+\infty} s_n| = \lim_{n\to+\infty} |s_n| \leq \lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|.$$

□

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Λέμε ότι η* $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ **συγκλίνει υπό συνθήκη** *αν συγκλίνει αλλά δε συγκλίνει απολύτως.*

ΛΗΜΜΑ 8.1. [**Άθροιση κατά μέρη (Abel)**] *Έστω ακολουθίες* (a_n), (z_n) *και τα μερικά αθροίσματα* $s_n = z_1 + \cdots + z_n$. *Για κάθε* n, m *με* $n > m$ *ισχύει*

$$\sum_{k=m+1}^{n} a_k z_k = \sum_{k=m+1}^{n} (a_k - a_{k+1}) s_k + a_{n+1} s_n - a_{m+1} s_m. \tag{8.1}$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m+1}^{n} a_k z_k &= \sum_{k=m+1}^{n} a_k (s_k - s_{k-1}) = \sum_{k=m+1}^{n} a_k s_k - \sum_{k=m+1}^{n} a_k s_{k-1} \\
&= \sum_{k=m+1}^{n} a_k s_k - \sum_{k=m}^{n-1} a_{k+1} s_k \\
&= \sum_{k=m+1}^{n} a_k s_k - \sum_{k=m+1}^{n} a_{k+1} s_k + a_{n+1} s_n - a_{m+1} s_m \\
&= \sum_{k=m+1}^{n} (a_k - a_{k+1}) s_k + a_{n+1} s_n - a_{m+1} s_m.
\end{aligned}$$

□

ΘΕΩΡΗΜΑ 8.3. *Έστω ακολουθίες* (a_n), (z_n) *και τα μερικά αθροίσματα* $s_n = z_1 + \cdots + z_n$. *Έστω, επίσης, ότι η* (a_n) *είναι πραγματική ακολουθία.*
[α] [**Κριτήριο του Dirichlet**] *Έστω ότι η* (a_n) *είναι φθίνουσα, ότι* $a_n \to 0$ *και ότι η* (s_n) *είναι φραγμένη. Τότε η* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z_n$ *συγκλίνει.*
[α] [**Κριτήριο του Abel**] *Έστω ότι η* (a_n) *είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη και ότι η* (s_n) *συγκλίνει (ή, ισοδύναμα, ότι η* $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ *συγκλίνει). Τότε η* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z_n$ *συγκλίνει.*

Απόδειξη. [α] Υπάρχει M ώστε να ισχύει $|s_n| \leq M$ για κάθε n. Επίσης, επειδή η (a_n) είναι φθίνουσα και έχει όριο 0, ισχύει $a_n \geq 0$ για κάθε n.
Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $a_n \leq \frac{\epsilon}{2M+1}$ για κάθε $n \geq n_0$. Τότε, λογω της (8.1), για κάθε n, m με $n > m \geq n_0$ ισχύει

$$\begin{aligned}
\Big|\sum_{k=m+1}^{n} a_k z_k\Big| &= \Big|\sum_{k=m+1}^{n} (a_k - a_{k+1}) s_k + a_{n+1} s_n - a_{m+1} s_m\Big| \\
&\leq \sum_{k=m+1}^{n} (a_k - a_{k+1}) |s_k| + a_{n+1} |s_n| + a_{m+1} |s_m| \\
&\leq M \sum_{k=m+1}^{n} (a_k - a_{k+1}) + M a_{n+1} + M a_{m+1} \\
&= M(a_{m+1} - a_{n+1}) + M a_{n+1} + M a_{m+1} \\
&= 2M a_{m+1} \leq \frac{2M\epsilon}{2M+1} < \epsilon.
\end{aligned}$$

Άρα, από το κριτήριο του Cauchy, η $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z_n$ συγκλίνει.
[β] Το $a = \lim_{n\to+\infty} a_n$ υπάρχει και είναι αριθμός. Τότε η ακολουθία $(a_n - a)$ είναι φθίνουσα και έχει όριο 0, οπότε, βάσει του [α], η $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n - a)z_n$ συγκλίνει. Ισχύει

$$a_n z_n = (a_n - a)z_n + a z_n$$

για κάθε n, οπότε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z_n = \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n - a)z_n + \sum_{n=1}^{+\infty} a z_n = \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n - a)z_n + a\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$$

και η $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z_n$ συγκλίνει. □

Παράδειγμα 8.1.3. Αν η (a_n) είναι πραγματική και φθίνουσα και $a_n \to 0$ και αν $|z| \le 1$, $z \ne 1$, τότε η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$ συγκλίνει.
Πράγματι, θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα $s_n = 1 + z + \cdots + z^n$ και τότε, αν $|z| \le 1$, $z \ne 1$, έχουμε

$$|s_n| = \Big|\frac{z^{n+1} - 1}{z - 1}\Big| \le \frac{|z|^{n+1} + 1}{|z - 1|} \le \frac{2}{|z - 1|} \qquad \text{για κάθε } n.$$

Άρα η (s_n) είναι φραγμένη και, σύμφωνα με το κριτήριο του Dirichlet, η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ συγκλίνει.

ΠΡΟΤΑΣΗ 8.4. [**Κριτήριο λόγου του d' Alembert**] *Έστω ότι ισχύει $z_n \ne 0$ για κάθε n.*
[α] *Αν $\overline{\lim}\,\big|\frac{z_{n+1}}{z_n}\big| < 1$, τότε η $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ συγκλίνει απολύτως.*
[β] *Αν $\underline{\lim}\,\big|\frac{z_{n+1}}{z_n}\big| > 1$, τότε η $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ αποκλίνει.*
[γ] *Αν $\underline{\lim}\,\big|\frac{z_{n+1}}{z_n}\big| \le 1 \le \overline{\lim}\,\big|\frac{z_{n+1}}{z_n}\big|$, τότε δεν υπάρχει γενικό συμπέρασμα.*

Απόδειξη. [α] Θεωρούμε a ώστε $\overline{\lim}\,\big|\frac{z_{n+1}}{z_n}\big| < a < 1$.
Τότε υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $\big|\frac{z_{n+1}}{z_n}\big| \le a$ για κάθε $n \ge n_0$, οπότε για κάθε $n \ge n_0 + 1$ ισχύει

$$|z_n| = \Big|\frac{z_n}{z_{n-1}}\Big|\Big|\frac{z_{n-1}}{z_{n-2}}\Big|\cdots\Big|\frac{z_{n_0+1}}{z_{n_0}}\Big||z_{n_0}| \le a^{n-n_0}|z_{n_0}| = c\,a^n,$$

όπου $c = |z_{n_0}|/a^{n_0}$.
Επειδή $0 \le a < 1$, η $\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} a^n$ και, επομένως, η $\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} |z_n|$ συγκλίνει. Άρα η $\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|$ συγκλίνει.
[β] Υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $\big|\frac{z_{n+1}}{z_n}\big| \ge 1$ για κάθε $n \ge n_0$, οπότε για κάθε $n \ge n_0 + 1$ ισχύει

$$|z_n| \ge |z_{n-1}| \ge \cdots \ge |z_{n_0}| > 0.$$

Άρα, δεν ισχύει $z_n \to 0$ και, επομένως, η $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ δεν συγκλίνει.
[γ] Η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ δεν συγκλίνει και ισχύει $\big|\frac{1/(n+1)}{1/n}\big| \to 1$, οπότε $\underline{\lim}\,\big|\frac{1/(n+1)}{1/n}\big| = \overline{\lim}\,\big|\frac{1/(n+1)}{1/n}\big| = 1$.
Ομοίως, η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει και ισχύει $\big|\frac{1/(n+1)^2}{1/n^2}\big| \to 1$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 8.5. [**Κριτήριο ρίζας του Cauchy**]
[α] *Αν $\overline{\lim}\,\sqrt[n]{|z_n|} < 1$, τότε η $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ συγκλίνει απολύτως.*
[β] *Αν $\overline{\lim}\,\sqrt[n]{|z_n|} > 1$, τότε η $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ αποκλίνει.*
[γ] *Αν $\overline{\lim}\,\sqrt[n]{|z_n|} = 1$, τότε δεν υπάρχει γενικό συμπέρασμα.*

Απόδειξη. [α] Θεωρούμε a ώστε $\overline{\lim}\,\sqrt[n]{|z_n|} < a < 1$.
Τότε υπάρχει n_0 ώστε για κάθε $n \ge n_0$ να ισχύει $\sqrt[n]{|z_n|} \le a$ και, επομένως,

$$|z_n| \le a^n.$$

Επειδή $0 \le a < 1$, η $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a^n$ συγκλίνει, οπότε και η $\sum_{n=n_0}^{+\infty} |z_n|$ συγκλίνει. Άρα η $\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|$ συγκλίνει.

[β] Ισχύει $\sqrt[n]{|z_n|} \ge 1$ για άπειρους n. Άρα ισχύει $|z_n| \ge 1$ για άπειρους n, οπότε δεν ισχύει $z_n \to 0$ και, επομένως, η $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ δεν συγκλίνει.

[γ] Για τις $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ είναι $\sqrt[n]{|\frac{1}{n}|} \to 1$ και $\sqrt[n]{|\frac{1}{n^2}|} \to 1$. Η πρώτη σειρά αποκλίνει ενώ η δεύτερη συγκλίνει. □

Στην εφαρμογή των Προτάσεων 8.4 και 8.5 σε συγκεκριμένες σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$, τις περισσότερες φορές υπάρχουν τα όρια $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|$ και $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|z_n|}$. Γνωρίζουμε (και το χρησιμοποιήσαμε στις αποδείξεις των μερών [γ] των Προτάσεων 8.4 και 8.5) ότι τότε $\underline{\lim} = \overline{\lim} = \lim$.

Παράδειγμα 8.1.4. Θεωρούμε την $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$.
Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο λόγου. Αν $z = 0$, η σειρά, προφανώς, συγκλίνει απολύτως. Αν $z \neq 0$, ισχύει $\left|\frac{z^{n+1}/(n+1)}{z^n/n}\right| \to |z|$. Άρα, αν $0 < |z| < 1$, η σειρά συγκλίνει απολύτως και, αν $|z| > 1$ η σειρά αποκλίνει.

Τώρα θα εφαρμόσουμε το κριτήριο ρίζας. Ισχύει $\sqrt[n]{|\frac{z^n}{n}|} \to |z|$. Επομένως, αν $|z| < 1$, η σειρά συγκλίνει απολύτως και, αν $|z| > 1$, η σειρά αποκλίνει.
Αν $|z| = 1$, κανένα από τα δυο κριτήρια δεν δίνει συμπέρασμα. Αν $z = 1$, η σειρά είναι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, η οποία αποκλίνει. Αν $|z| = 1$, $z \neq 1$, τότε από το παράδειγμα 8.1.3 συνεπάγεται ότι η σειρά συγκλίνει. Παρατηρήστε ότι, αν $|z| = 1$, τότε $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{z^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$, οπότε η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$ δε συγκλίνει απολύτως.
Συνοψίζουμε. Η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$ συγκλίνει απολύτως αν $|z| < 1$, συγκλίνει υπό συνθήκη αν $|z| = 1$, $z \neq 1$ και αποκλίνει αν $z = 1$ ή $|z| > 1$.

Παράδειγμα 8.1.5. Θεωρούμε την $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2}$.
Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο λόγου. Αν $z = 0$, η σειρά, προφανώς, συγκλίνει απολύτως. Αν $z \neq 0$, είναι $\left|\frac{z^{n+1}/(n+1)^2}{z^n/n^2}\right| \to |z|$. Άρα, αν $0 < |z| < 1$, η σειρά συγκλίνει απολύτως και, αν $|z| > 1$ η σειρά αποκλίνει.

Τώρα θα εφαρμόσουμε το κριτήριο ρίζας. Είναι $\sqrt[n]{|\frac{z^n}{n^2}|} \to |z|$. Επομένως, αν $|z| < 1$, η σειρά συγκλίνει απολύτως και, αν $|z| > 1$, η σειρά αποκλίνει.
Αν $|z| = 1$, κανένα από τα δυο κριτήρια δεν δίνει συμπέρασμα. Όμως, τότε είναι $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{z^n}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$.
Συνοψίζουμε. Η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2}$ συγκλίνει απολύτως αν $|z| \le 1$ και αποκλίνει αν $|z| > 1$.

Παράδειγμα 8.1.6. Στην $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ εφαρμόζουμε το κριτήριο λόγου. Αν $z = 0$, η σειρά, προφανώς, συγκλίνει απολύτως. Αν $z \neq 0$, είναι $\left|\frac{z^{n+1}/(n+1)!}{z^n/n!}\right| = \frac{|z|}{n+1} \to 0$. Άρα η σειρά συγκλίνει απολύτως για κάθε z.

Τώρα εφαρμόζουμε το κριτήριο ρίζας. Είναι $\sqrt[n]{|\frac{z^n}{n!}|} = \frac{|z|}{\sqrt[n]{n!}} \to \frac{|z|}{+\infty} = 0$. Επομένως, η σειρά συγκλίνει απολύτως για κάθε z.

Ασκήσεις.

8.1.1. Ποιές από τις σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{n} + \frac{i}{n^2})$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{n}{2^n} + \frac{i}{n^3})$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+i^n}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2+i^n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+i}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+in}$ συγκλίνουν;

8.1.2. Ποιό είναι το άθροισμα της $\sum_{n=1}^{+\infty} n(-1)^{n-1}$ αν θεωρηθεί μιγαδική σειρά και ποιό είναι το άθροισμά της αν θεωρηθεί πραγματική σειρά;

8.1.3. Εφαρμόστε το κριτήριο λόγου σε όποιες από τις παρακάτω σειρές είναι δυνατό. $\sum_{n=1}^{+\infty} n^3 i^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{i^n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1+i)^n}{n!}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2i)^n n!}{n^n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2+i)^n n!}{n^n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(4i)^n (n!)^2}{(2n)!}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3+i)(6+i)(9+i)\cdots(3n+i)}{(3+4i)(3+8i)(3+12i)\cdots(3+4ni)}$.

8.1.4. Εφαρμόστε το κριτήριο ρίζας σε όποιες από τις παρακάτω σειρές είναι δυνατό. $\sum_{n=1}^{+\infty} n^n i^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{n+i}{2n-i})^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{n+i}{n-i})^{2n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{(1+2i)^n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n^3(1-i)^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2+3i)^n}{n^n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+i}{(\sqrt[n]{n}+i)^n}$.

8.1.5. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση και την απόλυτη σύγκλιση τις σειρές: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{i^n}{n}$, $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{i^n}{n \log n}$, $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{i^n}{n(\log n)^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{i^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} i^{n-1} \sin \frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} i^{n-1}(1-\cos\frac{1}{n})$.

8.1.6. Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n| < +\infty$, αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$ συγκλίνει.

8.1.7. Έστω $z_n = x_n + iy_n$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ συγκλίνει απολύτως αν και μόνο αν οι $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνουν απολύτως.

8.1.8. Έστω $|a_n|r^n \leq Mn^6$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$ συγκλίνει για κάθε z με $|z| < r$.

8.1.9. Αποδείξτε το κριτήριο απόλυτης σύγκλισης χρησιμοποιώντας το αντίστοιχο κριτήριο για πραγματικές σειρές.

8.1.10. Βρείτε τα z για τα οποία η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{2+z^n}$ συγκλίνει.

8.1.11. Έστω $0 \leq \theta_0 < \frac{\pi}{2}$ και έστω ότι για κάθε z_n το $\arg z_n$ έχει μια τιμή στο διάστημα $[-\theta_0, \theta_0]$. Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν συγκλίνει απολύτως και ότι $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = \infty$ αν και μόνο αν $\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n| = +\infty$.

8.1.12. Βρείτε σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ η οποία συγκλίνει αλλά έτσι ώστε η $\sum_{n=1}^{+\infty} {z_n}^2$ να αποκλίνει.

8.1.13. Έστω $s_n = z_1 + \cdots + z_n$ για κάθε n. Αν η ακολουθία $(a_{n+1}s_n)$ συγκλίνει και αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n - a_{n+1})s_n$ συγκλίνει, αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z_n$ συγκλίνει. Ειδικώτερα: αν η (s_n) είναι φραγμένη, αν $a_n \to 0$ και αν $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n - a_{n+1}| < +\infty$, αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z_n$ συγκλίνει. Ποιά είναι η σχέση όλων αυτών με τα κριτήρια των Dirichlet και Abel;

8.2 Ομοιόμορφη σύγκλιση ακολουθίας και σειράς συναρτήσεων.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω $f_n : A \to \mathbb{C}$ για κάθε n και $f : A \to \mathbb{C}$. Λέμε ότι η ακολουθία συναρτήσεων (f_n)* **συγκλίνει** *στη συνάρτηση f* **ομοιόμορφα** *στο A αν*

$$\|f_n - f\|_A \to 0,$$

όπου $\|f_n - f\|_A = \sup\{|f_n(z) - f(z)| \,|\, z \in A\}$. Ισοδύναμα, η (f_n) συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στο A αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $|f_n(z) - f(z)| \leq \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$ και κάθε $z \in A$.
Συμβολίζουμε

$$f_n \overset{ομ}{\to} f \quad στο\ A.$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι, αν η (f_n) συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στο A, τότε ισχύει $f_n(z) \to f(z)$ για κάθε $z \in A$, δηλαδή ότι η (f_n) συγκλίνει στην f **κατά σημείο** στο A. Πράγματι, αν η (f_n) συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στο A, τότε για κάθε $z \in A$ ισχύει

$$0 \leq |f_n(z) - f(z)| \leq \|f_n - f\|_A \to 0.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 8.6. *Έστω ότι η (f_n) συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στο A και έστω $z_0 \in A$. Αν όλες οι f_n είναι συνεχείς στο z_0, τότε και η f είναι συνεχής στο z_0. Ειδικώτερα, αν όλες οι f_n είναι συνεχείς στο A, τότε και η f είναι συνεχής στο A.*

Απόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $|f_n(z) - f(z)| \leq \frac{\epsilon}{3}$ για κάθε $n \geq n_0$ και κάθε $z \in A$. Ειδικώτερα, ισχύει $|f_{n_0}(z) - f(z)| \leq \frac{\epsilon}{3}$ για κάθε $z \in A$. Κατόπιν, επειδή η f_{n_0} είναι συνεχής στο z_0, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f_{n_0}(z) - f_{n_0}(z_0)| \leq \frac{\epsilon}{3}$ για κάθε $z \in A$ με $|z - z_0| < \delta$.
Συνδυάζοντας τα προηγούμενα, βλέπουμε ότι για κάθε $z \in A$ με $|z - z_0| < \delta$ ισχύει

$$|f(z) - f(z_0)| \leq |f(z) - f_{n_0}(z)| + |f_{n_0}(z) - f_{n_0}(z_0)| + |f_{n_0}(z_0) - f(z_0)| \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Άρα η f είναι συνεχής στο z_0. □

Από την έννοια της ομοιόμορφης σύγκλισης ακολουθίας συναρτήσεων περνάμε αμέσως στην έννοια της ομοιόμορφης σύγκλισης σειράς συναρτήσεων (μέσω της ακολουθίας των μερικών αθροισμάτων).

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω $f_n : A \to \mathbb{C}$ για κάθε n. Θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα $s_n : A \to \mathbb{C}$, όπου $s_n(z) = f_1(z) + \cdots + f_n(z)$ για κάθε $z \in A$. Επίσης, έστω $s : A \to \mathbb{C}$. Λέμε ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει στο άθροισμα s ομοιόμορφα στο A αν η ακολουθία συναρτήσεων (s_n) συγκλίνει στη συνάρτηση s ομοιόμορφα στο A.*
Συμβολίζουμε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \stackrel{\text{ομ}}{=} f \quad \text{στο } A.$$

Όπως παραπάνω με την ακολουθία συναρτήσεων, έχουμε ότι, αν η $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει στο άθροισμα s ομοιόμορφα στο A, τότε ισχύει $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z) = s(z)$ για κάθε $z \in A$, δηλαδή ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει στο άθροισμα s **κατά σημείο** στο A.

ΠΡΟΤΑΣΗ 8.7. *Έστω ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει στο άθροισμα s ομοιόμορφα στο A και έστω $z_0 \in A$. Αν όλες οι f_n είναι συνεχείς στο z_0, τότε και η s είναι συνεχής στο z_0. Ειδικώτερα, αν όλες οι f_n είναι συνεχείς στο A, τότε και η s είναι συνεχής στο A.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα $s_n = f_1 + \cdots + f_n$. Επειδή πρόκειται για πεπερασμένα αθροίσματα, κάθε s_n είναι συνεχής στο z_0. Επομένως, από την Πρόταση 8.6 συνεπάγεται ότι και η s είναι συνεχής στο z_0. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 8.8. *Έστω καμπύλη γ και έστω ότι η (f_n) συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στην τροχιά γ^*. Επίσης, έστω ϕ συνεχής στο γ^* και έστω ότι κάθε f_n είναι συνεχής στο γ^*. Τότε*

$$\int_\gamma f_n(z)\phi(z)\,dz \to \int_\gamma f(z)\phi(z)\,dz. \tag{8.2}$$

Απόδειξη. Λόγω της ομοιόμορφης σύγκλισης, η f είναι συνεχής στο γ^*. Επομένως, η ύπαρξη των ολοκληρωμάτων $\int_\gamma f_n(z)\phi(z)\,dz$ και $\int_\gamma f(z)\phi(z)\,dz$ είναι εξασφαλισμένη, αφού πρόκειται για επικαμπύλια ολοκληρώματα συνεχών συναρτήσεων.
Επειδή η ϕ είναι συνεχής στο συμπαγές σύνολο γ^*, υπάρχει M ώστε να ισχύει $|\phi(z)| \leq M$ για κάθε $z \in \gamma^*$. Άρα για κάθε $z \in \gamma^*$ και κάθε n ισχύει

$$|f_n(z)\phi(z) - f(z)\phi(z)| = |f_n(z) - f(z)|\,|\phi(z)| \leq M\|f_n - f\|_{\gamma^*}.$$

Άρα

$$\begin{aligned}\Big|\int_\gamma f_n(z)\phi(z)\,dz - \int_\gamma f(z)\phi(z)\,dz\Big| &= \Big|\int_\gamma (f_n(z)\phi(z) - f(z)\phi(z))\,dz\Big| \\ &\leq M\|f_n - f\|_{\gamma^*}\ \text{μήκος}\,\gamma \to 0.\end{aligned}$$

□

ΠΡΟΤΑΣΗ 8.9. *Έστω καμπύλη γ και έστω ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει στο άθροισμα s ομοιόμορφα στην τροχιά γ^*. Επίσης, έστω ϕ συνεχής στο γ^* και έστω ότι κάθε f_n είναι συνεχής στο γ^*. Τότε*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_\gamma f_n(z)\phi(z)\, dz = \int_\gamma s(z)\phi(z)\, dz. \tag{8.3}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα $s_n = f_1 + \cdots + f_n$ και εφαρμόζουμε σ' αυτά την Πρόταση 8.8. Έχουμε

$$\sum_{k=1}^{n} \int_\gamma f_k(z)\phi(z)\, dz = \int_\gamma \sum_{k=1}^{n} f_k(z)\phi(z)\, dz = \int_\gamma s_n(z)\phi(z)\, dz \to \int_\gamma s(z)\phi(z)\, dz. \tag{8.4}$$

Άρα η σειρά (αριθμών) $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_\gamma f_n(z)\phi(z)\, dz$ συγκλίνει στον (αριθμό) $\int_\gamma s(z)\phi(z)\, dz$. □

Η σχέση (8.3) γράφεται, φυσικά, και

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_\gamma f_n(z)\phi(z)\, dz = \int_\gamma \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)\phi(z)\, dz,$$

αφού ισχύει $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z) = s(z)$ για κάθε $z \in \gamma^*$. Έτσι η σχέση (8.3) εκφράζει εναλλαγή των συμβόλων του άπειρου αθροίσματος $\sum_{n=1}^{+\infty}$ και του ολοκληρώματος $\int_\gamma$. Μια τέτοια εναλλαγή ισχύει μόνο υπο προϋποθέσεις. Στην Πρόταση 8.9 αποδείξαμε ότι ισχύει με την προϋπόθεση της ομοιόμορφης σύγκλισης της σειράς συναρτήσεων. Φυσικά, στην απόδειξη χρησιμοποιήσαμε, στην πρώτη ισότητα της σχέσης (8.4), ότι η εναλλαγή πεπερασμένου αθροίσματος $\sum_{k=1}^{n}$ και ολοκληρώματος ισχύει και αυτό δικαιολογείται από την Πρόταση 4.12.

Αναλόγως, μπορούμε να πούμε ότι η σχέση (8.2) γράφεται

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\gamma f_n(z)\phi(z)\, dz = \int_\gamma \lim_{n\to+\infty} f_n(z)\phi(z)\, dz$$

και εκφράζει εναλλαγή των συμβόλων του ορίου $\lim_{n\to+\infty}$ και του ολοκληρώματος $\int_\gamma$. Κι αυτή η εναλλαγή ισχύει με την προϋπόθεση της ομοιόμορφης σύγκλισης.

Τέλος, έχουμε ένα βασικό κριτήριο ομοιόμορφης σύγκλισης σειράς συναρτήσεων.

ΠΡΟΤΑΣΗ 8.10. [**Κριτήριο Ομοιόμορφης Σύγκλισης του Weierstrass**] *Υποθέτουμε ότι ισχύει $|f_n(z)| \le M_n$ για κάθε n και κάθε $z \in A$. Αν η σειρά (μη-αρνητικών αριθμών) $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n$ συγκλίνει, δηλαδή αν $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n < +\infty$, τότε η $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο A.*

Απόδειξη. Εργαζόμενοι αρχικά με σειρές (μη-αρνητικών) αριθμών, βλέπουμε ότι για κάθε $z \in A$ ισχύει

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(z)| \le \sum_{n=1}^{+\infty} M_n < +\infty,$$

οπότε για κάθε $z \in A$ η σειρά αριθμών $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ συγκλίνει. Έτσι ορίζουμε συνάρτηση με τύπο

$$s(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z) \qquad \text{για κάθε } z \in A.$$

Κατόπιν, θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα $s_n = f_1 + \cdots + f_n$ και εχουμε ότι για κάθε $z \in A$ ισχύει

$$\begin{aligned} |s_n(z) - s(z)| &= \Big| \sum_{k=1}^{n} f_k(z) - \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(z) \Big| = \Big| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(z) \Big| \\ &\le \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(z)| \le \sum_{k=n+1}^{+\infty} M_k. \end{aligned}$$

Αφού αυτό ισχύει για κάθε $z \in A$, συνεπάγεται

$$\|s_n - s\|_A = \sup\{|s_n(z) - s(z)| \mid z \in A\} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} M_k \to 0 \qquad \text{όταν } n \to +\infty,$$

επειδή $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n < +\infty$. Άρα η (s_n) συγκλίνει στην s ομοιόμορφα στο A, οπότε η $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει στο άθροισμα s ομοιόμορφα στο A. $\square$

Ασκήσεις.

8.2.1. [α] Αν $\operatorname{Re} z > -\frac{1}{2}$, αποδείξτε ότι $\left|\frac{z}{z+1}\right| < 1$. Αν το K είναι συμπαγές υποσύνολο του ημιεπιπέδου $\{z \mid \operatorname{Re} z > -\frac{1}{2}\}$, αποδείξτε ότι υπάρχει r με $0 < r < 1$ (το r εξαρτάται από το K) ώστε να ισχύει $\left|\frac{z}{z+1}\right| \leq r$ για κάθε $z \in K$.

[β] Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{z}{z+1})^n$ συγκλίνει για κάθε z στο ημιεπίπεδο $\{z \mid \operatorname{Re} z > -\frac{1}{2}\}$ και συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του ημιεπιπέδου αυτού.

8.2.2. [α] Αν το K είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C} \setminus C(0;1)$, αποδείξτε ότι υπάρχει r με $0 < r < 1$ (το r εξαρτάται από το K) ώστε για κάθε $z \in K$ να ισχύει είτε $|z| \leq r$ είτε $|z| \geq \frac{1}{r}$.

[β] Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{z^{2n}+1}$ συγκλίνει για κάθε z στο $\mathbb{C} \setminus C(0;1)$ και συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C} \setminus C(0;1)$.

8.2.3. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z+n)^2}$ συγκλίνει για κάθε $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ και ότι για κάθε συμπαγές K η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο $K \setminus \mathbb{Z}$.

8.2.4. Ορίζουμε

$$t^z = e^{z \ln t} \qquad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C}, t > 0.$$

[α] Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}$ συγκλίνει απολύτως για κάθε z στο ημιεπίπεδο $\{z \mid \operatorname{Re} z > 1\}$ και αποκλίνει για κάθε z στο ημιεπίπεδο $\{z \mid \operatorname{Re} z \leq 1\}$.

[β] Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο ημιεπίπεδο $\{z \mid \operatorname{Re} z \geq 1 + \delta\}$ για κάθε $\delta > 0$.

Η συνάρτηση

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z} \qquad \text{για } \operatorname{Re} z > 1$$

είναι η περίφημη **συνάρτηση ζήτα** του Riemann και συνδέεται με ένα από τα δυσκολότερα (ίσως το δυσκολότερο) άλυτα προβλήματα των μαθηματικών.

8.2.5. Υπάρχουν πολυώνυμα $p_n(z)$ ώστε να ισχύει $p_n(z) \to \frac{1}{z}$ ομοιόμορφα στον κύκλο $C(0;1)$; Σκεφτείτε στη βάση επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων στο $C(0;1)$.

8.3 Δημιουργία αναλυτικών συναρτήσεων. Δυναμοσειρές.

Το Θεώρημα 8.4 είναι ένα από τα πιο σημαντικά εργαλεία κατασκευής αναλυτικών συναρτήσεων. Ξεκινάμε από κάποια ακολουθία συναρτήσεων (f_n) οι οποίες είναι όλες αναλυτικές σε κάποιο ανοικτό σύνολο Ω και, υπό κάποιες προϋποθέσεις, παίρνοντας το όριο της ακολουθίας, καταλήγουμε σε μια συνάρτηση f αναλυτική στο Ω.

ΘΕΩΡΗΜΑ 8.4. *Έστω ανοικτό σύνολο Ω και έστω ότι η (f_n) συγκλίνει στην f ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του Ω. Αν όλες οι f_n είναι αναλυτικές στο Ω τότε και η f είναι αναλυτική στο Ω και, επιπλέον, και η $(f_n{}')$ συγκλίνει στην f' ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του Ω.*

Απόδειξη. Έστω $z \in \Omega$. Επειδή το μονοσύνολο $\{z\}$ είναι συμπαγές, από την υπόθεση συνεπάγεται ότι ισχύει $f_n(z) \to f(z)$. Δηλαδή, η (f_n) συγκλίνει στην f κατά σημείο στο Ω.
Τώρα, πάλι έστω $z_0 \in \Omega$. Το Ω είναι ανοικτό, οπότε υπάρχει κάποιος κλειστός δίσκος $\mathrm{cl}\, D(z_0; r)$ ο οποίος περιέχεται στο Ω. Επειδή κάθε f_n είναι αναλυτική στο Ω, ισχύει

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0;r)} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \qquad \text{για κάθε } z \in D(z_0; r) \text{ και κάθε } n. \tag{8.5}$$

Είδαμε ήδη ότι $f_n(z) \to f(z)$. Επίσης, ο κύκλος $C(z_0; r)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του Ω, οπότε η (f_n) συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στο $C(z_0; r)$. Εφαρμόζοντας την Πρόταση 8.8 στο δεξιό μέρος της (8.5) με τη συνάρτηση $\phi(\zeta) = \frac{1}{\zeta - z}$ ως συνάρτηση του ζ στο $C(z_0; r)$, βρίσκουμε

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0;r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \qquad \text{για κάθε } z \in D(z_0; r). \tag{8.6}$$

Επειδή κάθε f_n είναι συνεχής στο $C(z_0; r)$ και επειδή η (f_n) συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στο $C(z_0; r)$, συνεπάγεται ότι και η f είναι συνεχής στο $C(z_0; r)$. Επομένως, το Λήμμα 7.2 μας λέει ότι η δεξιά μεριά της (8.6) είναι, ως συνάρτηση του z, αναλυτική στο σύνολο $\mathbb{C} \setminus C(z_0; r)$, το οποίο αποτελείται από τον δίσκο $D(z_0; r)$ και από το εξωτερικό του. Ειδικώτερα, η δεξιά μεριά της (8.6) είναι, ως συνάρτηση του z, αναλυτική στον $D(z_0; r)$. Επειδή, όμως, σύμφωνα με την (8.6), η f ταυτίζεται με αυτήν την συνάρτηση στον $D(z_0; r)$, συνεπάγεται ότι η f είναι αναλυτική στον $D(z_0; r)$ και, ειδικώτερα, η f είναι παραγωγίσιμη στο z_0.
Αποδείξαμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $z_0 \in \Omega$, οπότε η f είναι αναλυτική στο Ω.
Τώρα μένει να αποδείξουμε ότι η $({f_n}')$ συγκλίνει στην f' ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του Ω. (Παρατηρήστε ότι, αφού αποδείξαμε ότι η f είναι αναλυτική στο Ω, μπορούμε να μιλάμε για την παράγωγό της στο Ω.)
Έστω συμπαγές $K \subseteq \Omega$.
Τότε υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε να ισχύει

$$|z - w| \geq \delta_0 \qquad \text{για κάθε } z \in K \text{ και κάθε } w \notin \Omega. \tag{8.7}$$

Τώρα παίρνουμε οποιοδήποτε δ με $0 < \delta < \delta_0$ και ορίζουμε το σύνολο L ως εξής:

$$L = \{z \,|\, \text{υπάρχει } z' \in K \text{ με } |z - z'| \leq \delta\}.$$

Κατ' αρχάς θα αποδείξουμε ότι το L είναι συμπαγές υποσύνολο του Ω.
(i) Έστω $z \in L$. Τότε υπάρχει $z' \in K$ ώστε $|z - z'| \leq \delta < \delta_0$. Αν το z ανήκε στο Ω^c, τότε από την (8.7) θα είχαμε ότι $|z - z'| \geq \delta_0$. Άρα $z \in \Omega$. Έτσι αποδείξαμε ότι $L \subseteq \Omega$.
(ii) Το K είναι φραγμένο, οπότε υπάρχει R ώστε να ισχύει $|z'| \leq R$ για κάθε $z' \in K$. Τώρα έστω $z \in L$. Τότε υπάρχει $z' \in K$ ώστε $|z - z'| \leq \delta$. Επομένως,

$$|z| \leq |z - z'| + |z'| \leq \delta + R.$$

Άρα ισχύει $|z| \leq \delta + R$ για κάθε $z \in L$, οπότε το L είναι φραγμένο.
(iii) Έστω ακολουθία (z_n) στο L και έστω $z_n \to z$. Για κάθε z_n υπάρχει κάποιο $z'_n \in K$ ώστε $|z_n - z'_n| \leq \delta$. Επειδή το K είναι συμπαγές και η (z'_n) είναι στο K, υπάρχει υποακολουθία (z'_{n_k}) η οποία συγκλίνει σε στοιχείο, έστω z', του K. Από τις

$$z_{n_k} \to z, \qquad z'_{n_k} \to z', \qquad |z_{n_k} - z'_{n_k}| \leq \delta$$

συνεπάγεται $|z - z'| \leq \delta$. Άρα $z \in L$. Είδαμε, λοιπόν, ότι αν μια ακολουθία στο L συγκλίνει τότε το όριό της ανήκει στο L. Άρα το L είναι κλειστό.
Από τα (i), (ii), (iii) έχουμε ότι το L είναι συμπαγές υποσύνολο του Ω.

Κατόπιν, έστω $z \in K$. Από τον ορισμό του L είναι σαφές ότι ο κλειστός δίσκος $\mathrm{cl}\, D(z;\delta)$ περιέχεται στο L (και άρα και στο Ω).
Επίσης,

$$f_n{}'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z;\delta)} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta \qquad \text{για κάθε } n \tag{8.8}$$

και

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z;\delta)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta. \tag{8.9}$$

Αφαιρούμε τις (8.8) και (8.9) και τότε

$$|f_n{}'(z) - f'(z)| = \frac{1}{2\pi}\Big|\int_{C(z;\delta)} \frac{f_n(\zeta) - f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta\Big| \qquad \text{για κάθε } n. \tag{8.10}$$

Επειδή ο κύκλος $C(z;\delta)$ περιέχεται στο L, για κάθε $\zeta \in C(z;\delta)$ ισχύει $\zeta \in L$ και, επομένως, $|f_n(\zeta) - f(\zeta)| \leq \|f_n - f\|_L$. Άρα ισχύει

$$\Big|\frac{f_n(\zeta) - f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\Big| \leq \frac{\|f_n - f\|_L}{\delta^2} \qquad \text{για κάθε } \zeta \in C(z;\delta) \text{ και κάθε } n.$$

Άρα από την (8.10) έχουμε

$$|f_n{}'(z) - f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi}\,\frac{\|f_n - f\|_L}{\delta^2}\, 2\pi\delta = \frac{1}{\delta}\,\|f_n - f\|_L \qquad \text{για κάθε } n.$$

Αυτή η τελευταία σχέση ισχύει για κάθε $z \in K$, οπότε συνεπάγεται ότι ισχύει

$$\|f_n{}' - f'\|_K \leq \frac{1}{\delta}\,\|f_n - f\|_L \qquad \text{για κάθε } n. \tag{8.11}$$

Επειδή η (f_n) συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στο L, συνεπάγεται $\|f_n - f\|_L \to 0$, οπότε από την (8.11) ισχύει $\|f_n{}' - f'\|_K \to 0$ και, επομένως, η $(f_n{}')$ συγκλίνει στην f' ομοιόμορφα στο K. □

Το πέρασμα σε σειρές αναλυτικών συναρτήσεων είναι άμεσο.

ΘΕΩΡΗΜΑ 8.5. *Έστω ανοικτό σύνολο Ω και έστω ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει στην s ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του Ω. Αν όλες οι f_n είναι αναλυτικές στο Ω τότε και η s είναι αναλυτική στο Ω και, επιπλέον, και η $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n{}'$ συγκλίνει στην s' ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του Ω.*

Απόδειξη. Εφαρμογή του Θεωρήματος 8.4 στα μερικά αθροίσματα $s_n = f_1 + \cdots + f_n$ τα οποία είναι, προφανώς, αναλυτικές συναρτήσεις στο Ω με $s_n{}' = f_1{}' + \cdots + f_n{}'$. □

Τα συμπεράσματα των Θεωρημάτων 8.4 και 8.5 μπορούν να επεκταθούν ως εξής. Στο Θεώρημα 8.4 η ακολουθία των παραγώγων $(f_n{}')$ ικανοποιεί τις ίδιες υποθέσεις με την ακολουθία (f_n). Δηλαδή, η $(f_n{}')$ συγκλίνει στην f' ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του Ω. Άρα το Θεώρημα 8.4 εφαρμόζεται σ' αυτήν την ακολουθία και συμπεραίνουμε ότι η $(f_n{}'')$ συγκλίνει στην f'' ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του Ω. Αυτό, όμως, συνεχίζεται επαγωγικά και βλέπουμε ότι:

Αν η ακολουθία αναλυτικών στο ανοικτό Ω συναρτήσεων (f_n) συγκλίνει στην f ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του Ω, τότε η f είναι αναλυτική στο Ω και για κάθε k η $(f_n{}^{(k)})$ συγκλίνει στην $f^{(k)}$ ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του Ω.

Το ίδιο ισχύει και για σειρά αναλυτικών συναρτήσεων στο Θεώρημα 8.5.

Αν η σειρά αναλυτικών στο ανοικτό Ω συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει στην s ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του Ω, τότε η s είναι αναλυτική στο Ω και για κάθε k η $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n{}^{(k)}$ συγκλίνει στην $s^{(k)}$ ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του Ω.

Εμείς θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα 8.5 σε μια ειδική κατηγορία σειρών συναρτήσεων, τις λεγόμενες **δυναμοσειρές**. Υπάρχουν τριών ειδών δυναμοσειρές. Αρχίζουμε με το πρώτο και πιο συνηθισμένο είδος δυναμοσειράς.

Δυναμοσειρές πρώτου είδους. Οποιαδήποτε σειρά

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots$$

ονομάζεται **δυναμοσειρά** με **κέντρο** z_0 και **συντελεστές** a_n. Μια τέτοια σειρά είναι σειρά των συναρτήσεων $a_n(z-z_0)^n$ οι οποίες είναι αναλυτικές στο $\mathbb{C}$ διότι είναι πολυωνυμικές συναρτήσεις.

Για κάθε δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ ορίζουμε την αντίστοιχη **ακτίνα σύγκλισης**:

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\overline{\lim}\, \sqrt[n]{|a_n|}}, & \text{αν } 0 < \overline{\lim}\, \sqrt[n]{|a_n|} < +\infty \\ 0, & \text{αν } \overline{\lim}\, \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty \\ +\infty, & \text{αν } \overline{\lim}\, \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \end{cases}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 8.11. *Έστω δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ με ακτίνα σύγκλισης R. Τότε:*

[α] *Η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως για κάθε $z \in D(z_0; R)$.*

[β] *Η δυναμοσειρά αποκλίνει για κάθε $z \in D(z_0; R, +\infty)$.*

[γ] *Η δυναμοσειρά συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε $\mathrm{cl}\, D(z_0; r)$ με $0 < r < R$ και άρα συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $D(z_0; R)$.*

Απόδειξη. [α] Έστω $z \in D(z_0; R)$, δηλαδή $|z-z_0| < R \leq +\infty$. Αυτομάτως, είναι $R > 0$. Θεωρούμε ένα οποιοδήποτε R' έτσι ώστε

$$|z-z_0| < R' < R.$$

Συνεπάγεται

$$\overline{\lim}\, \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{R'}$$

και, επομένως, υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{R'} \qquad \text{για κάθε } n \geq n_0.$$

Άρα ισχύει

$$|a_n(z-z_0)^n| = |a_n|\,|z-z_0|^n \leq \Big(\frac{|z-z_0|}{R'}\Big)^n \qquad \text{για κάθε } n \geq n_0.$$

Επειδή $\frac{|z-z_0|}{R'} < 1$, συνεπάγεται

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} |a_n(z-z_0)^n| \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} \Big(\frac{|z-z_0|}{R'}\Big)^n < +\infty.$$

Άρα η $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ συγκλίνει απολύτως, οπότε και η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ συγκλίνει απολύτως.

[β] Έστω $z \in D(z_0; R, +\infty)$, δηλαδή $0 \leq R < |z-z_0|$. Αυτομάτως, είναι $R < +\infty$. Συνεπάγεται

$$\overline{\lim}\, \sqrt[n]{|a_n|} > \frac{1}{|z-z_0|},$$

οπότε ισχύει

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geq \frac{1}{|z-z_0|} \qquad \text{για άπειρους } n.$$

Άρα ισχύει
$$|a_n(z-z_0)^n| = |a_n|\,|z-z_0|^n \geq 1 \qquad \text{για άπειρους } n,$$
οπότε δεν ισχύει $a_n(z-z_0)^n \to 0$ και, επομένως, η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ αποκλίνει.
[γ] Έστω τυχόν r με $0<r<R$. Θεωρούμε ένα οποιοδήποτε R' έτσι ώστε
$$r < R' < R.$$
Συνεπάγεται
$$\overline{\lim}\,\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{R'}$$
και, επομένως, υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει
$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{R'} \qquad \text{για κάθε } n \geq n_0.$$
Τότε για κάθε $z \in \mathrm{cl}\,D(z_0;r)$ ισχύει
$$|a_n(z-z_0)^n| = |a_n|\,|z-z_0|^n \leq \Big(\frac{r}{R'}\Big)^n \qquad \text{για κάθε } n \geq n_0.$$
Επειδή $\frac{r}{R'} < 1$, συνεπάγεται
$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} \Big(\frac{r}{R'}\Big)^n < +\infty.$$
Από το Κριτήριο του Weierstrass συνεπάγεται ότι η $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathrm{cl}\,D(z_0;r)$, οπότε και η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathrm{cl}\,D(z_0;r)$.
Τέλος, έστω συμπαγές $K \subseteq D(z_0;R)$. Το $D(z_0;R)^c = \mathrm{cl}\,D(z_0;R,+\infty)$ είναι κλειστό και είναι ξένο προς το K. Άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|z-w| \geq \delta$ για κάθε $z \in K$ και κάθε $w \in D(z_0;R)^c$. Τώρα είναι προφανές ότι, αν πάρουμε $r = R-\delta < R$, ισχύει
$$K \subseteq \mathrm{cl}\,D(z_0;r).$$
Αφού η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathrm{cl}\,D(z_0;r)$, συνεπάγεται ότι συγκλίνει ομοιόμορφα και στο K. □

Αν R είναι η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$, τότε ο δίσκος $D(z_0;R)$ ονομάζεται **δίσκος σύγκλισης** της δυναμοσειράς και από την Πρόταση 8.11 έχουμε τα εξής συμπεράσματα.

(i) *Αν $R=0$, τότε ο δίσκος σύγκλισης είναι κενός και ο συνοριακός κύκλος αποτελείται μόνο από το κέντρο z_0 : $C(z_0;R) = \{z_0\}$. Η δυναμοσειρά συγκλίνει για $z=z_0$ και αποκλίνει για κάθε $z \neq z_0$.*

(ii) *Αν $R=+\infty$, τότε ο δίσκος σύγκλισης είναι ολόκληρο το επίπεδο: $D(z_0;R) = \mathbb{C}$. Η δυναμοσειρά συγκλίνει (και, μάλιστα, απολύτως) για κάθε z και συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$. Από το Θεώρημα 8.5 συνεπάγεται ότι η συνάρτηση που ορίζεται από τη δυναμοσειρά στο $\mathbb{C}$ είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$.*

(iii) *Αν $0<R<+\infty$, τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει (και, μάλιστα, απολύτως) για κάθε $z \in D(z_0;R)$ και αποκλίνει για κάθε $z \in D(z_0;R,+\infty)$. Για τα σημεία z του κύκλου $C(z_0;R)$ δεν υπάρχει γενικό συμπέρασμα. Ανάλογα με τη συγκεκριμένη δυναμοσειρά, αυτή συγκλίνει για κάποια σημεία $z \in C(z_0;R)$ και αποκλίνει για τα υπόλοιπα. Τέλος, η δυναμοσειρά συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $D(z_0;R)$, οπότε από το Θεώρημα 8.5 συνεπάγεται ότι η συνάρτηση που ορίζεται από τη δυναμοσειρά στον δίσκο $D(z_0;R)$ είναι αναλυτική στον $D(z_0;R)$.*

Στις περιπτώσεις (ii) και (iii), όπου $R>0$ και η συνάρτηση, έστω s, που ορίζεται από τη δυναμοσειρά, είναι αναλυτική στον δίσκο σύγκλισης $D(z_0;R)$, ισχύει
$$s(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n \qquad \text{για } z \in D(z_0;R)$$

αλλά και για τις παραγώγους έχουμε

$$s^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(z-z_0)^{n-k} \qquad \text{για } z \in D(z_0;R).$$

Θα ξαναδούμε τα παραδείγματα της ενότητας 8.1.

Παράδειγμα 8.3.1. Για την $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$ έχουμε $\overline{\lim}\sqrt[n]{|\frac{1}{n}|} = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$, οπότε $R = 1$. Άρα ο δίσκος σύγκλισης είναι ο $D(0;1)$.

Παράδειγμα 8.3.2. Για την $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2}$ είναι $\overline{\lim}\sqrt[n]{|\frac{1}{n^2}|} = \lim \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} = 1$, οπότε $R = 1$. Άρα ο δίσκος σύγκλισης είναι ο $D(0;1)$.

Παράδειγμα 8.3.3. Για την $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ είναι $\overline{\lim}\sqrt[n]{|\frac{1}{n!}|} = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$, οπότε $R = +\infty$. Άρα ο δίσκος σύγκλισης είναι ο $D(0;+\infty) = \mathbb{C}$.

Παράδειγμα 8.3.4. Για την $\sum_{n=1}^{+\infty} n!z^n$ είναι $\overline{\lim}\sqrt[n]{|n!|} = \lim \sqrt[n]{n!} = +\infty$, οπότε $R = 0$. Άρα η δυναμοσειρά συγκλίνει μόνο για $z = 0$.

Δυναμοσειρές δεύτερου είδους. Στο δεύτερο είδος δυναμοσειρών εντάσσεται κάθε

$$\sum_{-\infty}^{n=-1} a_n(z-z_0)^n = \cdots + \frac{a_{-3}}{(z-z_0)^3} + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z-z_0}.$$

Κάθε τέτοια σειρά ονομάζεται, επίσης, **δυναμοσειρά** με **κέντρο** z_0 και **συντελεστές** a_n και είναι σειρά των ρητών συναρτήσεων $\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$ οι οποίες είναι αναλυτικές στο $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. Παρατηρήστε ότι η δυναμοσειρά δεν έχει καν νόημα αν $z = z_0$ (όπως δεν έχει νόημα κάθε δυναμοσειρά πρώτου είδους αν $z = \infty$). Απο την άλλη μεριά, αν $z = \infty$, τότε η δυναμοσειρά γίνεται $\sum_{-\infty}^{n=-1} a_n 0 = 0$ και, επομένως, συγκλίνει και έχει άθροισμα 0.

Τώρα, για την $\sum_{-\infty}^{n=-1} a_n(z-z_0)^n$ ορίζουμε την αντίστοιχη **ακτίνα σύγκλισης**:

$$R = \begin{cases} \overline{\lim}\sqrt[m]{|a_{-m}|}, & \text{αν } 0 < \overline{\lim}\sqrt[m]{|a_{-m}|} < +\infty \\ +\infty, & \text{αν } \overline{\lim}\sqrt[m]{|a_{-m}|} = +\infty \\ 0, & \text{αν } \overline{\lim}\sqrt[m]{|a_{-m}|} = 0 \end{cases}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 8.12. *Έστω δυναμοσειρά $\sum_{-\infty}^{n=-1} a_n(z-z_0)^n$ με ακτίνα σύγκλισης R. Τότε:*
[α] *Η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως για κάθε $z \in D(z_0;R,+\infty) \cup \{\infty\}$.*
[β] *Η δυναμοσειρά αποκλίνει για κάθε $z \in D(z_0;0,R) = D(z_0;R) \setminus \{z_0\}$.*
[γ] *Η δυναμοσειρά συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε $\mathrm{cl}\, D(z_0;r,+\infty) \cup \{\infty\}$ με $R < r < +\infty$ και άρα συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $D(z_0;R,+\infty)$.*

Απόδειξη. [α] Είδαμε προηγουμένως ότι, αν $z = \infty$, τότε όλοι οι όροι της δυναμοσειράς είναι μηδέν και, επομένως, συγκλίνει απολύτως.
Έστω $z \in D(z_0;R,+\infty)$, δηλαδή $0 \le R < |z-z_0|$. Αυτομάτως, είναι $R < +\infty$. Θεωρούμε ένα οποιοδήποτε R' έτσι ώστε

$$R < R' < |z-z_0|.$$

Συνεπάγεται

$$\overline{\lim}\sqrt[m]{|a_{-m}|} < R'$$

και, επομένως, υπάρχει m_0 ώστε να ισχύει

$$\sqrt[m]{|a_{-m}|} \le R' \qquad \text{για κάθε } m \ge m_0.$$

Άρα ισχύει

$$|a_{-m}(z-z_0)^{-m}| = |a_{-m}|\,|z-z_0|^{-m} \le \Big(\frac{R'}{|z-z_0|}\Big)^m \qquad \text{για κάθε } m \ge m_0.$$

Επειδή $\frac{R'}{|z-z_0|} < 1$, συνεπάγεται

$$\sum_{m=m_0}^{+\infty} |a_{-m}(z-z_0)^{-m}| \le \sum_{m=m_0}^{+\infty} \Big(\frac{R'}{|z-z_0|}\Big)^m < +\infty.$$

Άρα η $\sum_{m=m_0}^{+\infty} a_{-m}(z-z_0)^{-m}$ συγκλίνει απολύτως, οπότε και η $\sum_{m=1}^{+\infty} a_{-m}(z-z_0)^{-m}$ συγκλίνει απολύτως και, επομένως, η $\sum_{-\infty}^{n=-1} a_n(z-z_0)^n$ συγκλίνει απολύτως.
[β] Έστω $z \in D(z_0; 0, R)$, δηλαδή $0 < |z-z_0| < R$. Αυτομάτως, είναι $R > 0$. Συνεπάγεται

$$\overline{\lim}\ \sqrt[m]{|a_{-m}|} > |z-z_0|,$$

οπότε ισχύει

$$\sqrt[m]{|a_{-m}|} \ge |z-z_0| \qquad \text{για άπειρους } m.$$

Άρα ισχύει

$$|a_{-m}(z-z_0)^{-m}| = |a_{-m}|\,|z-z_0|^{-m} \ge 1 \qquad \text{για άπειρους } m,$$

οπότε δεν ισχύει $a_{-m}(z-z_0)^{-m} \to 0$ και, επομένως, η $\sum_{m=1}^{+\infty} a_{-m}(z-z_0)^{-m}$ αποκλίνει και, επομένως, η $\sum_{-\infty}^{n=-1} a_n(z-z_0)^n$ αποκλίνει.
[γ] Έστω τυχόν r με $R < r < +\infty$. Θεωρούμε ένα οποιοδήποτε R' έτσι ώστε

$$R < R' < r.$$

Συνεπάγεται

$$\overline{\lim}\ \sqrt[m]{|a_{-m}|} < R'$$

και, επομένως, υπάρχει m_0 ώστε να ισχύει

$$\sqrt[m]{|a_{-m}|} \le R' \qquad \text{για κάθε } m \ge m_0.$$

Τότε για κάθε $z \in \operatorname{cl} D(z_0; r, +\infty) \cup \{\infty\}$ ισχύει

$$|a_{-m}(z-z_0)^{-m}| = |a_{-m}|\,|z-z_0|^{-m} \le \Big(\frac{R'}{r}\Big)^m \qquad \text{για κάθε } m \ge m_0.$$

Επειδή $\frac{R'}{r} < 1$, συνεπάγεται

$$\sum_{m=m_0}^{+\infty} \Big(\frac{R'}{r}\Big)^m < +\infty.$$

Από το Κριτήριο του Weierstrass συνεπάγεται ότι η $\sum_{m=m_0}^{+\infty} a_{-m}(z-z_0)^{-m}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\operatorname{cl} D(z_0; r, +\infty) \cup \{\infty\}$, οπότε και η $\sum_{m=1}^{+\infty} a_{-m}(z-z_0)^{-m}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\operatorname{cl} D(z_0; r, +\infty) \cup \{\infty\}$ και, επομένως, και η $\sum_{-\infty}^{n=-1} a_n(z-z_0)^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\operatorname{cl} D(z_0; r, +\infty) \cup \{\infty\}$.
Τώρα, έστω συμπαγές $K \subseteq D(z_0; R, +\infty)$. Το $D(z_0; R, +\infty)^c = \operatorname{cl} D(z_0; R)$ είναι κλειστό και είναι ξένο προς το K. Άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|z-w| \ge \delta$ για κάθε $z \in K$ και κάθε $w \in D(z_0; R, +\infty)^c$. Είναι σαφές ότι, αν πάρουμε $r = R + \delta > R$, ισχύει

$$K \subseteq \operatorname{cl} D(z_0; r, +\infty).$$

Επειδή η $\sum_{-\infty}^{n=-1} a_n(z-z_0)^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\operatorname{cl} D(z_0; r, +\infty) \cup \{\infty\}$, συνεπάγεται ότι συγκλίνει ομοιόμορφα και στο K. □

Αν R είναι η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{-\infty}^{n=-1} a_n(z-z_0)^n$, τότε ο δακτύλιος $D(z_0; R, +\infty)$ ονομάζεται **δακτύλιος σύγκλισης** της δυναμοσειράς. Φυσικά, η δυναμοσειρά συγκλίνει και για $z = \infty$. Από την Πρόταση 8.12 έχουμε τα εξής συμπεράσματα.

(i) *Αν $R = +\infty$, τότε ο δακτύλιος σύγκλισης είναι κενός. Η δυναμοσειρά συγκλίνει για $z = \infty$ και αποκλίνει για κάθε $z \neq z_0, \infty$. (Όπως είπαμε, η σειρά δεν έχει νόημα για $z = z_0$.)*

(ii) *Αν $R = 0$, τότε ο δακτύλιος σύγκλισης είναι ολόκληρο το επίπεδο εκτός του σημείου z_0: $D(z_0; 0, +\infty) = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. Η δυναμοσειρά συγκλίνει (και, μάλιστα, απολύτως) για κάθε $z \neq z_0$ και συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. Από το Θεώρημα 8.5 συνεπάγεται ότι η συνάρτηση που ορίζεται από τη δυναμοσειρά στο $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ είναι αναλυτική στο $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$.*

(iii) *Αν $0 < R < +\infty$, τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει (και, μάλιστα, απολύτως) για κάθε $z \in D(z_0; R, +\infty) \cup \{\infty\}$ και αποκλίνει για κάθε $z \in D(z_0; 0, R) = D(z_0; R) \setminus \{z_0\}$. Για τα σημεία z του κύκλου $C(z_0; R)$ δεν υπάρχει γενικό συμπέρασμα. Ανάλογα με τη συγκεκριμένη δυναμοσειρά, αυτή συγκλίνει για κάποια σημεία $z \in C(z_0; R)$ και αποκλίνει για τα υπόλοιπα. Τέλος, η δυναμοσειρά συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $D(z_0; R, +\infty)$ και από το Θεώρημα 8.5 συνεπάγεται ότι η συνάρτηση που ορίζεται από τη δυναμοσειρά στον δακτύλιο $D(z_0; R, +\infty)$ είναι αναλυτική στον $D(z_0; R, +\infty)$.*

Στις περιπτώσεις (ii) και (iii), όπου $R < +\infty$ και η συνάρτηση, έστω s, που ορίζεται από τη δυναμοσειρά, είναι αναλυτική στον δακτύλιο σύγκλισης $D(z_0; R, +\infty)$, ισχύει

$$s(z) = \sum_{-\infty}^{n=-1} a_n(z-z_0)^n \qquad \text{για } \ z \in D(z_0; R, +\infty)$$

και για τις παραγώγους έχουμε

$$s^{(k)}(z) = \sum_{-\infty}^{n=-1} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(z-z_0)^{n-k} \qquad \text{για } \ z \in D(z_0; R, +\infty).$$

Παράδειγμα 8.3.5. Η $\sum_{-\infty}^{n=-1} \frac{z^n}{-n} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{mz^m}$ έχει ακτίνα σύγκλισης 1 και δακτύλιο σύγκλισης τον $D(0; 1, +\infty)$.

Παράδειγμα 8.3.6. Η $\sum_{-\infty}^{n=-1} \frac{z^n}{n^2} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2 z^m}$ έχει ακτίνα σύγκλισης 1 και δακτύλιο σύγκλισης τον $D(0; 1, +\infty)$.

Παράδειγμα 8.3.7. Η $\sum_{-\infty}^{n=-1} \frac{z^n}{(-n)!} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m! z^m}$ έχει ακτίνα σύγκλισης 0 και δακτύλιο σύγκλισης τον $D(0; 0, +\infty)$.

Παράδειγμα 8.3.8. Η $\sum_{-\infty}^{n=-1} (-n)! z^n = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{m!}{z^m}$ έχει ακτίνα σύγκλισης $+\infty$ και κενό δακτύλιο σύγκλισης. Η σειρά αυτή συγκλίνει μόνο για $z = \infty$.

Ας δούμε, όμως, τί παραπάνω μπορούμε να πούμε για την συμπεριφορά στο ∞ της συνάρτησης που ορίζεται από μια δυναμοσειρά δεύτερου είδους. Αν, λοιπόν, έχουμε την συνάρτηση

$$s(z) = \sum_{-\infty}^{n=-1} a_n(z-z_0)^n \qquad \text{για } \ z \in D(z_0; R, +\infty),$$

τότε έχουμε ότι $s(\infty) = 0$. Μπορούμε να δούμε αμέσως ότι η s είναι συνεχής στο ∞. Πράγματι κάθε συνάρτηση

$$s_n(z) = \sum_{-n}^{k=-1} a_k(z-z_0)^k = \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-z_0}$$

είναι ρητή και είναι συνεχής στο ∞. Επειδή η ακολουθία συναρτήσεων (s_n) συγκλίνει στην s ομοιόμορφα στο $D(z_0; R+1, +\infty) \cup \{\infty\}$, έχουμε ότι και η s είναι συνεχής στο ∞. Μπορούμε, όμως, να δούμε ότι η s είναι και αναλυτική στο ∞. Πράγματι, ας γράψουμε

$$(z-z_0)s(z) = \sum_{-\infty}^{n=-1} a_n(z-z_0)^{n+1} = a_{-1} + \sum_{-\infty}^{n=-2} a_n(z-z_0)^{n+1} = a_{-1} + \sum_{-\infty}^{n=-1} a_{n-1}(z-z_0)^n.$$

Η $\sum_{-\infty}^{n=-1} a_{n-1}(z-z_0)^n$ είναι δυναμοσειρά δεύτερου είδους και άρα ορίζει συνάρτηση συνεχή στο ∞. Επομένως το όριο αυτής της συνάρτησης στο ∞ είναι ίσο με 0. Άρα $\lim_{z\to\infty}(z-z_0)s(z) = a_{-1}$ και, επομένως,

$$\lim_{z\to\infty} z(s(z) - s(\infty)) = \lim_{z\to\infty} zs(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{z}{z-z_0}(z-z_0)s(z) = a_{-1}.$$

Αυτό σημαίνει ότι η s είναι παραγωγίσιμη στο ∞ και, επειδή είναι παραγωγίσιμη σε κάθε z κοντά στο ∞, είναι αναλυτική στο ∞.

Τελειώνουμε περιγράφοντας ένα τρόπο περάσματος από δυναμοσειρές δεύτερου είδους σε δυναμοσειρές πρώτου είδους με τον οποίο μπορούμε να χειριστούμε δυναμοσειρές δεύτερου είδους χωρίς να χρειάζεται να απομνημονεύσουμε τον τύπο της ακτίνας σύγκλισης ειδικά γι' αυτό το είδος.

Θεωρούμε την δυναμοσειρά $\sum_{-\infty}^{n=-1} a_n(z-z_0)^n$ και χρησιμοποιούμε την αλλαγή μεταβλητής $w = \frac{1}{z-z_0}$. Τότε, μαζί με την αλλαγή μεταβλητής $m = -n$, έχουμε

$$\sum_{-\infty}^{n=-1} a_n(z-z_0)^n = \sum_{m=1}^{+\infty} a_{-m}w^m.$$

Επομένως, το z ανήκει στο σύνολο σύγκλισης της $\sum_{-\infty}^{n=-1} a_n(z-z_0)^n$ αν και μόνο αν το w ανήκει στο σύνολο σύγκλισης της $\sum_{m=1}^{+\infty} a_{-m}w^m$, δηλαδή σε δίσκο $D(0; R')$ μαζί, ίσως, με κάποια σημεία του κύκλου $C(0; R')$. Η σχέση $|w| < R'$ γράφεται ισοδύναμα $|z-z_0| > \frac{1}{R'}$, οπότε, αν ορίσουμε $R = \frac{1}{R'}$, έχουμε ότι η $\sum_{-\infty}^{n=-1} a_n(z-z_0)^n$ συγκλίνει για $z \in D(z_0; R, +\infty) \cup \{\infty\}$ μαζί, ίσως, με κάποια σημεία του $C(z_0; R)$. Επίσης, μπορούμε έτσι να βρούμε τον τύπο υπολογισμού της ακτίνας R από τον τύπο υπολογισμού της R', γράφοντας

$$R = \frac{1}{R'} = \overline{\lim}\ \sqrt[m]{|a_{-m}|}.$$

Τέλος, έχουμε την αναλυτικότητα της $s(z) = \sum_{-\infty}^{n=-1} a_n(z-z_0)^n$ στον δακτύλιο $D(z_0; R, +\infty)$ από την αναλυτικότητα της $t(w) = \sum_{m=1}^{+\infty} a_{-m}w^m$ στον δακτύλιο $D(0; 0, R')$, αφού είναι

$$s(z) = t(w) = t\Big(\frac{1}{z-z_0}\Big)$$

και η $w = \frac{1}{z-z_0}$ είναι αναλυτική από το $D(z_0; R, +\infty)$ στο $D(0; 0, R')$. Αλλά έχουμε και την παραγωγισιμότητα της s στο ∞ από την παραγωγισιμότητα της t στο 0. Πράγματι, επειδή $t(0) = 0$, έχουμε

$$\lim_{z\to\infty} z(s(z) - s(\infty)) = \lim_{z\to\infty} zs(z) = \lim_{w\to 0}\Big(z_0 + \frac{1}{w}\Big)t(w) = \lim_{w\to 0}\frac{t(w)}{w} = t'(0) = a_{-1}.$$

Άρα η s είναι αναλυτική στο $D(z_0; R, +\infty) \cup \{\infty\}$.

Δυναμοσειρές τρίτου είδους. Το τρίτο είδος δυναμοσειρών είναι συνδυασμός των δυο προηγουμένων και σ' αυτό εντάσσονται οι

$$\begin{aligned}\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n &= \sum_{-\infty}^{n=-1} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n \\ &= \cdots + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots.\end{aligned}$$

Κάθε τέτοια **δυναμοσειρά** έχει **κέντρο** z_0 και **συντελεστές** a_n. Στην περίπτωση που η μια από τις δυο δυναμοσειρές που αποτελούν την $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ έχει όλους τους συντελεστές της ίσους με 0 τότε, φυσικά, καταλήγουμε σε μια από τις δυο προηγούμενες περιπτώσεις, οπότε ας υποθέσουμε ότι δεν ισχύει αυτή η περίπτωση. Τότε η δυναμοσειρά $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ δεν έχει νόημα για $z = z_0$ και για $z = \infty$ ή, με άλλα λόγια, έχει νόημα μόνο αν $0 < |z - z_0| < +\infty$. Λέμε ότι η δυναμοσειρά **συγκλίνει** αν και οι δυο δυναμοσειρές $\sum_{-\infty}^{n=-1} a_n(z-z_0)^n$ και $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ συγκλίνουν και σε κάθε άλλη περίπτωση λέμε ότι η δυναμοσειρά **αποκλίνει**. Άρα για να συγκλίνει η $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ θα πρέπει το z να ανήκει στον δακτύλιο σύγκλισης της $\sum_{-\infty}^{n=-1} a_n(z-z_0)^n$ (ή να είναι κάποιο ειδικό σημείο του αντίστοιχου συνοριακού κύκλου) *και* στον δίσκο σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ (ή να είναι κάποιο ειδικό σημείο του αντίστοιχου συνοριακού κύκλου). Έστω, λοιπόν, ότι R_1 είναι η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{-\infty}^{n=-1} a_n(z-z_0)^n$ και R_2 η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$. Δηλαδή, ο δακτύλιος σύγκλισης της πρώτης είναι ο $D(z_0; R_1, +\infty)$ και ο δίσκος σύγκλισης της δεύτερης είναι ο $D(z_0; R_2)$. Τώρα διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις.

(i) Αν $R_1 < R_2$, τότε η τομή των $D(z_0; R_1, +\infty)$ και $D(z_0; R_2)$ είναι ο δακτύλιος $D(z_0; R_1, R_2)$ και η αρχική δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε z στον δακτύλιο αυτόν και πιθανόν και για μερικά σημεία των συνοριακών κύκλων $C(z_0; R_1)$, $C(z_0; R_2)$.

(ii) Αν $R_1 = R_2$, τότε οι $D(z_0; R_1, +\infty)$ και $D(z_0; R_2)$ δεν τέμνονται, οπότε η δυναμοσειρά συγκλίνει, ίσως, για μερικά σημεία του κοινού συνοριακού κύκλου $C(z_0; R_1) = C(z_0; R_2)$.

(iii) Αν $R_1 > R_2$, τότε η δυναμοσειρά αποκλίνει για κάθε $z \neq z_0, \infty$.

Όταν $R_1 < R_2$, ο δακτύλιος $D(z_0; R_1, R_2)$ ονομάζεται **δακτύλιος σύγκλισης** της δυναμοσειράς $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 8.13. *Έστω δυναμοσειρά $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ και έστω $R_1 < R_2$, όπου R_1 και R_2 είναι οι ακτίνες σύγκλισης της $\sum_{-\infty}^{n=-1} a_n(z-z_0)^n$ και της $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$, αντιστοίχως. Τότε:*

[α] *Η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως για κάθε $z \in D(z_0; R_1, R_2)$.*

[β] *Η δυναμοσειρά αποκλίνει για κάθε $z \in D(z_0; R_1) \cup D(z_0; R_2, +\infty)$.*

[γ] *Η δυναμοσειρά συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $D(z_0; R_1, R_2)$.*

Απόδειξη. Όλα είναι άμεσα βάσει της προηγούμενης συζήτησης. □

Στην περίπτωση που ισχύει $R_1 < R_2$, όπως στην Πρόταση 8.13, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση, έστω s, που ορίζεται από την $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ στον δακτύλιο σύγκλισης $D(z_0; R_1, R_2)$ είναι αναλυτική στον $D(z_0; R_1, R_2)$. Πράγματι, έχουμε πει ότι η συνάρτηση, έστω s_1, που ορίζεται από την $\sum_{-\infty}^{n=-1} a_n(z-z_0)^n$ στον δακτύλιο $D(z_0; R_1, +\infty)$ είναι αναλυτική στον $D(z_0; R_1, +\infty)$ και η συνάρτηση, έστω s_2, που ορίζεται από την $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ στον δίσκο $D(z_0; R_2)$ είναι αναλυτική στον $D(z_0; R_2)$. Τώρα στην τομή των δυο συνόλων, δηλαδή στον $D(z_0; R_1, R_2)$, ισχύει

$$s(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{-\infty}^{n=-1} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n = s_1(z) + s_2(z),$$

οπότε η s είναι αναλυτική στον $D(z_0; R_1, R_2)$.

Παράδειγμα 8.3.9. Θεωρούμε τη δυναμοσειρά $\sum_{-\infty}^{n=-1} \frac{2^n}{-n} z^n + 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} z^n$.
Για την $\sum_{-\infty}^{n=-1} \frac{2^n}{-n} z^n$ υπολογίζουμε $\overline{\lim} \sqrt[m]{|\frac{2^{-m}}{m}|} = \lim \frac{1}{2\sqrt[m]{m}} = \frac{1}{2}$, οπότε η ακτίνα σύγκλισής της είναι ίση με $\frac{1}{2}$.
Για την $1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} z^n$ γνωρίζουμε ήδη ότι έχει ακτίνα σύγκλισης ίση με 1.
Άρα η $\sum_{-\infty}^{n=-1} \frac{2^n}{-n} z^n + 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} z^n$ έχει δακτύλιο σύγκλισης τον $D(0; \frac{1}{2}, 1)$.

Ασκήσεις.

8.3.1. Βρείτε τις ακτίνες σύγκλισης και τους δίσκους σύγκλισης των $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$ όταν $a_n = n^{13}$, $a_n = \frac{1}{n^5}$, $a_n = \frac{1}{n^n}$, $a_n = n^{\log n}$, $a_n = (\log n)^n$, $a_n = \frac{n!}{n^n}$, $a_n = \frac{(n!)^2}{n^n}$, $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

8.3.2. Βρείτε τις ακτίνες σύγκλισης και τους δακτύλιους σύγκλισης των $\sum_{-\infty}^{n=-1} a_n z^n$ όταν $a_n = n^3$, $a_n = \frac{1}{n^2}$, $a_n = \frac{1}{2^n}$, $a_n = 3^n$, $a_n = \frac{1}{(-n)!n^n}$.

8.3.3. Βρείτε τον δακτύλιο σύγκλισης της $\sum_{-\infty}^{n=-1}(-1)^n z^n + \sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{2i})^{n+1} z^n$ και υπολογίστε το άθροισμά της στον δακτύλιο σύγκλισης.

8.3.4. [α] Γράψτε την $\frac{1}{z-1}$ ως δυναμοσειρά με δίσκο σύγκλισης τον $D(0;1)$ και ως δυναμοσειρά με δακτύλιο σύγκλισης τον $D(0;1,+\infty)$.

[β] Γράψτε την $\frac{1}{(z-3)(z-4)}$ ως δυναμοσειρά με δίσκο σύγκλισης τον $D(0;3)$ και ως δυναμοσειρά με δακτύλιο σύγκλισης τον $D(0;3,4)$ και ως δυναμοσειρά με δακτύλιο σύγκλισης τον $D(0;4,+\infty)$.

8.3.5. Αν $m \in \mathbb{N}$, γράψτε την $\frac{1}{(1-z)^m}$ ως δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, προσδιορίζοντας την ακτίνα σύγκλισής της. Ξεκινήστε με τη γεωμετρική δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$.

8.3.6. Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης της

$$1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)b(b+1)\cdots(b+n-1)}{1\cdot 2\cdots n\cdot c(c+1)\cdots(c+n-1)} z^n \quad (c \neq 0, -1, -2, \dots).$$

Η δυναμοσειρά αυτή ονομάζεται **υπεργεωμετρική σειρά** με παραμέτρους a, b, c. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $w = F(z; a, b, c)$, που ορίζεται από την υπεργεωμετρική σειρά στον δίσκο σύγκλισής της, είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$z(1-z)w'' + (c - (a+b+1)z)w' - abw = 0.$$

8.3.7. [α] Αποδείξτε ότι, αν δυο δυναμοσειρές του είδους $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ με θετικές ακτίνες σύγκλισης ορίζουν την ίδια συνάρτηση στην τομή των δίσκων σύγκλισής τους, τότε οι δυναμοσειρές είναι ίδιες (δηλαδή, έχουν τα ίδια αντίστοιχα a_n).

[β] Αποδείξτε το αντίστοιχο του [α] για δυο δυναμοσειρές του είδους $\sum_{-\infty}^{n=-1} a_n(z-z_0)^n$.

[γ] Μπορείτε να αποδείξετε κάτι ανάλογο για δυο δυναμοσειρές του είδους $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$;

8.3.8. Έστω $0 < R < +\infty$ και δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$.

[α] Αν η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως για κάποιον $z \in C(z_0;R)$, αποδείξτε ότι συγκλίνει απολύτως για κάθε $z \in \mathrm{cl}\, D(z_0;R)$.

[β] Αν η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάποιον $z \in C(z_0;R)$, αποδείξτε ότι συγκλίνει απολύτως για κάθε $z \in D(z_0;R)$.

8.3.9. Έστω R', R'' και R οι ακτίνες σύγκλισης των $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n{}'(z-z_0)^n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n{}''(z-z_0)^n$ και $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n{}' + a_n{}'')(z-z_0)^n$, αντιστοίχως. Αν $R' \neq R''$, αποδείξτε ότι $R = \min\{R', R''\}$. Αν $R' = R''$, αποδείξτε ότι $R \geq R' = R''$.

8.3.10. Έστω R η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$. Αν $0 < R < +\infty$, βρείτε τις ακτίνες σύγκλισης των $\sum_{n=1}^{+\infty} n^5 a_n(z-z_0)^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^7}(z-z_0)^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n! a_n(z-z_0)^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n!}(z-z_0)^n$.

8.3.11. Έστω $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Για ποιά z συγκλίνει η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{kn}}{n}$;

8.3.12. Για ποιά z συγκλίνει η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} z^{n!}$;

8.4 Σειρές Taylor και σειρές Laurent.

ΠΡΟΤΑΣΗ 8.14. *Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο ανοικτό σύνολο Ω, $z_0 \in \Omega$ και $D(z_0;R)$ ο μεγαλύτερος ανοικτός δίσκος με κέντρο z_0 ο οποίος περιέχεται στο Ω. Τότε υπάρχει μοναδική δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ ώστε να ισχύει*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n \qquad \text{για κάθε } z \in D(z_0;R).$$

Οι συντελεστές δίνονται από τους τύπους

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0;r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta \qquad \text{για } 0 < r < R.$$

Απόδειξη. Έστω τυχόν $z \in D(z_0; R)$, οπότε $|z - z_0| < R$. Επιλέγουμε ένα οποιοδήποτε r με $|z - z_0| < r < R$. Τότε $z \in D(z_0; r)$ και, σύμφωνα με τον τύπο του Cauchy, ισχύει

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0;r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{8.12}$$

Τώρα, για κάθε $\zeta \in C(z_0; r)$ γράφουμε

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0}\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0}\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\Big)^n$$

βάσει της γεωμετρικής σειράς $\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{+\infty} w^n$ με $w = \frac{z-z_0}{\zeta-z_0}$, αφού $|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}| = \frac{|z-z_0|}{r} < 1$.
Έτσι ο τύπος (8.12) γίνεται

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0;r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\Big)^n\, d\zeta. \tag{8.13}$$

Κατόπιν βλέπουμε ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty}\big(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\big)^n$ συγκλίνει, ως σειρά συναρτήσεων του ζ, ομοιόμορφα στο $C(z_0; r)$. Αυτό ισχύει λόγω του κριτηρίου ομοιόμορφης σύγκλισης του Weierstrass, διότι

$$\Big|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\Big|^n = \Big(\frac{|z - z_0|}{r}\Big)^n \qquad \text{για κάθε } \zeta \in C(z_0; r)$$

και

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{|z - z_0|}{r}\Big)^n < +\infty.$$

Από την Πρόταση 8.9 συνεπάγεται ότι μπορούμε να εναλλάξουμε την σειρά ολοκλήρωσης και άθροισης στον τύπο (8.13) και βρίσκουμε

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0;r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\Big(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\Big)^n d\zeta = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0;r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta\,(z - z_0)^n. \tag{8.14}$$

Από τους τύπους του Cauchy για τις παραγώγους μιας αναλυτικής συνάρτησης έχουμε ότι

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0;r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \tag{8.15}$$

οπότε η σχέση (8.14) γίνεται

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\,(z - z_0)^n.$$

Άρα ισχύει

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n \qquad \text{για κάθε } z \in D(z_0; R)$$

με

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Και, φυσικά, ισχύει

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0;r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta \qquad \text{για } 0 < r < R$$

λόγω της (8.15).

Το μόνο που απομένει είναι να αποδειχτεί η μοναδικότητα της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ ώστε να ισχύει

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n \qquad \text{για κάθε } z \in D(z_0; R). \tag{8.16}$$

Θεωρούμε οποιοδήποτε r με $0 < r < R$. Από τα αποτελέσματα που έχουμε για τις γενικές δυναμοσειρές, γνωρίζουμε ότι η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στον κύκλο $C(z_0; r)$, ο οποίος είναι συμπαγές υποσύνολο του δίσκου σύγκλισης $D(z_0; R)$. Άρα, σύμφωνα και με τα παραδείγματα 7.1.4 και 7.1.5, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ με $k \geq 0$ ισχύει

$$\begin{aligned}\int_{C(z_0;r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\, d\zeta &= \int_{C(z_0;r)} \frac{1}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\zeta - z_0)^n\, d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_{C(z_0;r)} (\zeta - z_0)^{n-k-1}\, d\zeta = 2\pi i a_k.\end{aligned}$$

Άρα οι συντελεστές της δυναμοσειράς ταυτίζονται με τους συντελεστές της δυναμοσειράς που βρήκαμε στο πρώτο μέρος της απόδειξης (στο μέρος που αφορά την ύπαρξη μιας δυναμοσειράς), οπότε η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ για την οποία ισχύει η (8.16) είναι μοναδική. $\square$

Σχόλιο. Εδώ πρέπει να κάνουμε μια παρατήρηση σχετικά με κάποιο "λεπτό" σημείο της προηγούμενης απόδειξης. Γενικά, όταν έχουμε μια δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ εννοείται ότι οι συντελεστές a_n δεν εξαρτώνται από τις τιμές που παίρνει ο z στον δίσκο σύγκλισης της δυναμοσειράς. Στον τύπο (8.14) της παραπάνω απόδειξης εμφανίζεται η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0;r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta\, (z - z_0)^n$$

με συντελεστές

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0;r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta$$

και, μέχρι αυτό το σημείο της απόδειξης, δεν είναι σαφές αν ο συντελεστής a_n εξαρτάται ή όχι από τις τιμές του z. Ο λόγος είναι ότι η ακτίνα r που εμφανίζεται στο συγκεκριμένο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα έχει επιλεγεί με βάση το z, αφού επιλέξαμε το r έτσι ώστε να είναι $|z - z_0| < r < R$. Όμως, *εκ των υστέρων* είδαμε ότι στην πραγματικότητα το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα που ορίζει τον a_n δεν εξαρτάται από το z. Αυτό ισχύει ακριβώς λόγω των τύπων του Cauchy για τις παραγώγους, δηλαδή των τύπων (8.15). Πρέπει, όμως, να τονιστεί ότι υπάρχει και ένας άλλος λόγος που το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0;r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta$$

δεν εξαρτάται από την τιμή του r στο διάστημα $(0, R)$. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$ είναι, ως συνάρτηση του ζ, αναλυτική στο $D(z_0; R) \setminus \{z_0\}$, οπότε, σύμφωνα με το παράδειγμα 7.2.2, έχουμε

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0;r_1)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0;r_2)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta \qquad \text{για } 0 < r_1 < r_2 < R. \tag{8.17}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Η δυναμοσειρά*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$$

με συντελεστές

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0;r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta \qquad \text{για } 0<r<R$$

ονομάζεται **σειρά Taylor** *της f στον δίσκο $D(z_0;R)$, τον μεγαλύτερο ανοικτό δίσκο με κέντρο z_0 ο οποίος περιέχεται στο σύνολο αναλυτικότητας της f.*

Τονίζουμε ότι *η συνάρτηση f ταυτίζεται με την σειρά Taylor της στον μεγαλύτερο ανοικτό δίσκο με κέντρο z_0 ο οποίος περιέχεται στο σύνολο αναλυτικότητας της f.*

Παράδειγμα 8.4.1. Η συνάρτηση $f(z)=\frac{1}{1-z}$ είναι αναλυτική στο ανοικτό σύνολο $\mathbb{C}\setminus\{1\}$. Ο μεγαλύτερος ανοικτός δίσκος με κέντρο 0 ο οποίος περιέχεται στο $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ είναι ο $D(0;1)$. Για να βρούμε τη σειρά Taylor της f στον δίσκο $D(0;1)$ υπολογίζουμε τις διαδοχικές παραγώγους:

$$f(z)=\frac{1}{1-z}, \qquad f'(z)=\frac{1}{(1-z)^2}, \qquad f''(z)=\frac{2}{(1-z)^3}, \qquad f'''(z)=\frac{2\cdot 3}{(1-z)^4}$$

και, γενικότερα,

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{(1-z)^{n+1}} \qquad \text{για } n\geq 0.$$

Άρα

$$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=1 \qquad \text{για } n\geq 0$$

και η σειρά Taylor της f είναι η $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$, οπότε

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{+\infty} z^n \qquad \text{για κάθε } z\in D(0;1).$$

Ο τύπος αυτός είναι, φυσικά, γνωστός!

Παράδειγμα 8.4.2. Η συνάρτηση $f(z)=\frac{1}{1+z^2}=\frac{1}{(z+i)(z-i)}$ είναι αναλυτική στο ανοικτό σύνολο $\mathbb{C}\setminus\{i,-i\}$. Ο μεγαλύτερος ανοικτός δίσκος με κέντρο 0 ο οποίος περιέχεται στο $\mathbb{C}\setminus\{i,-i\}$ είναι ο $D(0;1)$. Για να βρούμε τη σειρά Taylor της f στον δίσκο $D(0;1)$ υπολογίζουμε τις παραγώγους της f. Κατ' αρχάς γράφουμε την f ώς άθροισμα "απλών κλασμάτων":

$$f(z)=-\frac{1}{2i}\Big(\frac{1}{i-z}+\frac{1}{i+z}\Big).$$

Επομένως,

$$f^{(n)}(z)=-\frac{1}{2i}\Big(\frac{n!}{(i-z)^{n+1}}+(-1)^n\frac{n!}{(i+z)^{n+1}}\Big) \qquad \text{για } n\geq 0.$$

Άρα

$$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{1+(-1)^n}{2i^n} \qquad \text{για } n\geq 0.$$

Αν ο n είναι περιττός, τότε $a_n=0$. Αν ο n είναι άρτιος, τότε $a_n=\frac{1}{i^n}=(-1)^{\frac{n}{2}}$ και η σειρά Taylor της f είναι η $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k z^{2k}$, οπότε

$$\frac{1}{1+z^2}=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k z^{2k} \qquad \text{για κάθε } z\in D(0;1).$$

Φυσικά, τον ίδιο τύπο μπορούμε να βρούμε πιο εύκολα, χρησιμοποιώντας τη σειρά Taylor της $\frac{1}{1-z}$, δηλαδή τη γεωμετρική σειρά: στη θέση του z στον τύπο $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ χρησιμοποιούμε τον $-z^2$ και βρίσκουμε $\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^{2n}$. Είναι απαραίτητο να παρατηρήσουμε ότι $-z^2 \in D(0;1)$ αν και μόνο αν $z \in D(0;1)$. Από τη στιγμή που έχουμε βρει *κάποια* δυναμοσειρά η οποία ταυτίζεται με τη συνάρτησή μας στον δίσκο $D(0;1)$, αυτή η σειρά *πρέπει* να είναι η σειρά Taylor της συνάρτησης. Αυτό προκύπτει από την Πρόταση 8.14 και ειδικά από την μοναδικότητα της δυναμοσειράς η οποία ταυτίζεται με μια συνάρτηση στον μεγαλύτερο δίσκο με δεδομένο κέντρο ο οποίος περιέχεται στο σύνολο αναλυτικότητας της συνάρτησης.

Παράδειγμα 8.4.3. Η εκθετική συνάρτηση $f(z) = e^z$ είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$ και ο μεγαλύτερος ανοικτός δίσκος με κέντρο 0 ο οποίος περιέχεται στο $\mathbb{C}$ είναι ο $D(0;+\infty) = \mathbb{C}$. Οι παράγωγοι της f είναι

$$f^{(n)}(z) = e^z \qquad \text{για κάθε } n \geq 0,$$

οπότε οι συντελεστές της σειράς Taylor της f είναι οι

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n!} \qquad \text{για κάθε } n \geq 0.$$

Άρα η σειρά Taylor της f είναι η $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n$ και, επομένως,

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n \qquad \text{για κάθε } z.$$

Παράδειγμα 8.4.4. Η συνάρτηση $f(z) = \cos z$, που ορίστηκε στην άσκηση 6.2.6, είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$ και ο μεγαλύτερος ανοικτός δίσκος με κέντρο 0 ο οποίος περιέχεται στο $\mathbb{C}$ είναι ο $D(0;+\infty) = \mathbb{C}$. Οι παράγωγοι της f είναι

$$f^{(n)}(z) = (-1)^{\frac{n}{2}} \cos z \quad \text{για άρτιο } n \qquad \text{και} \qquad f^{(n)}(z) = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \sin z \quad \text{για περιττό } n.$$

Άρα οι συντελεστές της σειράς Taylor της f είναι οι

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{n!} \quad \text{για άρτιο } n \qquad \text{και} \qquad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 0 \quad \text{για περιττό } n.$$

Άρα η σειρά Taylor της f είναι η $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}$ και, επομένως,

$$\cos z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} \qquad \text{για κάθε } z.$$

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι

$$\sin z = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} z^{2k-1} \qquad \text{για κάθε } z.$$

Ένας άλλος τρόπος για να βρούμε τις σειρές Taylor των $\cos z$ και $\sin z$ είναι να χρησιμοποιήσουμε τους ορισμούς τους και τη σειρά Taylor της e^z. Για παράδειγμα:

$$\begin{aligned}\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(iz)^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(-iz)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n(1+(-1)^n)}{2\,n!} z^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{i^{2k}}{(2k)!} z^{2k} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}.\end{aligned}$$

Έτσι βρίσκουμε μια δυναμοσειρά η οποία ταυτίζεται με την $\cos z$ στον μεγαλύτερο δίσκο με κέντρο 0 ο οποίος περιέχεται στο σύνολο αναλυτικότητας της $\cos z$, οπότε, λόγω μοναδικότητας, η σειρά αυτή είναι ακριβώς η σειρά Taylor της $\cos z$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 8.15. *Εστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο ανοικτό σύνολο Ω και $D(z_0; R_1, R_2)$ ένας μέγιστος ανοικτός δακτύλιος με κέντρο z_0 ο οποίος περιέχεται στο Ω. Τότε υπάρχει μοναδική δυναμοσειρά $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ ώστε να ισχύει*

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n \qquad \text{για κάθε } z \in D(z_0; R_1, R_2).$$

Οι συντελεστές δίνονται από τους τύπους

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0;r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta \qquad \text{για } R_1 < r < R_2.$$

Απόδειξη. Έστω τυχόν $z \in D(z_0; R_1, R_2)$, οπότε $R_1 < |z - z_0| < R_2$. Επιλέγουμε δυο οποιαδήποτε r_1, r_2 ώστε $R_1 < r_1 < |z - z_0| < r_2 < R_2$. Τότε $z \in D(z_0; r_1, r_2)$ και ισχύει

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0;r_2)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0;r_1)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{8.18}$$

Για να αποδείξουμε τον τύπο (8.18) θεωρούμε την συνάρτηση $g : D(z_0; R_1, R_2) \to \mathbb{C}$ με τύπο

$$g(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}, & \text{αν } \zeta \in D(z_0; R_1, R_2), \zeta \neq z \\ f'(z), & \text{αν } \zeta = z \end{cases}$$

η οποία, ως συνάρτηση του ζ, είναι αναλυτική στον δακτύλιο $D(z_0; R_1, R_2)$ εκτός, ίσως, στο σημείο z στο οποίο, όμως, είναι συνεχής. Βάσει του σχολίου που κάναμε αμέσως μετά από το Θεώρημα 7.6, η g είναι αναλυτική και στο z και άρα σε ολόκληρο τον δακτύλιο $D(z_0; R_1, R_2)$. Τώρα, σύμφωνα με το παράδειγμα 7.2.2, έχουμε

$$\int_{C(z_0;r_1)} g(\zeta)\, d\zeta = \int_{C(z_0;r_2)} g(\zeta)\, d\zeta,$$

οπότε

$$\int_{C(z_0;r_1)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - f(z)\int_{C(z_0;r_1)} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_{C(z_0;r_2)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - f(z)\int_{C(z_0;r_2)} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{8.19}$$

Τώρα παρατηρούμε ότι

$$\int_{C(z_0;r_1)} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta = 2\pi i n(C(z_0; r_1); z) = 0, \qquad \int_{C(z_0;r_2)} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta = 2\pi i n(C(z_0; r_2); z) = 2\pi i \tag{8.20}$$

διότι το z είναι έξω από τον κύκλο $C(z_0; r_1)$ και μέσα στον $C(z_0; r_2)$.
Από τις (8.19) και (8.20) προκύπτει η (8.18).
Τώρα, για κάθε $\zeta \in C(z_0; r_2)$ γράφουμε

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0}\frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0}\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\Big)^n$$

βάσει της γεωμετρικής σειράς $\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{+\infty} w^n$ με $w = \frac{z-z_0}{\zeta-z_0}$, αφού $|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}| = \frac{|z-z_0|}{r_2} < 1$.
Επίσης, για κάθε $\zeta \in C(z_0; r_1)$ γράφουμε (προσέξτε την αλλαγή!)

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = -\frac{1}{z - z_0}\frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} = -\frac{1}{z - z_0}\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\Big)^n$$

πάλι βάσει της γεωμετρικής σειράς $\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{+\infty} w^n$ με $w = \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}$, αφού $|\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}| = \frac{r_1}{|z-z_0|} < 1$. Έτσι ο τύπος (8.18) γίνεται

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0;r_2)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{z-z_0}{\zeta - z_0}\Big)^n d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0;r_1)} \frac{f(\zeta)}{z - z_0}\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{\zeta-z_0}{z - z_0}\Big)^n d\zeta. \tag{8.21}$$

Ακριβώς όπως στην απόδειξη της Πρότασης 8.14, βλέπουμε με το κριτήριο ομοιόμορφης σύγκλισης του Weierstrass ότι οι σειρές μέσα στα δυο ολοκληρώματα της σχέσης (8.21) συγκλίνουν ομοιόμορφα και, αφού εναλλάξουμε τη σειρά ολοκλήρωσης και άθροισης, βρίσκουμε

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0;r_2)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\Big(\frac{z-z_0}{\zeta - z_0}\Big)^n d\zeta + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0;r_1)} \frac{f(\zeta)}{z - z_0}\Big(\frac{\zeta-z_0}{z - z_0}\Big)^n d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0;r_2)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta\,(z-z_0)^n \\ &\quad + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0;r_1)} f(\zeta)(\zeta-z_0)^n\, d\zeta\,\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Στην τελευταία σειρά αλλάζουμε το $n+1$ σε $-n$ και βρίσκουμε

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0;r_2)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta\,(z-z_0)^n \\ &\quad + \sum_{-\infty}^{n=-1}\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0;r_1)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta\,(z-z_0)^n. \end{aligned} \tag{8.22}$$

Τώρα, επειδή η $\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}$ είναι, ως συνάρτηση του ζ, αναλυτική στον δακτύλιο $D(z_0;R_1,R_2)$, ισχύει

$$\int_{C(z_0;r_1)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta = \int_{C(z_0;r_2)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta \qquad \text{για } R_1 < r_1 < r_2 < R_2.$$

Άρα οι συντελεστές των δυο σειρών στον τύπο (8.22) δεν εξαρτώνται από την τιμή που παίρνουν οι ακτίνες r_1, r_2, οπότε θεωρούμε στη θέση των r_1, r_2 οποιοδήποτε r με $R_1 < r < R_2$ και γράφουμε

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n \qquad \text{για κάθε } z \in D(z_0;R_1,R_2)$$

με

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0;r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta \qquad \text{για } R_1 < r < R_2.$$

Τώρα θα αποδείξουμε τη μοναδικότητα της δυναμοσειράς $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$.
Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει δυναμοσειρά $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ ώστε να ισχύει

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n \qquad \text{για κάθε } z \in D(z_0;R_1,R_2). \tag{8.23}$$

Θεωρούμε οποιονδήποτε r με $R_1 < r < R_2$. Η $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στον $C(z_0;r)$, ο οποίος είναι συμπαγές υποσύνολο του δακτύλιου σύγκλισης $D(z_0;R_1,R_2)$. Άρα για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ ισχύει

$$\int_{C(z_0;r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\, d\zeta = \int_{C(z_0;r)} \frac{1}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(\zeta - z_0)^n\, d\zeta$$
$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n \int_{C(z_0;r)} (\zeta - z_0)^{n-k-1}\, d\zeta = 2\pi i a_k.$$

Άρα οι συντελεστές της δυναμοσειράς ταυτίζονται με τους συντελεστές της δυναμοσειράς που βρήκαμε στο πρώτο μέρος της απόδειξης, οπότε η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ για την οποία ισχύει η (8.23) είναι μοναδική. □

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Η δυναμοσειρά*

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$$

με συντελεστές

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0;r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta \qquad \text{για } R_1 < r < R_2$$

ονομάζεται ***σειρά Laurent*** *της f στον δακτύλιο $D(z_0; R_1, R_2)$, τον μεγαλύτερο ανοικτό δακτύλιο με κέντρο z_0 ο οποίος περιέχεται στο σύνολο αναλυτικότητας της f.*

Παράδειγμα 8.4.5. Η $f(z) = \frac{1}{z}$ είναι αναλυτική στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ο δακτύλιος $D(0; 0, +\infty) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ είναι μέγιστος ανοικτός δακτύλιος (και, μάλιστα, ο μόνος) με κέντρο 0 ο οποίος περιέχεται στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Για να βρούμε τη σειρά Laurent της f στον δακτύλιο $D(0; 0, +\infty)$ υπολογίζουμε τους συντελεστές a_n. Θεωρούμε οποιονδήποτε r με $0 < r < +\infty$, και τότε

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0;r)} \frac{1/\zeta}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0;r)} \frac{1}{\zeta^{n+2}}\, d\zeta \qquad \text{για κάθε } n.$$

Αν $n \neq -1$, τότε $a_n = 0$ και, αν $n = -1$, τότε $a_{-1} = 1$. Άρα η σειρά Laurent της f στον δακτύλιο $D(0; 0, +\infty)$ είναι η $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n z^n = z^{-1}$ και, επομένως, ισχύει (το απολύτως προφανές) $\frac{1}{z} = z^{-1}$ για κάθε $z \in D(0; 0, +\infty)$.

Στα επόμενα παραδείγματα θα εκμεταλλευτούμε την μοναδικότητα της σειράς Laurent για να βρούμε τις σειρές Laurent διαφόρων συναρτήσεων χωρίς να προσφύγουμε στους υπολογισμούς με επικαμπύλια ολοκληρώματα: βρίσκουμε με έμμεσο τρόπο (μέσω βοηθητικών συναρτήσεων) μια δυναμοσειρά που ταυτίζεται με τη δεδομένη συνάρτηση σε κάποιον δακτύλιο, ο οποίος περιέχεται στο σύνολο αναλυτικότητας της συνάρτησης, οπότε η σειρά που βρήκαμε είναι ακριβώς η σειρά Laurent που ζητάμε.

Παράδειγμα 8.4.6. Η $f(z) = \frac{1}{1-z}$ είναι αναλυτική στο ανοικτό σύνολο $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Έχουμε δει ότι ο μέγιστος ανοικτός δίσκος με κέντρο 0 ο οποίος περιέχεται στο $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ είναι ο $D(0; 1)$ και ότι η σειρά Taylor της f σ' αυτόν τον δίσκο είναι η $\sum_{n=0} z^n$.
Ένας μέγιστος ανοικτός δακτύλιος κέντρου 0 ο οποίος περιέχεται στο $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ είναι ο $D(0; 1, +\infty)$. Για να βρούμε τη σειρά Laurent της f στον δακτύλιο αυτόν, μπορούμε να υπολογίσουμε τους συντελεστές a_n με τους τύπους με τα επικαμπύλια ολοκληρώματα. Μπορούμε, όμως, να κάνουμε κάτι πιο απλό. Αν $z \in D(0; 1, +\infty)$, τότε $|z| > 1$, οπότε $|\frac{1}{z}| < 1$ και, επομένως,

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{-\infty}^{n=-1} (-1) z^n.$$

Λόγω μοναδικότητας, η σειρά Laurent της f στον δακτύλιο $D(0; 1, +\infty)$ είναι η $\sum_{-\infty}^{n=-1} (-1) z^n$.

Παράδειγμα 8.4.7. Η $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ είναι αναλυτική στο ανοικτό σύνολο $\mathbb{C}\setminus\{1,2\}$. Υπάρχει ένας μέγιστος ανοικτός δίσκος με κέντρο 0 και δυο μέγιστοι ανοικτοί δακτύλιοι με κέντρο 0 οι οποίοι περιέχονται στο $\mathbb{C}\setminus\{1,2\}$: ο δίσκος $D(0;1)$ και οι δακτύλιοι $D(0;1,2)$ και $D(0;2,+\infty)$. Για να βρούμε τις αντίστοιχες σειρές Taylor και Laurent της f, γράφουμε την f ως άθροισμα "απλών κλασμάτων" ως εξής:

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}.$$

Αν $z\in D(0;1)$, τότε $|z|<1$ και $|\frac{z}{2}|<1$, οπότε

$$f(z)=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}+\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{z}{2}\Big)^n+\sum_{n=0}^{+\infty}z^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(1-\frac{1}{2^{n+1}}\Big)z^n.$$

Άρα η σειρά Taylor της f στον δίσκο $D(0;1)$ είναι η $\sum_{n=0}^{+\infty}(1-\frac{1}{2^{n+1}})z^n$.
Αν $z\in D(0;1,2)$, τότε $|\frac{1}{z}|<1$ και $|\frac{z}{2}|<1$, οπότε

$$\begin{aligned}f(z)&=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{z}{2}\Big)^n-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{1}{z}\Big)^n\\&=\sum_{-\infty}^{n=-1}(-1)z^n+\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(-\frac{1}{2^{n+1}}\Big)z^n.\end{aligned}$$

Άρα η σειρά Laurent της f στον δακτύλιο $D(0;1,2)$ είναι η $\sum_{-\infty}^{n=-1}(-1)z^n+\sum_{n=0}^{+\infty}(-\frac{1}{2^{n+1}})z^n$ με συντελεστές $a_n=-1$, αν $n\leq-1$, και $a_n=-\frac{1}{2^{n+1}}$, αν $n\geq 0$.
Αν $z\in D(0;2,+\infty)$, τότε $|\frac{1}{z}|<1$ και $|\frac{2}{z}|<1$, οπότε

$$f(z)=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}}-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{2}{z}\Big)^n-\frac{1}{z}\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{z}\Big)^n=\sum_{-\infty}^{n=-2}\Big(\frac{1}{2^{n+1}}-1\Big)z^n.$$

Άρα η σειρά Laurent της f στον δακτύλιο $D(0;2,+\infty)$ είναι η $\sum_{-\infty}^{n=-2}(\frac{1}{2^{n+1}}-1)z^n$ με συντελεστές $a_n=\frac{1}{2^{n+1}}-1$, αν $n\leq-2$, και $a_n=0$, αν $n\geq-1$.

Παράδειγμα 8.4.8. Η $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ είναι αναλυτική στο ανοικτό σύνολο $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Ο $D(0;0,+\infty)=\mathbb{C}\setminus\{0\}$ είναι ο μόνος μέγιστος ανοικτός δακτύλιος με κέντρο 0 ο οποίος περιέχεται στο $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Βρίσκουμε τη σειρά Laurent της f στον δακτύλιο $D(0;0,+\infty)$ χρησιμοποιώντας τη σειρά Taylor της e^z στο $\mathbb{C}$. Στην ισότητα $e^z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}z^n$ αντικαθιστούμε τον z με τον $\frac{1}{z}$ και βρίσκουμε

$$e^{\frac{1}{z}}=\sum_{-\infty}^{n=-1}\frac{1}{(-n)!}z^n+1\qquad\text{για κάθε } z\neq 0.$$

Άρα η σειρά Laurent της f στον δακτύλιο $D(0;0,+\infty)$ είναι η $\sum_{-\infty}^{n=-1}\frac{1}{(-n)!}z^n+1$ με συντελεστές $a_n=\frac{1}{(-n)!}$, αν $n\leq 0$, και $a_n=0$, αν $n\geq 1$.

Ασκήσεις.

8.4.1. Βρείτε τη σειρά Taylor της $\mathrm{Log}(1-z)$ με κέντρο $z_0=0$.

8.4.2. Έστω $0<|a|<|b|$. Βρείτε τις τρεις σειρές Laurent με κέντρο 0, τις δυο σειρές Laurent με κέντρο a και τις δυο σειρές Laurent με κέντρο b της συνάρτησης $\frac{z}{(z-a)(z-b)}$.

8.4.3. Έστω f αναλυτική στον $D(z_0;R)$ και $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n$ η σειρά Taylor της f.

[α] Αποδείξτε ότι, αν $0 \le r < R$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0+re^{it})|^2\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

[β] Αν η f είναι φραγμένη στον $D(z_0;R)$, δηλαδή ισχύει $|f(z)| \le M$ για $z \in D(z_0;R)$, αποδείξτε ότι

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 R^{2n} \le M^2.$$

[γ] Αν και η g είναι αναλυτική στον $D(z_0;R)$ με σειρά Taylor $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$, αποδείξτε ότι, αν $0 \le r < R$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{it})\,\overline{g(z_0+re^{it})}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\overline{b_n} r^{2n}.$$

8.4.4. Έστω f αναλυτική στον δακτύλιο $D(z_0;R_1,R_2)$. Χρησιμοποιώντας την αντίστοιχη σειρά Laurent της f, αποδείξτε ότι υπάρχουν δυο συναρτήσεις, f_1 και f_2, όπου η f_2 είναι αναλυτική στον δίσκο $D(z_0;R_2)$ και η f_1 είναι αναλυτική στον $D(z_0;R_1,+\infty)$, ώστε να ισχύει

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) \qquad \text{για } z \in D(z_0;R_1,R_2).$$

8.5 Ρίζες και η αρχή της ταυτότητας.

Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο ανοικτό σύνολο Ω και έστω $z_0 \in \Omega$. Θεωρούμε τον μεγαλύτερο δίσκο $D(z_0;R)$ ο οποίος περιέχεται στο Ω και την σειρά Taylor της f σ' αυτόν τον δίσκο, οπότε έχουμε

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n \qquad \text{για } z \in D(z_0;R).$$

Επειδή $a_0 = f(z_0)$, το z_0 είναι ρίζα της f αν και μόνο αν $a_0 = 0$.
Τώρα υποθέτουμε ότι το z_0 είναι ρίζα της f, οπότε $a_0 = 0$, και διακρίνουμε δυο περιπτώσεις.
Πρώτη περίπτωση: Ισχύει $a_n = 0$ για κάθε n.
Τότε, προφανώς, ισχύει $f(z) = 0$ για κάθε $z \in D(z_0;R)$, δηλαδή η f είναι ταυτοτικά 0 στον δίσκο $D(z_0;R)$. Βάσει των τύπων των a_n, η συνθήκη "$a_n = 0$ για κάθε n" ισοδυναμεί με την "$f^{(n)}(z_0) = 0$ για κάθε n".
Δεύτερη περίπτωση: Ισχύει $a_n \ne 0$ για τουλάχιστον ένα n.
Τότε θεωρούμε το ελάχιστο $n \ge 1$ για το οποίο ισχύει $a_n \ne 0$ και έστω ότι αυτό είναι το N. Δηλαδή έχουμε ότι $a_0 = a_1 = \ldots = a_{N-1} = 0$ και $a_N \ne 0$. Και πάλι, αυτό ισοδυναμεί με $f(z_0) = f^{(1)}(z_0) = \ldots = f^{(N-1)}(z_0) = 0$ και $f^{(N)}(z_0) \ne 0$. Τότε έχουμε ότι

$$f(z) = \sum_{n=N}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n \qquad \text{για } z \in D(z_0;R).$$

Η σχέση αυτή γράφεται

$$f(z) = (z-z_0)^N \sum_{n=N}^{+\infty} a_n(z-z_0)^{n-N} = (z-z_0)^N \sum_{n=0}^{+\infty} a_{N+n}(z-z_0)^n \qquad \text{για } z \in D(z_0;R).$$

Αφού η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{N+n}(z-z_0)^n = a_N + a_{N+1}(z-z_0) + a_{N+2}(z-z_0)^2 + \cdots$$

συγκλίνει στον δίσκο $D(z_0; R)$, ορίζει μια αναλυτική συνάρτηση $g : D(z_0; R) \to \mathbb{C}$. Τότε

$$f(z) = (z - z_0)^N g(z) \qquad \text{για } z \in D(z_0; R), \tag{8.24}$$

οπότε

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z - z_0)^N} \qquad \text{για } z \in D(z_0; R) \setminus \{z_0\}.$$

Η τιμή της g στο z_0 είναι, φυσικά, $g(z_0) = a_N = \frac{f^{(N)}(z_0)}{N!}$, οπότε έχουμε τον διπλό τύπο

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{(z-z_0)^N}, & \text{αν } z \in D(z_0; R) \setminus \{z_0\} \\ \frac{f^{(N)}(z_0)}{N!}, & \text{αν } z = z_0 \end{cases} \tag{8.25}$$

Παρατηρούμε ότι ο τύπος $\frac{f(z)}{(z-z_0)^N}$ ορίζει αναλυτική συνάρτηση σε ολόκληρο το $\Omega \setminus \{z_0\}$ και όχι μόνο στο $D(z_0; R) \setminus \{z_0\}$, οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η συνάρτηση g είναι ορισμένη σε ολόκληρο το Ω με τον διπλό τύπο

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{(z-z_0)^N}, & \text{αν } z \in \Omega \setminus \{z_0\} \\ \frac{f^{(N)}(z_0)}{N!}, & \text{αν } z = z_0 \end{cases}$$

Η συνάρτηση αυτή είναι αναλυτική σε ολόκληρο το Ω, διότι η $\frac{f(z)}{(z-z_0)^N}$ είναι αναλυτική στο $\Omega \setminus \{z_0\}$ και διότι ο περιορισμός της στον $D(z_0; R)$ είναι απλώς η αρχική συνάρτηση g του διπλού τύπου (8.25), πριν επεκταθεί στο Ω, η οποία είναι αναλυτική στον $D(z_0; R)$ και, επομένως, είναι αναλυτική και στο σημείο z_0. Η συνάρτηση $g : \Omega \to \mathbb{C}$ έχει στον δίσκο $D(z_0; R)$ σειρά Taylor την $a_N + a_{N+1}(z - z_0) + a_{N+2}(z - z_0)^2 + \cdots$.
Συνεχίζοντας στην ίδια περίπτωση, επειδή $g(z_0) = a_N \neq 0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο z_0, υπάρχει κάποιο r με $0 < r \leq R$ έτσι ώστε να ισχύει $g(z) \neq 0$ για κάθε $z \in D(z_0; r)$, οπότε από την (8.24) έχουμε

$$f(z) \neq 0 \qquad \text{για } z \in D(z_0; r) \setminus \{z_0\}.$$

Βάσει των προηγουμένων, έχουμε τον εξής ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο ανοικτό σύνολο Ω και έστω $z_0 \in \Omega$ με $f(z_0) = 0$. Επίσης, έστω $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ η σειρά Taylor της f στο σημείο z_0.*
Αν $a_n = 0$ για κάθε n, τότε λέμε ότι το z_0 είναι ρίζα πολλαπλότητας $+\infty$ της f.
Αν $a_0 = a_1 = \ldots = a_{N-1} = 0$ και $a_N \neq 0$, τότε λέμε ότι το z_0 είναι ρίζα πολλαπλότητας N της f.
Στην περίπτωση $f(z_0) = a_0 \neq 0$ λέμε ότι το z_0 είναι ρίζα πολλαπλότητας $N = 0$ της f.

Όπως είδαμε, αν το z_0 είναι ρίζα άπειρης πολλαπλότητας της f, τότε η f είναι ταυτοτικά 0 σε έναν δίσκο με κέντρο z_0 και, μάλιστα, στον μεγαλύτερο τέτοιο δίσκο ο οποίος περιέχεται στο σύνολο αναλυτικότητας της f. Αν το z_0 είναι ρίζα πεπερασμένης πολλαπλότητας της f, τότε υπάρχει κάποιος δίσκος $D(z_0; r)$ στον οποίο η f δεν έχει καμία άλλη ρίζα εκτός του z_0 και γι αυτό λέμε ότι η ρίζα z_0 είναι **μεμονωμένη**. Μάλιστα, είδαμε ότι αν η πολλαπλότητα της ρίζας z_0 είναι N, τότε η συνάρτηση $g(z) = \frac{f(z)}{(z-z_0)^N}$, η οποία είναι αναλυτική στο $\Omega \setminus \{z_0\}$, μπορεί να οριστεί και στο z_0 με $g(z_0) = a_N = \frac{f^{(N)}(z_0)}{N!}$ και τότε είναι αναλυτική στο Ω.

Παράδειγμα 8.5.1. Η συνάρτηση $e^{z^3} - 1$ είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$ και έχει σειρά Taylor με κέντρο το 0 την $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^{3n}$. Άρα ισχύει $e^{z^3} - 1 = z^3 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^{3(n-1)} = z^3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!} z^{3n} = z^3 g(z)$ για κάθε z, όπου g είναι η συνάρτηση που ορίζεται από την δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!} z^{3n}$. Η g είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$ με $g(0) = 1 \neq 0$, οπότε το 0 είναι ρίζα πολλαπλότητας 3 της $e^{z^3} - 1$. Η g έχει τύπο και τον $g(z) = \begin{cases} (e^{z^3} - 1)/z^3, & \text{αν } z \neq 0 \\ 1, & \text{αν } z = 0 \end{cases}$ (εκτός από τον τύπο της ως δυναμοσειρά).

ΛΗΜΜΑ 8.2. *Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο ανοικτό και συνεκτικό σύνολο Ω και έστω $z_0 \in \Omega$ με $f(z_0) = 0$. Αν το z_0 είναι ρίζα άπειρης πολλαπλότητας της f, τότε η f είναι ταυτοτικά 0 στο Ω.*

Απόδειξη. Όπως είδαμε προηγουμένως, η f είναι ταυτοτικά 0 σε κάποιον δίσκο κέντρου z_0. Τώρα ορίζουμε

$$B = \{z \in \Omega \,|\, \text{η } f \text{ είναι ταυτοτικά } 0 \text{ σε κάποιον δίσκο κέντρου } z\}$$

και το συμπληρωματικό σύνολο

$$C = \Omega \setminus B.$$

Προφανώς, τα σύνολα B, C είναι ξένα και η ένωσή τους είναι το Ω. Επίσης, το B δεν είναι κενό διότι περιέχει το z_0.
Αν $z \in B$, τότε η f είναι ταυτοτικά 0 σε κάποιον δίσκο $D(z;r)$, οπότε, αν πάρουμε οποιοδήποτε $w \in D(z;r)$, τότε η f είναι ταυτοτικά 0 σε κάποιο δίσκο $D(w;r')$ ο οποίος είναι αρκετά μικρός ώστε να είναι $D(w;r') \subseteq D(z;r)$. Άρα κάθε $w \in D(z;r)$ ανήκει στο B, οπότε $D(z;r) \subseteq B$ και, επομένως, το z δεν μπορεί να είναι οριακό σημείο του C.
Τώρα, έστω $z \in C$. Τότε η f δεν είναι ταυτοτικά 0 σε *κανένα* δίσκο κέντρου z, οπότε το z δεν είναι ρίζα άπειρης πολλαπλότητας της f. Αφού το z είναι ρίζα πεπερασμένης (μπορεί και μηδενικής) πολλαπλότητας της f, υπάρχει κάποιος δίσκος $D(z;r)$ όπου το μοναδικό σημείο στο οποίο (ίσως) μηδενίζεται η f είναι το z. Προφανώς, αυτός ο δίσκος δεν περιέχει κανένα σημείο w του B διότι η f μηδενίζεται ταυτοτικά σε ολόκληρο δίσκο με κέντρο ένα τέτοιο w. Άρα το z δεν είναι οριακό σημείο του B.
Επομένως, κανένα από τα B, C δεν περιέχει οριακό σημείο του άλλου. Τώρα, το B δεν είναι κενό. Αν το C δεν ήταν κενό, τότε τα B, C θα αποτελούσαν διάσπαση του Ω. Αλλά το Ω είναι συνεκτικό και, επομένως, $C = \emptyset$, δηλαδή $\Omega = B$. Άρα η f μηδενίζεται ταυτοτικά στο Ω. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 8.6. [Η Αρχή Ταυτότητας] *Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο ανοικτό και συνεκτικό σύνολο Ω. Έστω ότι οι ρίζες της f έχουν σημείο συσσώρευσης στο Ω, δηλαδή υπάρχει ακολουθία ριζών (z_n) της f ώστε $z_n \to z$ με $z \in \Omega$ και $z_n \neq z$ για κάθε n. Τότε η f είναι ταυτοτικά 0 στο Ω.*

Απόδειξη. Επειδή η f είναι συνεχής στο z και $z_n \to z$, συνεπάγεται $f(z_n) \to f(z)$. Και, επειδή $f(z_n) = 0$ για κάθε n, συνεπάγεται $f(z) = 0$, οπότε και το z είναι ρίζα της f.
Αν το z ήταν ρίζα πεπερασμένης πολλαπλότητας της f, τότε θα υπήρχε κάποιος δίσκος $D(z;r)$ στον οποίο η μοναδική ρίζα της f θα ήταν το z. Αυτό, όμως, είναι άτοπο διότι στον $D(z;r)$ ανήκουν τελικά οι ρίζες z_n που είναι όλες διαφορετικές από το z.
Άρα το z είναι ρίζα άπειρης πολλαπλότητας της f, οπότε από το Λήμμα 8.2 συνεπάγεται ότι η f είναι ταυτοτικά 0 στο Ω. □

Σχόλιο. Το Λήμμα 8.2 και το Θεώρημα 8.6 μπορούν να διατυπωθούν και για μη-συνεκτικό, ανοικτό σύνολο Ω. Το αποτέλεσμα του Λήμματος 8.2 ισχύει στην συνεκτική συνιστώσα του Ω η οποία περιέχει την ρίζα άπειρης πολλαπλότητας z_0 και το αποτέλεσμα της αρχής της ταυτότητας ισχύει στην συνεκτική συνιστώσα του Ω η οποία περιέχει το σημείο συσσώρευσης των ριζών της f.

Σχόλιο. Μιλώντας για τις ρίζες μιας συνάρτησης f, δηλαδή για τις λύσεις της εξίσωσης $f(z) = 0$, προσδίδουμε "τεχνητά" ιδιαίτερη σημασία στην τιμή 0. Όμως, όσα είπαμε μπορούν να γενικευθούν πολύ απλά για οποιαδήποτε μιγαδική τιμή στη θέση του 0. Μπορούμε να θεωρήσουμε οποιοδήποτε σταθερό w και να μας απασχολήσουν οι λύσεις της εξίσωσης $f(z) = w$. Τα συμπεράσματα είναι ακριβώς ίδια με τα συμπεράσματα για τις ρίζες και τα βρίσκουμε θεωρώντας την συνάρτηση $g(z) = f(z) - w$, οπότε οι λύσεις της $f(z) = w$ είναι οι ίδιες με τις ρίζες της g. Για παράδειγμα, αν το z_0 είναι λύση άπειρης πολλαπλότητας της $f(z) = w$, τότε η f είναι σταθερή w σε ένα δίσκο $D(z_0;R)$ και, αν το z_0 είναι λύση πεπερασμένης πολλαπλότητας N της $f(z) = w$, τότε σε κάποιον δίσκο $D(z_0;r)$ η f παίρνει την τιμή w μόνο στο κέντρο z_0 του δίσκου. Το Λήμμα 8.2 λέει τότε ότι, αν η f είναι αναλυτική στο ανοικτό, συνεκτικό Ω και το z_0 είναι λύση άπειρης πολλαπλότητας της $f(z) = w$, τότε η f είναι σταθερή w στο Ω. Τέλος, η αρχή ταυτότητας λέει ότι αν η f είναι αναλυτική στο ανοικτό, συνεκτικό Ω και αν οι λύσεις της $f(z) = w$ έχουν σημείο συσσώρευσης στο Ω, τότε η f είναι σταθερή w στο Ω.

Παράδειγμα 8.5.2. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει συνάρτηση f αναλυτική στο $\mathbb{C}$ η οποία ικανοποιεί την $f(\frac{1}{n}) = \frac{n}{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
Γράφουμε $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$ και συγκρίνουμε τις συναρτήσεις $f(z)$ και $\frac{1}{1+z}$. Και οι δύο συναρτήσεις είναι αναλυτικές στο $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ και η διαφορά τους $f(z) - \frac{1}{1+z}$ έχει ρίζες τα σημεία $\frac{1}{n}$ με σημείο συσσώρευσης το 0 το οποίο περιέχεται στο $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$. Επειδή το $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ είναι συνεκτικό, συνεπάγεται ότι η $f(z) - \frac{1}{1+z}$ είναι ταυτοτικά ίση με 0 στο σύνολο αυτό και άρα ισχύει $f(z) = \frac{1}{1+z}$ για κάθε $z \neq -1$. Όμως, η f υποτίθεται ότι είναι αναλυτική στο -1, οπότε το όριο $\lim_{z\to-1} \frac{1}{1+z} = \lim_{z\to-1} f(z) = f(-1)$ είναι μιγαδικός αριθμός και καταλήγουμε σε άτοπο.

Παράδειγμα 8.5.3. Ας δούμε αν υπάρχει f αναλυτική στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ώστε να ισχύει $f(x) = \sqrt{x}$ για $x \in (0, +\infty)$ ή έστω για x σε κάποιο υποδιάστημα (θετικού μήκους) (a, b) του $(0, +\infty)$.
Θεωρούμε τον συνεχή κλάδο g της $z^{\frac{1}{2}}$ στο ανοικτό σύνολο $A = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ ο οποίος έχει τιμή 1 στο σημείο $z = 1$. Η συνάρτηση g έχει τύπο

$$g(z) = \sqrt{r}\, e^{i\frac{\theta}{2}} \qquad \text{για } z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta) \text{ με } r > 0 \text{ και } -\pi < \theta < \pi.$$

Τώρα βλέπουμε ότι ισχύει $f(x) = \sqrt{x} = g(x)$ για κάθε $x \in (a, b)$. Άρα η συνάρτηση $f - g$, η οποία είναι αναλυτική στο A, έχει ως ρίζες όλα τα σημεία του (a, b). Επειδή κάθε σημείο του (a, b) είναι σημείο συσσώρευσής του και επειδή το (a, b) περιέχεται στο A, συμπεραίνουμε ότι η $f - g$ πρέπει να είναι ταυτοτικά ίση με 0 στο A. Δηλαδή ισχύει

$$f(z) = \sqrt{r}\, e^{i\frac{\theta}{2}} \qquad \text{για } z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta) \text{ με } r > 0 \text{ και } -\pi < \theta < \pi.$$

Αν, όμως, η f είναι αναλυτική στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, τότε είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $(-\infty, 0)$, για παράδειγμα στο -1.
Θεωρούμε σημεία $z = re^{i\theta}$ τα οποία τείνουν στο -1 από το άνω ημιεπίπεδο. Αυτό σημαίνει ότι $r \to 1$ και $\theta \to \pi-$. Συνεπάγεται

$$f(-1) = \lim_{r\to1, \theta\to\pi-} \sqrt{r}\, e^{i\frac{\theta}{2}} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i.$$

Κατόπιν, θεωρούμε σημεία $z = re^{i\theta}$ τα οποία τείνουν στο -1 από το κάτω ημιεπίπεδο. Αυτό σημαίνει ότι $r \to 1$ και $\theta \to -\pi+$. Συνεπάγεται

$$f(-1) = \lim_{r\to1, \theta\to-\pi+} \sqrt{r}\, e^{i\frac{\theta}{2}} = e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i.$$

Καταλήγουμε σε άτοπο, οπότε δεν υπάρχει f με τις αρχικές υποθέσεις.

Ασκήσεις.

8.5.1. Έστω f αναλυτική στον δίσκο $D(z_0; R)$ και έστω ότι το z_0 είναι ρίζα πολλαπλότητας $N \geq 1$ της f. Βρείτε πώς συμπεριφέρεται οποιαδήποτε αντιπαράγωγος F της f στο z_0.

8.5.2. Βρείτε, αν υπάρχει, f αναλυτική στο $\mathbb{C}$ η οποία ικανοποιεί ένα από τα παρακάτω:
(i) $f(\frac{1}{n}) = (-1)^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
(ii) $f(\frac{1}{n}) = \frac{1+(-1)^n}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
(iii) $f(\frac{1}{2k}) = f(\frac{1}{2k+1}) = \frac{1}{k}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

8.5.3. Υπάρχει f αναλυτική στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ώστε να ισχύει $f(x) = |x|$ για $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

8.5.4. Έστω f, g αναλυτικές στο ανοικτό και συνεκτικό σύνολο Ω και $0 \in \Omega$. Αν οι f, g δεν μηδενίζονται πουθενά στο Ω και ισχύει $f'(\frac{1}{n})/f(\frac{1}{n}) = g'(\frac{1}{n})/g(\frac{1}{n})$ για κάθε n, τί συμπεραίνετε για τη σχέση ανάμεσα στις f, g;

8.5.5. Πολλά από όσα αναφέρθηκαν σ' αυτήν την ενότητα ισχύουν και για το σημείο ∞.
[α] Έστω ότι η f είναι αναλυτική στο ανοικτό σύνολο $\Omega \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ και έστω ότι $\infty \in \Omega$. Τότε υπάρχει $R > 0$ ώστε η f να είναι αναλυτική στον δακτύλιο $D(0; R, +\infty)$ καθώς και στο ∞. Αποδείξτε ότι αυτό ισχύει αν και μόνο αν η σειρά Laurent της f στον δακτύλιο $D(0; R, +\infty)$ είναι της μορφής $\sum_{-\infty}^{n=-1} a_n z^n + a_0$. Παρατηρήστε ότι $f(\infty) = a_0$.
Αν $a_n = 0$ για κάθε $n \leq 0$, τότε λέμε ότι το ∞ είναι ρίζα πολλαπλότητας $+\infty$ της f και σ' αυτήν την περίπτωση αποδείξτε ότι η f είναι ταυτοτικά 0 στην συνεκτική συνιστώσα του Ω η οποία περιέχει το ∞.
Αν $a_0 = a_1 = \ldots = a_{-N+1} = 0$ και $a_{-N} \neq 0$, τότε λέμε ότι το ∞ είναι ρίζα πολλαπλότητας N της f και σ' αυτήν την περίπτωση αποδείξτε ότι το ∞ είναι μεμονωμένη ρίζα της f (δηλαδή ότι υπάρχει $r \geq R$ ώστε η f να μην έχει καμία ρίζα στον δακτύλιο $D(0; r, +\infty)$).
Φυσικά, αν $a_0 \neq 0$, τότε λέμε ότι το ∞ είναι ρίζα πολλαπλότητας 0 της f.
Αν το ∞ είναι σημείο συσσώρευσης των ριζών της f, αποδείξτε ότι η f είναι ταυτοτικά 0 στην συνεκτική συνιστώσα του Ω η οποία περιέχει το ∞.
Αποδείξτε ότι το ∞ είναι ρίζα πολλαπλότητας N της f αν και μόνο αν το 0 είναι ρίζα πολλαπλότητας N της g η οποία ορίζεται με τον τύπο $g(w) = f(\frac{1}{w})$.
[β] Έστω ρητή συνάρτηση $r = \frac{p}{q}$ και έστω N ο βαθμός του πολυωνύμου p και M ο βαθμός του πολυωνύμου q. Αν $M \geq N$, αποδείξτε ότι το ∞ είναι ρίζα πολλαπλότητας $M - N$ της r.

8.6 Μεμονωμένες ανωμαλίες.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω ανοικτό σύνολο Ω και μιγαδική συνάρτηση f. Λέμε ότι το $z_0 \in \Omega$ είναι* **μεμονωμένη ανωμαλία** *της f αν υπάρχει δίσκος $D(z_0; R) \subseteq \Omega$ ώστε η f να είναι ορισμένη και αναλυτική στο $D(z_0; R) \setminus \{z_0\}$.*

Αν το $z_0 \in \Omega$ είναι μεμονωμένη ανωμαλία της f, τότε στον αντίστοιχο δακτύλιο $D(z_0; 0, R) = D(z_0; R) \setminus \{z_0\}$ η f παριστάνεται από την σειρά Laurent της:

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \text{για } z \in D(z_0; R) \setminus \{z_0\}.$$

Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις και τις κωδικοποιούμε με τον εξής ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω ότι το $z_0 \in \Omega$ είναι μεμονωμένη ανωμαλία της f στο ανοικτό σύνολο Ω και έστω $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ η σειρά Laurent της f στον δακτύλιο $D(z_0; R) \setminus \{z_0\}$.*
Αν ισχύει $a_n = 0$ για κάθε $n < 0$, τότε λέμε ότι το z_0 είναι **αιρόμενη ανωμαλία** *της f.*
Αν ισχύει $a_n \neq 0$ για τουλάχιστον ένα $n < 0$ και το πλήθος των $n < 0$ για τα οποία ισχύει $a_n \neq 0$ είναι πεπερασμένο, τότε λέμε ότι το z_0 είναι **πόλος** *της f.*
Αν ισχύει a_n για άπειρα $n < 0$, τότε λέμε ότι το z_0 είναι **ουσιώδης ανωμαλία** *της f.*

Τώρα θα εξετάσουμε καθεμιά από τις τρεις περιπτώσεις. Και αρχίζουμε με την περίπτωση που το $z_0 \in \Omega$ είναι αιρόμενη ανωμαλία της f. Σ' αυτήν την περίπτωση η f γράφεται

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \text{για } z \in D(z_0; R) \setminus \{z_0\}.$$

Επομένως, η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ συγκλίνει για κάθε $z \in D(z_0; R) \setminus \{z_0\}$ και, φυσικά, συγκλίνει και για $z = z_0$, ανεξάρτητα από το αν η f είναι ορισμένη ή όχι στο σημείο z_0. Αυτό σημαίνει ότι η δυναμοσειρά ορίζει αναλυτική συνάρτηση σε ολόκληρο τον δίσκο $D(z_0; R)$. Αν συμβολίσουμε g αυτήν την συνάρτηση, τότε

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n \qquad \text{για } z \in D(z_0; R).$$

Η τιμή της g στο z_0 είναι $g(z_0) = a_0$ και η g ταυτίζεται με την f στο $D(z_0; R) \setminus \{z_0\}$. Δηλαδή

$$g(z) = \begin{cases} f(z), & \text{αν } z \in D(z_0; R) \setminus \{z_0\} \\ a_0, & \text{αν } z = z_0 \end{cases}$$

Αυτό, απλώς, μας λέει ότι *αν ορίσουμε την f στο σημείο z_0 με τιμή $f(z_0) = a_0$, τότε η f θα ταυτιστεί με την g σε ολόκληρο τον δίσκο $D(z_0; R)$ και, επομένως, θα γίνει αναλυτική σε ολόκληρο τον δίσκο* $D(z_0; R)$. Αν η f δεν ήταν ήδη ορισμένη στο z_0, τότε την ορίζουμε εξ αρχής στο z_0 με τιμή a_0. Αν η f ήταν ήδη ορισμένη στο z_0 και η τιμή της στο z_0 ήταν ίση με a_0, τότε κρατάμε την τιμή a_0 στο z_0 χωρίς αλλαγή. Αν η f ήταν ήδη ορισμένη στο z_0 και η τιμή της στο z_0 ήταν διαφορετική από a_0, τότε αλλάζουμε την τιμή της στο z_0 και την εξισώνουμε με a_0. Συνοψίζουμε:

Αν το $z_0 \in \Omega$ είναι αιρόμενη ανωμαλία της f, τότε η f μπορεί να οριστεί κατάλληλα στο z_0 και να γίνει αναλυτική σε ένα δίσκο με κέντρο z_0. Η σειρά Laurent της f στο z_0 εκφυλίζεται σε δυναμοσειρά πρώτου τύπου και αυτή η δυναμοσειρά είναι η σειρά Taylor της (επεκτεταμένης) f σε έναν δίσκο κέντρου z_0.

Τώρα θα δούμε ένα πολύ χρήσιμο κριτήριο για να αποφασίζουμε αν μια μεμονωμένη ανωμαλία είναι αιρόμενη χωρίς να πρέπει να υπολογίζουμε την σειρά Laurent της αντίστοιχης συνάρτησης.

ΘΕΩΡΗΜΑ 8.7. [Το Κριτήριο του Riemann] *Έστω ότι το $z_0 \in \Omega$ είναι μεμονωμένη ανωμαλία της f στο ανοικτό σύνολο Ω. Αν υπάρχει το $\lim_{z\to z_0} f(z)$ και είναι πεπερασμένο ή, πιο γενικά, αν η f είναι φραγμένη κοντά στο z_0 ή, ακόμη πιο γενικά, αν $\lim_{z\to z_0}(z - z_0)f(z) = 0$, τότε το z_0 είναι αιρόμενη ανωμαλία της f. Αντιστρόφως, αν το z_0 είναι αιρόμενη ανωμαλία της f, τότε το $\lim_{z\to z_0} f(z)$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο.*

Απόδειξη. Έστω $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ για $z \in D(z_0; R) \setminus \{z_0\}$ και υποθέτουμε ότι $\lim_{z\to z_0}(z - z_0)f(z) = 0$.
Θεωρούμε τυχόν $\epsilon > 0$ και τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει

$$|z - z_0||f(z)| \le \epsilon \qquad \text{για } z \in D(z_0; R) \text{ με } 0 < |z - z_0| < \delta. \tag{8.26}$$

Θεωρούμε τυχόν r με $0 < r < \min\{\delta, R, 1\}$ και τυχόν $n < 0$. Τότε

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0;r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta,$$

οπότε από την (8.26) έχουμε

$$|a_n| \le \frac{1}{2\pi} \frac{\epsilon}{r^{n+2}} 2\pi r = \epsilon r^{-n-1} = \epsilon r^{|n|-1} \le \epsilon.$$

Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $\epsilon > 0$, βρίσκουμε $a_n = 0$. Αυτό ισχύει για τυχόν $n < 0$, οπότε το z_0 είναι αιρόμενη ανωμαλία της f.
Αντιστρόφως, αν το z_0 είναι αιρόμενη ανωμαλία της f, τότε η f μπορεί να οριστεί κατάλληλα στο z_0 και να γίνει αναλυτική σε ένα δίσκο με κέντρο z_0 και, επομένως, συνεχής στο z_0. Άρα το $\lim_{z\to z_0} f(z)$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο αφού ισούται με την τιμή $f(z_0)$. □

Προσέξτε μια εντυπωσιακή διαφορά με το τι συμβαίνει σε συναρτήσεις μιας *πραγματικής* μεταβλητής. Μπορεί μια συνάρτηση $f(x)$ να είναι παραγωγίσιμη στην ένωση $(x_0-R, x_0)\cup(x_0, x_0+R)$ και να είναι ακόμη και συνεχής στο x_0, αλλά να μην είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Απλό παράδειγμα είναι η $f(x) = |x|$ με $x_0 = 0$.

Παράδειγμα 8.6.1. Η συνάρτηση $f(z) = \frac{z^2-3z+2}{z-2}$ είναι ορισμένη και αναλυτική στο $\mathbb{C} \setminus \{2\}$. Επειδή $\lim_{z\to 2} f(z) = \lim_{z\to 2}(z-1) = 1$, το 2 είναι αιρόμενη ανωμαλία της f. Μάλιστα, αν ορίσουμε $f(2) = 1$, τότε η f, ορισμένη πια σε ολόκληρο το $\mathbb{C}$, είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$.
Ο τύπος της επεκτεταμένης f στο $\mathbb{C}$ είναι ο

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^2-3z+2}{z-2}, & \text{αν } z \neq 2 \\ 1, & \text{αν } z = 2 \end{cases} = \begin{cases} z-1, & \text{αν } z \neq 2 \\ 1, & \text{αν } z = 2 \end{cases} = z - 1.$$

Δηλαδή, η επεκτεταμένη f είναι η απλή συνάρτηση $z-1$ σε ολόκληρο το $\mathbb{C}$.
Αν θέλαμε να βρούμε εξ αρχής την σειρά Laurent της αρχικής f με κέντρο το 2 θα γράφαμε:

$$f(z) = \frac{z^2-3z+2}{z-2} = z - 1 = 1 + (z-2) \qquad \text{για } z \in D(2; 0, +\infty).$$

Άρα η σειρά Laurent δεν περιέχει αρνητικές δυνάμεις του $z-2$, οπότε το 2 είναι αιρόμενη ανωμαλία της f.

Τώρα πάμε στην περίπτωση που το $z_0 \in \Omega$ είναι πόλος της f. Θεωρούμε την σειρά Laurent $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ της f στον κατάλληλο δακτύλιο $D(z_0; R) \setminus \{z_0\}$ και τότε υπάρχει κάποιος μέγιστος $m \geq 1$ ώστε να ισχύει $a_{-m} \neq 0$. Έστω N αυτός ο μέγιστος m. Τότε έχουμε

$$f(z) = \frac{a_{-N}}{(z-z_0)^N} + \frac{a_{-N+1}}{(z-z_0)^{N-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n \qquad \text{για } z \in D(z_0; R) \setminus \{z_0\}$$

με $a_{-N} \neq 0$. Η τελευταία σχέση γράφεται, φυσικά,

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^N} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n-N}(z-z_0)^n \qquad \text{για } z \in D(z_0; R) \setminus \{z_0\}.$$

Αφού η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n-N}(z-z_0)^n$ συγκλίνει στον δίσκο $D(z_0; R)$, ορίζει μια αναλυτική συνάρτηση, έστω g, στον $D(z_0; R)$ και ισχύει

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n-N}(z-z_0)^n \qquad \text{για } z \in D(z_0; R)$$

και

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^N} \qquad \text{για } z \in D(z_0; R) \setminus \{z_0\}.$$

Προσέξτε ότι

$$g(z_0) = a_{-N} \neq 0.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω ότι το $z_0 \in \Omega$ είναι πόλος της f και έστω N ο μέγιστος $m \geq 1$ για τον οποίο ισχύει $a_{-m} \neq 0$. Τότε λέμε ότι το z_0 είναι πόλος τάξης N ή πολλαπλότητας N της f.*

Είδαμε ότι, αν το z_0 είναι πόλος τάξης N της f στο ανοικτό σύνολο Ω, τότε υπάρχει συνάρτηση g η οποία είναι αναλυτική σε κάποιον δίσκο $D(z_0; R) \subseteq \Omega$ και ισχύει

$$g(z_0) \neq 0 \qquad \text{και} \qquad f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^N} \quad \text{για } z \in D(z_0; R) \setminus \{z_0\}. \tag{8.27}$$

Είναι εύκολο να δούμε και το αντίστροφο. Πράγματι έστω ότι η g είναι αναλυτική στον $D(z_0; R)$ και ότι ισχύουν αυτά που είναι στην (8.27). Θεωρούμε τη σειρά Taylor $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n(z-z_0)^n$ της g και για $z \in D(z_0; R) \setminus \{z_0\}$ έχουμε

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{g(z)}{(z-z_0)^N} = \frac{1}{(z-z_0)^N} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(z-z_0)^n \\ &= \frac{b_0}{(z-z_0)^N} + \cdots + \frac{b_{N-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{+\infty} b_{n+N}(z-z_0)^n. \end{aligned}$$

Επομένως, η τελευταία δυναμοσειρά είναι η σειρά Laurent της f στον δακτύλιο $D(z_0; R) \setminus \{z_0\}$ και επειδή $b_0 = g(z_0) \neq 0$, το z_0 είναι πόλος τάξης N της f.

Επειδή $g(z_0) \neq 0$ και η g είναι συνεχής στο z_0, συνεπάγεται ότι η g δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο κάποιου δίσκου $D(z_0; r)$ κέντρου z_0 και με $0 < r \leq R$. Τότε η $h(z) = \frac{1}{g(z)}$ είναι αναλυτική στον $D(z_0; r)$ και μπορούμε να γράψουμε $\frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^N h(z)$ για $z \in D(z_0; r) \setminus \{z_0\}$. Βλέπουμε, επομένως, ότι το z_0 είναι αιρόμενη ανωμαλία της $\frac{1}{f}$. Αν, μάλιστα, ορίσουμε να έχει η $\frac{1}{f}$ την τιμή 0 στο z_0, τότε ισχύει $\frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^N h(z)$ για κάθε $z \in D(z_0; r)$ και, επειδή $h(z_0) \neq 0$, το z_0 είναι ρίζα πολλαπλότητας N της επεκτεταμένης $\frac{1}{f}$.

Παράδειγμα 8.6.2. Πολλές φορές προκύπτουν συναρτήσεις της μορφής

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)},$$

όπου οι p, q είναι αναλυτικές στο ανοικτό σύνολο Ω και θέλουμε να δούμε πώς συμπεριφέρεται η f σε κάποιο $z_0 \in \Omega$. Αν οι p, q είναι πολυώνυμα, τότε έχουμε την ειδική περίπτωση ρητής συνάρτησης f.

Για καθεμιά από τις p και q θεωρούμε ότι το z_0 είναι ρίζα της με την αντίστοιχη πολλαπλότητα M και N. Φυσικά, μπορεί το z_0 να μην είναι ρίζα κάποιας από τις p, q, οπότε ο αντίστοιχος από τους M, N είναι ίσος με 0. Τώρα, είδαμε ότι υπάρχουν αναλυτικές συναρτήσεις p_1 και q_1 στο Ω με

$$p(z) = (z - z_0)^M p_1(z), \quad q(z) = (z - z_0)^N q_1(z) \qquad \text{για } z \in \Omega$$

και

$$p_1(z_0) \neq 0, \qquad q_1(z_0) \neq 0.$$

(Φυσικά, εξετάζουμε την περίπτωση που καμιά από τις p, q δεν είναι ταυτοτικά μηδέν.)
Τότε υπάρχει κάποιο $r > 0$ ώστε να ισχύει $p_1(z) \neq 0$ και $q_1(z) \neq 0$ για $z \in D(z; r)$, οπότε έχουμε

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = (z - z_0)^{M-N} \frac{p_1(z)}{q_1(z)} = (z - z_0)^{M-N} g(z) \qquad \text{για } z \in D(z_0; r) \setminus \{z_0\},$$

όπου η συνάρτηση $g(z) = \frac{p_1(z)}{q_1(z)}$ είναι αναλυτική στον $D(z_0; r)$ και $g(z_0) = \frac{p_1(z_0)}{q_1(z_0)} \neq 0$.
Και τώρα συμπεραίνουμε ότι
(i) αν $M \geq N$, τότε το z_0 είναι αιρόμενη ανωμαλία της f, οπότε η f (αφού επεκταθεί κατάλληλα στο z_0) είναι αναλυτική στο z_0 και το z_0 είναι ρίζα πολλαπλότητας $M - N$ της f,
(ii) αν $M < N$, τότε το z_0 είναι πόλος τάξης $N - M$ της f.
Ας δούμε μερικά συγκεκριμένα παραδείγματα.
(i) Έστω η συνάρτηση $f(z) = \frac{z^2-3z+2}{(z-2)^2}$ ορισμένη και αναλυτική στο $\mathbb{C} \setminus \{2\}$.
Γράφουμε $z^2 - 3z + 2 = (z - 2)(z - 1)$, οπότε έχουμε ότι $f(z) = \frac{z-1}{z-2}$ για $z \neq 2$. Η συνάρτηση $g(z) = z - 1$ είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$ και $g(2) = 1 \neq 0$. Άρα το 2 είναι πόλος τάξης 1 της f.
Για να βρούμε την σειρά Laurent της f στον δακτύλιο $D(2; 0, +\infty)$ γράφουμε $f(z) = \frac{z-1}{z-2} = \frac{1+(z-2)}{z-2} = \frac{1}{z-2} + 1$. Άρα η σειρά Laurent είναι η $\frac{1}{z-2} + 1$.
(ii) Έστω η συνάρτηση $f(z) = \frac{e^z-1}{z^3}$ ορισμένη και αναλυτική στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
Η σειρά Taylor της $e^z - 1$ με κέντρο το 0 είναι η $z + \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{3!} z^3 + \cdots$. Άρα έχουμε ότι $e^z - 1 = zg(z)$ με $g(z) = 1 + \frac{1}{2!} z + \frac{1}{3!} z^2 + \cdots$. Η g είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$ και $g(0) = 1 \neq 0$ και ισχύει $f(z) = \frac{g(z)}{z^2}$ για $z \neq 0$. Άρα το 0 είναι πόλος τάξης 2 της f.
Η σειρά Laurent της f στον δακτύλιο $D(0; 0, +\infty)$ είναι η $\frac{1}{z^2} + \frac{1/(2!)}{z} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} z + \cdots$.
(iii) Έστω η συνάρτηση $\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$ ορισμένη και αναλυτική στο $\mathbb{C} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
Τα σημεία $k\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$ είναι μεμονωμένες ανωμαλίες της $\cot z$ και θα δούμε ότι όλα είναι πόλοι τάξης 1.

Έστω, λοιπόν, τυχόν (σταθερό) $k \in \mathbb{Z}$. Η σειρά Taylor της $\sin z$ με κέντρο το σημείο $k\pi$ προκύπτει από την γνωστή σειρά Taylor της $\sin z$ με κέντρο το σημείο 0, γράφοντας

$$\begin{aligned}\sin z &= \sin((z-k\pi)+k\pi) = \cos k\pi \sin(z-k\pi) = (-1)^k \sin(z-k\pi)\\ &= (-1)^k\Big((z-k\pi)-\frac{1}{3!}(z-k\pi)^3+\cdots\Big) = (-1)^k(z-k\pi)-\frac{(-1)^k}{3!}(z-k\pi)^3+\cdots .\end{aligned}$$

Άρα ισχύει $\sin z = (z-k\pi)q_1(z)$ για κάθε z, όπου η συνάρτηση q_1 είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$ με $q_1(k\pi) = (-1)^k$. Παρατηρούμε ότι η q_1 είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$ αλλά μηδενίζεται σε κάθε $l\pi$ με $l \in \mathbb{Z}$, $l \neq k$. Επομένως, ισχύει $\cot z = \frac{\cos z}{(z-k\pi)q_1(z)} = \frac{g(z)}{z-k\pi}$ με $g(z) = \frac{\cos z}{q_1(z)}$ και η g είναι αναλυτική στον δίσκο $D(k\pi;\pi)$ και $g(k\pi) = \frac{\cos k\pi}{q_1(k\pi)} = 1$.
Προσέξτε: ο δίσκος $D(k\pi;\pi)$ είναι ο μέγιστος δίσκος κέντρου $k\pi$ ο οποίος περιέχεται στο σύνολο αναλυτικότητας της g διότι είναι ο μέγιστος δίσκος κέντρου $k\pi$ ο οποίος δεν περιέχει καμία ρίζα της q_1.
Άρα το $k\pi$ είναι πόλος τάξης 1 της $\cot z$.
Για να βρούμε την σειρά Laurent της $\cot z$ στον δακτύλιο $D(k\pi;0,\pi)$ γράφουμε

$$\cot z = \frac{1}{z-k\pi} + g'(k\pi) + \frac{1}{2}g''(k\pi)(z-k\pi)+\cdots .$$

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε ακριβώς τους συντελεστές πρέπει να βρούμε τις παραγώγους της g στο $k\pi$ και αυτό δεν είναι εύκολο παρά μόνο για κάποιους αρχικούς συντελεστές.

Για τους πόλους έχουμε ένα κριτήριο παρόμοιο με το κριτήριο του Riemann για τις αιρόμενες ανωμαλίες.

ΠΡΟΤΑΣΗ 8.16. *Έστω ότι το $z_0 \in \Omega$ είναι μεμονωμένη ανωμαλία της f στο ανοικτό σύνολο Ω. Τότε το z_0 είναι πόλος της f αν και μόνο αν $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$.*

Απόδειξη. Επειδή το $z_0 \in \Omega$ είναι μεμονωμένη ανωμαλία της f στο ανοικτό σύνολο Ω, υπάρχει δίσκος $D(z_0;R) \subseteq \Omega$ ώστε η f να είναι αναλυτική στο $D(z_0;R)\setminus\{z_0\}$.
Αν το z_0 είναι πόλος τάξης N της f, τότε είδαμε ότι υπάρχει συνάρτηση g η οποία είναι αναλυτική σε κάποιον δίσκο $D(z_0;R)\subseteq\Omega$ και ισχύει

$$g(z_0)\neq 0 \qquad \text{και} \qquad f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^N} \quad \text{για } z \in D(z_0;R)\setminus\{z_0\}.$$

Από αυτό συνεπάγεται αμέσως ότι $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$.
Αντιστρόφως, έστω $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$.
Τότε υπάρχει r με $0 < r \leq R$ ώστε να ισχύει $f(z)\neq 0$ για κάθε $z \in D(z_0;r)\setminus\{z_0\}$. Άρα η συνάρτηση

$$h(z) = \frac{1}{f(z)} \qquad \text{για } z \in D(z_0;r)\setminus\{z_0\} \tag{8.28}$$

είναι αναλυτική στον δακτύλιο $D(z_0;r)\setminus\{z_0\}$. Επειδή $\lim_{z\to z_0} h(z) = \lim_{z\to z_0}\frac{1}{f(z)} = 0$, από το Κριτήριο του Riemann έχουμε ότι το z_0 είναι αιρόμενη ανωμαλία της h, οπότε, αν ορίσουμε κατάλληλα την h στο z_0 θα γίνει αναλυτική στον δίσκο $D(z_0;r)$. Επειδή η h θα πρέπει να είναι τουλάχιστον συνεχής στο z_0, θα πρέπει να ορίσουμε $h(z_0) = \lim_{z\to z_0} h(z) = 0$. Άρα η

$$h(z) = \begin{cases}\frac{1}{f(z)}, & \text{αν } z \in D(z_0;r)\setminus\{z_0\}\\ 0, & \text{αν } z = z_0\end{cases}$$

είναι αναλυτική στον δίσκο $D(z_0;r)$.
Είναι προφανές ότι το z_0 είναι η μοναδική ρίζα της h στον $D(z_0;r)$ και, αν N είναι η πολλαπλότητα αυτής της ρίζας, τότε έχουμε

$$h(z) = (z-z_0)^N h_1(z) \qquad \text{για } z \in D(z_0;r), \tag{8.29}$$

όπου η h_1 είναι αναλυτική στον $D(z_0;r)$ και δεν έχει καμία ρίζα στον $D(z_0;r)$. Άρα η συνάρτηση

$$g(z) = \frac{1}{h_1(z)} \qquad \text{για } z \in D(z_0;r) \tag{8.30}$$

είναι αναλυτική στον $D(z_0;r)$ και, προφανώς, δεν μηδενίζεται πουθενά στον $D(z_0;r)$.
Τώρα, όμως, από τις (8.28), (8.29) και (8.30) έχουμε

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^N} \qquad \text{για } z \in D(z_0;r) \setminus \{z_0\}$$

με $g(z_0) \neq 0$. Άρα το z_0 είναι πόλος τάξης N της f. □

Υπάρχει ένα ακόμη κριτήριο για την περίπτωση πόλου, το οποίο, μάλιστα, καθορίζει και την τάξη του πόλου.

ΠΡΟΤΑΣΗ 8.17. *Έστω ότι το $z_0 \in \Omega$ είναι μεμονωμένη ανωμαλία της f στο ανοικτό σύνολο Ω. Τότε το z_0 είναι πόλος τάξης $N \geq 1$ της f αν και μόνο αν το $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^N f(z)$ υπάρχει και είναι μιγαδικός $\neq 0$.*

Απόδειξη. Αν το z_0 είναι πόλος τάξης N της f, τότε ακριβώς όπως στην αρχή της απόδειξης της Πρότασης 8.16 έχουμε ότι $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^N f(z) = \lim_{z\to z_0} g(z) = g(z_0) \neq 0$.
Αντιστρόφως, έστω ότι το $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^N f(z)$ είναι μιγαδικός $\neq 0$.
Τότε, βάσει του Κριτηρίου του Riemann, η συνάρτηση $g(z) = (z-z_0)^N f(z)$, η οποία είναι αναλυτική σε κάποιον δακτύλιο $D(z_0;R) \setminus \{z_0\}$, επεκτείνεται και στο z_0 θέτοντας $g(z_0) = \lim_{z\to z_0} g(z) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)^N f(z)$ ώστε η επεκτεταμένη g να είναι αναλυτική στον δίσκο $D(z_0;R)$.
Επομένως, υπάρχει συνάρτηση g αναλυτική στον $D(z_0;R)$ με $g(z_0) \neq 0$ ώστε να ισχύει $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^N}$ για κάθε $z \in D(z_0;R) \setminus \{z_0\}$. Άρα το z_0 είναι πόλος τάξης N της f. □

Και, τέλος, για την περίπτωση ουσιώδους ανωμαλίας έχουμε το εξής.

ΠΡΟΤΑΣΗ 8.18. *Έστω ότι το $z_0 \in \Omega$ είναι μεμονωμένη ανωμαλία της f στο ανοικτό σύνολο Ω. Τότε το z_0 είναι ουσιώδης ανωμαλία της f αν και μόνο αν το $\lim_{z\to z_0} f(z)$ δεν υπάρχει.*

Απόδειξη. Από το Κριτήριο του Riemann έχουμε ότι το z_0 είναι αιρόμενη ανωμαλία αν και μόνο αν το $\lim_{z\to z_0} f(z)$ υπάρχει και είναι αριθμός. Στην Πρόταση 8.16 είδαμε ότι το z_0 είναι πόλος αν και μόνο αν το $\lim_{z\to z_0} f(z)$ υπάρχει και είναι ∞. Άρα το συμπέρασμα είναι άμεσο. □

Παράδειγμα 8.6.3. Στο παράδειγμα 8.4.8 είδαμε ότι η $\sum_{-\infty}^{n=-1} \frac{1}{(-n)!} z^n + 1$ είναι η σειρά Laurent της συνάρτησης $e^{\frac{1}{z}}$ στον δακτύλιο $D(0;0,+\infty)$. Άρα το 0 είναι ουσιώδης ανωμαλία της $e^{\frac{1}{z}}$.
Επομένως, το $\lim_{z\to 0} e^{\frac{1}{z}}$ δεν υπάρχει. Αυτό μπορούμε να το δούμε χωρίς να χρειάζεται να αποδείξουμε ότι το 0 είναι ουσιώδης ανωμαλία της $e^{\frac{1}{z}}$. Μάλιστα, αν δούμε πρώτα ότι το $\lim_{z\to 0} e^{\frac{1}{z}}$ δεν υπάρχει, τότε θα έχουμε μια άλλη απόδειξη του ότι το 0 είναι ουσιώδης ανωμαλία της $e^{\frac{1}{z}}$.
Ας δούμε, λοιπόν. Αν το $z = x$ τείνει στο 0 και βρίσκεται πάνω στην ημιευθεία των θετικών πραγματικών, τότε $|e^{\frac{1}{z}}| = e^{\frac{1}{x}} \to +\infty$, οπότε $e^{\frac{1}{z}} \to \infty$. Ενώ, αν το $z = x$ τείνει στο 0 και βρίσκεται πάνω στην ημιευθεία των αρνητικών πραγματικών, τότε $|e^{\frac{1}{z}}| = e^{\frac{1}{x}} \to 0$, οπότε $e^{\frac{1}{z}} \to 0$. Άρα δεν υπάρχει το $\lim_{z\to 0} e^{\frac{1}{z}}$.

Ασκήσεις.

8.6.1. Είναι το σημείο 0 μεμονωμένη ανωμαλία της $\frac{1}{\sin(1/z)}$;

8.6.2. Βρείτε τα σημεία μεμονωμένης (μη-αιρόμενης) ανωμαλίας των συναρτήσεων: $\frac{1}{z^2+5z+6}$, $\frac{1}{(z^2-1)^2}$, $\frac{e^z-1}{z}$, $\frac{e^z-1}{z^3}$, $\frac{z^2}{\sin z}$, $\frac{1}{\sin z}$, $\tan z$, $\frac{1}{\sin^2 z}$, $e^z + e^{1/z}$, $\frac{1}{e^z-1}$. Κατατάξτε τα σημεία αυτά σε πόλους και σε ουσιώδεις ανωμαλίες. Σε περίπτωση πόλου βρείτε την τάξη του.

8.6.3. Βρείτε τους τέσσερις αρχικούς όρους της σειράς Laurent κοντά στο σημείο 0 καθεμιάς από τις συναρτήσεις: $\cot z$, $\frac{1}{\sin z}$, $\frac{z}{\sin^2 z}$, $\frac{1}{e^z-1}$.

8.6.4. Αποδείξτε ότι μια μεμονωμένη ανωμαλία της $f(z)$ δεν μπορεί να είναι πόλος της $e^{f(z)}$.

8.6.5. Έστω z_0 μεμονωμένη ανωμαλία της f, η οποία δεν είναι σταθερή συνάρτηση κοντά στο z_0. Αν υπάρχει $s \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\lim_{z\to z_0} |z-z_0|^s |f(z)| \in [0,+\infty],$$

αποδείξτε ότι το z_0 είναι είτε αιρόμενη ανωμαλία είτε πόλος της f και ότι υπάρχει $m \in \mathbb{Z}$ ώστε

$$\lim_{z\to z_0} |z-z_0|^s |f(z)| \begin{cases} = 0, & \text{αν } s > m \\ = +\infty, & \text{αν } s < m \\ \in (0,+\infty), & \text{αν } s = m \end{cases}$$

8.6.6. Έστω ότι η f είναι αναλυτική στο $D(z_0;R)\setminus\{z_0\}$ και έστω ότι η $\mathrm{Re}\, f$ ή η $\mathrm{Im}\, f$ είναι άνω φραγμένη ή κάτω φραγμένη στο $D(z_0;R)\setminus\{z_0\}$. Αποδείξτε ότι το z_0 είναι αιρόμενη ανωμαλία της f.

Υπόδειξη: Έστω $\mathrm{Re}\, f(z) \le M$ για $0 < |z-z_0| < R$. Χρησιμοποιήστε το Κριτήριο του Riemann στη συνάρτηση $\frac{f(z)-M+1}{f(z)-M-1}$.

8.6.7. Έστω ότι η f είναι αναλυτική στο $D(0;R)\setminus\{z_0\}$, όπου $R > 1$ και $|z_0| = 1$. Έστω ότι το z_0 είναι πόλος της f. Αν $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ είναι η σειρά Taylor της f στον $D(0;1)$, αποδείξτε ότι $\frac{a_n}{a_{n+1}} \to z_0$.

Υπόδειξη: Είναι $f(z) =$ πολυώνυμο του $\frac{1}{z-z_0}+$ αναλυτική συνάρτηση στον $D(0;R)$.

8.6.8. Έστω ανοικτό και συνεκτικό σύνολο Ω ώστε κάθε σημείο του Ω είναι είτε σημείο αναλυτικότητας είτε μεμονωμένη ανωμαλία της συνάρτησης f. Αν οι ρίζες της f έχουν σημείο συσσώρευσης στο Ω, το οποίο δεν είναι ουσιώδης ανωμαλία της f, αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή 0 στο Ω. (Επομένως, δεν υπάρχει καμιά μεμονωμένη ανωμαλία της f.)

8.6.9. Έστω ότι το z_0 είναι ουσιώδης ανωμαλία της συνάρτησης f και έστω τυχόν $w \in \mathbb{C}$. Αποδείξτε ότι για κάθε $r > 0$ η συνάρτηση $\frac{1}{f-w}$ *δεν* είναι φραγμένη στον δακτύλιο $D(z_0;r)\setminus\{z_0\}$. Να συμπεράνετε ότι για κάθε w υπάρχει ακολουθία (z_n) με $z_n \to z_0$ και με $z_n \ne z_0$ για κάθε n ώστε να είναι $f(z_n) \to w$.

8.6.10. Δείτε την άσκηση 8.5.5. Θα επεκτείνουμε όσα είπαμε σ' αυτήν την ενότητα στην περίπτωση του σημείου ∞.

[α] Λέμε ότι το ∞ είναι μεμονωμένη ανωμαλία της f αν η f είναι ορισμένη και αναλυτική σε κάποιον δακτύλιο $D(0;R,+\infty)$ και έστω $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ η σειρά Laurent της f σ' αυτόν τον δακτύλιο. Αν ισχύει $a_n = 0$ για κάθε $n > 0$, τότε λέμε ότι το ∞ είναι αιρόμενη ανωμαλία της f. Αν ισχύει $a_n \ne 0$ για τουλάχιστον ένα $n > 0$ και το πλήθος των $n > 0$ για τα οποία ισχύει $a_n \ne 0$ είναι πεπερασμένο, τότε λέμε ότι το ∞ είναι πόλος της f. Τέλος, αν ισχύει $a_n \ne 0$ για άπειρα $n > 0$, τότε λέμε ότι το ∞ είναι ουσιώδης ανωμαλία της f.

Αποδείξτε ότι το ∞ είναι αιρόμενη ανωμαλία της f αν υπάρχει το $\lim_{z\to\infty} f(z)$ και είναι πεπερασμένο ή, πιο γενικά, αν η f είναι φραγμένη κοντά στο ∞ ή, ακόμη πιο γενικά, αν ισχύει $\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z} = 0$. Αποδείξτε και τα αντίστροφα.

Αποδείξτε ότι το ∞ είναι πόλος της f αν και μόνο αν $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$.

Έστω ότι το ∞ είναι πόλος της f και έστω N ο μέγιστος $n > 0$ για τον οποίο ισχύει $a_n \ne 0$. Τότε λέμε ότι το ∞ είναι πόλος τάξης N της f. Αποδείξτε ότι το ∞ είναι πόλος τάξης N της f αν και μόνο αν υπάρχει g αναλυτική στο $D(0;R,+\infty)\cup\{\infty\}$ ώστε να ισχύει $g(\infty) \ne 0$ και $f(z) = z^N g(z)$ για κάθε $z \in D(0;R,+\infty)$. Επίσης, αποδείξτε ότι το ∞ είναι πόλος τάξης N της

f αν και μόνο αν υπάρχει το $\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z^N}$ και είναι μιγαδικός $\neq 0$.
Αποδείξτε ότι το ∞ είναι ουσιώδης ανωμαλία της f αν και μόνο αν το $\lim_{z\to\infty} f(z)$ δεν υπάρχει.
[β] Έστω ρητή συνάρτηση $r = \frac{p}{q}$ και έστω N ο βαθμός του πολυωνύμου p και M ο βαθμός του πολυωνύμου q. Αποδείξτε ότι το ∞ είναι αιρόμενη ανωμαλία της r αν $M \geq N$ και ότι είναι πόλος τάξης $N - M$ της r αν $N > M$. Ειδικώτερα, ένα πολυώνυμο p βαθμού $N \geq 1$ έχει πόλο τάξης N στο ∞.
Τί είδους μεμονωμένη ανωμαλία είναι το ∞ για τις συναρτήσεις $e^z, e^{\frac{1}{z}}, z^2 e^{\frac{1}{z}}, \sin z, \sin\frac{1}{z}, z^5 \sin\frac{1}{z}$;

Κεφάλαιο 9

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα.

9.1 Το Θεώρημα των Ολοκληρωτικών Υπολοίπων.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω ότι το $z_0 \in \Omega$ είναι μεμονωμένη ανωμαλία της f στο ανοικτό σύνολο Ω και έστω $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ η σειρά Laurent της f σε κάποιον δακτύλιο $D(z_0;R)\setminus\{z_0\}$. Τότε ο συντελεστής a_{-1} ονομάζεται* **ολοκληρωτικό υπόλοιπο** *της f στο z_0 και συμβολίζεται*

$$\mathrm{Res}(f;z_0)=a_{-1}.$$

Γνωρίζουμε ότι

$$\mathrm{Res}(f;z_0)=a_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0;r)} f(\zeta)\,d\zeta \qquad \text{για } 0<r<R.$$

Αν το z_0 είναι αιρόμενη ανωμαλία της f, οπότε η f μπορεί να θεωρηθεί, εκ των υστέρων, αναλυτική στο z_0, τότε ισχύει $a_n=0$ για κάθε $n<0$ και, επομένως και για $n=-1$, οπότε το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της f στο z_0 είναι μηδέν. Μπορεί, όμως, το z_0 να είναι πόλος ή και ουσιώδης ανωμαλία της f και το ολοκληρωτικό υπόλοιπο να είναι μηδέν.

Παράδειγμα 9.1.1. Κάθε συνάρτηση $f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^N}$ με $N\geq 2$ έχει ολοκληρωτικό υπόλοιπο ίσο με 0 στο z_0.
Αυτό ισχύει διότι είναι προφανές ότι η σειρά Laurent της f στο z_0 αποτελείται από έναν μόνο όρο, τον $\frac{1}{(z-z_0)^N}$, οπότε ο συντελεστής του $\frac{1}{z-z_0}$ είναι ίσος με 0. Αλλά και από το παράδειγμα 7.1.4 γνωρίζουμε ότι

$$\mathrm{Res}(f;z_0)=a_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0;r)} f(\zeta)\,d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0;r)}\frac{1}{(\zeta-z_0)^N}\,d\zeta=0.$$

Παράδειγμα 9.1.2. Αν το z_0 είναι πόλος της f στο ανοικτό σύνολο Ω, τότε μπορούμε να βρούμε "σχετικά εύκολα" το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της f στο z_0. Είδαμε ότι, αν το z_0 είναι πόλος τάξης N, τότε υπάρχει συνάρτηση g αναλυτική σε κάποιον δίσκο $D(z_0;R)\subseteq\Omega$ ώστε να ισχύει

$$g(z_0)\neq 0 \qquad \text{και} \qquad f(z)=\frac{g(z)}{(z-z_0)^N} \quad \text{για } z\in D(z_0;R)\setminus\{z_0\}.$$

Αν η f δίνεται σ' αυτήν την μορφή, τότε αναπτύσσοντας την σειρά Taylor $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n(z-z_0)^n$ της g, όπως κάναμε αμέσως μετά την (8.27), βλέπουμε ότι

$$\mathrm{Res}(f;z_0)=b_{N-1}=\frac{g^{(N-1)}(z_0)}{(N-1)!}.$$

Για παράδειγμα, αν το z_0 είναι πόλος τάξης 1, τότε $\mathrm{Res}(f;z_0)=g(z_0)$ και, αν το z_0 είναι πόλος τάξης 2, τότε $\mathrm{Res}(f;z_0)=g'(z_0)$.

Παράδειγμα 9.1.3. Ειδική περίπτωση του προηγούμενου παραδείγματος είναι μια ρητή συνάρτηση $r = \frac{p}{q}$ όταν το z_0 είναι ρίζα του πολυωνύμου q και όχι του πολυωνύμου p. Αν η πολλαπλότητα της ρίζας z_0 του q είναι N, τότε είναι $q(z) = (z - z_0)^N q_1(z)$, όπου q_1 είναι ένα άλλο πολυώνυμο με $q_1(z_0) \neq 0$. Η ρητή συνάρτηση $r_1 = \frac{p}{q_1}$ είναι αναλυτική στο z_0 και δεν μηδενίζεται στο z_0 και για κάποιο $R > 0$ ισχύει

$$r(z) = \frac{r_1(z)}{(z - z_0)^N} \quad \text{για } z \in D(z_0; R) \setminus \{z_0\}.$$

Τότε, σύμφωνα με το προηγούμενο παράδειγμα, είναι

$$\mathrm{Res}(r; z_0) = \frac{{r_1}^{(N-1)}(z_0)}{(N-1)!}.$$

Αν $N = 1$ (οπότε το z_0 είναι πόλος τάξης 1 της r), τότε

$$\mathrm{Res}(r; z_0) = r_1(z_0) = \frac{p(z_0)}{q_1(z_0)}.$$

Παραγωγίζοντας την ισότητα $q(z) = (z - z_0)q_1(z)$ βρίσκουμε $q'(z) = q_1(z) + (z - z_0){q_1}'(z)$, οπότε με $z = z_0$ έχουμε $q_1(z_0) = q'(z_0)$ και άρα

$$\mathrm{Res}(r; z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.$$

Αν $N = 2$ (οπότε το z_0 είναι πόλος τάξης 2 της r), τότε

$$\mathrm{Res}(r; z_0) = {r_1}'(z_0) = \frac{p'(z_0)q_1(z_0) - p(z_0){q_1}'(z_0)}{q_1(z_0)^2}.$$

Παραγωγίζοντας δύο φορές την $q(z) = (z - z_0)^2 q_1(z)$ βρίσκουμε $q''(z) = 2q_1(z) + 4(z - z_0){q_1}'(z) + (z - z_0)^2 {q_1}''(z)$, οπότε με $z = z_0$ έχουμε $q_1(z_0) = (1/2)q''(z_0)$. Παραγωγίζοντας τρίτη φορά την $q(z) = (z - z_0)^2 q_1(z)$ βρίσκουμε $q'''(z) = 6{q_1}'(z) + 6(z - z_0){q_1}''(z) + (z - z_0)^2 {q_1}'''(z)$ και με $z = z_0$ παίρνουμε ${q_1}'(z_0) = (1/6)q'''(z_0)$. Άρα

$$\mathrm{Res}(r; z_0) = \frac{(1/2)p'(z_0)q''(z_0) - (1/6)p(z_0)q'''(z_0)}{(1/4)q''(z_0)^2}.$$

Παρόμοιους τύπους έχουμε για $N \geq 3$. Εννοείται ότι δεν τους θυμόμαστε απ' έξω.

Ας υποθέσουμε, όπως στον ορισμό, ότι το $z_0 \in \Omega$ είναι μεμονωμένη ανωμαλία της f στο ανοικτό Ω και έστω $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ η σειρά Laurent της f στον δακτύλιο $D(z_0; R) \setminus \{z_0\}$. Συμβολίζουμε

$$s(z) = \sum_{-\infty}^{n=-1} a_n(z - z_0)^n, \qquad h(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n, \tag{9.1}$$

οπότε ισχύει

$$f(z) = s(z) + h(z) \qquad \text{για } z \in D(z_0; 0, R).$$

Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς που ορίζει την s είναι η εσωτερική ακτίνα του δακτυλίου $D(z_0; 0, R)$ και η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς που ορίζει την h είναι η εξωτερική ακτίνα του $D(z_0; 0, R)$. Άρα η συνάρτηση s είναι αναλυτική στο $D(z_0; 0, +\infty) \cup \{\infty\}$ και, ειδικότερα, στο $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ και η συνάρτηση h είναι αναλυτική στον δίσκο $D(z_0; R)$. Βλέπουμε, λοιπόν, ότι οι συναρτήσεις f και s έχουν και οι δύο μεμονωμένη ανωμαλία το σημείο z_0 και ότι η διαφορά τους, δηλαδή η $f - s = h$, ορίζεται μεν στο $D(z_0; R) \setminus \{z_0\}$ αλλά η ανωμαλία που παρουσιάζει στο z_0 είναι αιρόμενη.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Η συνάρτηση s ονομάζεται* **ιδιάζον μέρος** *της f στην μεμονωμένη ανωμαλία z_0.*

Και κάτι ακόμη. Αν έχουμε και μια κλειστή καμπύλη γ η τροχιά της οποίας δεν περιέχει το z_0, τότε, επειδή ακριβώς η τροχιά γ^* είναι συμπαγές σύνολο και περιέχεται στον δακτύλιο σύγκλισης της δυναμοσειράς που ορίζει την s, έχουμε ότι η δυναμοσειρά της s στην (9.1) συγκλίνει στην s ομοιόμορφα στο γ^*, οπότε η εναλλαγή άπειρου αθροίσματος και ολοκληρώματος στον παρακάτω υπολογισμό είναι επιτρεπτή και βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma s(z)\,dz &= \sum_{-\infty}^{n=-1}\frac{a_n}{2\pi i}\oint_\gamma (z-z_0)^n\,dz = \frac{a_{-1}}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{1}{z-z_0}\,dz = n(\gamma;z_0)a_{-1}\\ &= n(\gamma;z_0)\,\mathrm{Res}(f;z_0).\end{aligned} \tag{9.2}$$

Όλα αυτά θα παίξουν καθοριστικό ρόλο στην απόδειξη του θεωρήματος που ακολουθεί.

ΘΕΩΡΗΜΑ 9.1. [**Θεώρημα των Ολοκληρωτικών Υπολοίπων**] *Έστω ότι η f είναι αναλυτική στο ανοικτό και αστρόμορφο σύνολο Ω εκτός από μεμονωμένες ανωμαλίες $z_1,\dots,z_N$ στο Ω. Επίσης, έστω κλειστή καμπύλη γ στο Ω η τροχιά της οποίας δεν περιέχει καμία μεμονωμένη ανωμαλία της f. Τότε*

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{N} n(\gamma;z_k)\ \mathrm{Res}(f;z_k).$$

Απόδειξη. Παίρνουμε την τυχούσα μεμονωμένη ανωμαλία z_k της f και το αντίστοιχο ιδιάζον μέρος s_k της f. Αυτό σημαίνει ότι το z_k είναι αιρόμενη ανωμαλία της $f-s_k$ και ότι η s_k είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}\setminus\{z_k\}$ και άρα και στο $\Omega\setminus\{z_k\}$.
Τώρα θεωρούμε την συνάρτηση

$$F = f-(s_1+\cdots+s_N).$$

Είναι σαφές ότι η F είναι αναλυτική στο Ω εκτός από τα σημεία $z_1,\dots,z_N$.
Αν γράψουμε

$$F=(f-s_k)-(s_1+\cdots+s_{k-1}+s_{k+1}+\cdots+s_N),$$

βλέπουμε ότι η F παρουσιάζει αιρόμενη ανωμαλία στο z_k, αφού η $f-s_k$ παρουσιάζει αιρόμενη ανωμαλία στο z_k και όλες οι $s_1,\dots,s_N$ εκτός της s_k είναι αναλυτικές στο z_k.
Άρα η F μπορεί να ορισθεί και στα σημεία $z_1,\dots,z_N$ έτσι ώστε να είναι αναλυτική στο Ω. Μπορούμε, λοιπόν, να θεωρήσουμε ότι η F είναι αναλυτική στο Ω.
Τώρα, επειδή το Ω είναι αστρόμορφο, ισχύει

$$\oint_\gamma F(z)\,dz = 0.$$

Συνεπάγεται

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = \oint_\gamma s_1(z)\,dz+\cdots+\oint_\gamma s_N(z)\,dz.$$

Επομένως, εφαρμόζοντας την (9.2) στις $s_1,\dots,s_N$ και στα αντίστοιχα σημεία $z_1,\dots,z_N$, έχουμε ότι

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(z)\,dz = n(\gamma;z_1)\,\mathrm{Res}(f;z_1)+\cdots+n(\gamma;z_N)\,\mathrm{Res}(f;z_N).$$

□

Ανεξάρτητα από το Θεώρημα των Ολοκληρωτικών Υπολοίπων, αλλά χρησιμοποιώντας την τεχνική της απόδειξής του, θα αναφερθούμε στην γνωστή μας ανάλυση ρητής συνάρτησης σε απλά κλάσματα.

ΠΡΟΤΑΣΗ 9.1. [**Ανάλυση ρητής συνάρτησης σε απλά κλάσματα**] *Έστω ρητή συνάρτηση* $r = \frac{p}{q}$*, όπου τα πολυώνυμα* p, q *δεν έχουν κοινούς παράγοντες, ο βαθμός του* p *είναι* N*, ο βαθμός του* q *είναι* M *και* $z_1, \dots, z_n$ *είναι οι ρίζες του* q *με αντίστοιχες πολλαπλότητες* $m_1, \dots, m_n$*. Τότε είναι*

$$r(z) = p_1\Big(\frac{1}{z - z_1}\Big) + \cdots + p_n\Big(\frac{1}{z - z_n}\Big) + p_0(z),$$

όπου $p_1, \dots, p_n$ *είναι πολυώνυμα βαθμών* $m_1, \dots, m_n$ *αντιστοίχως και χωρίς σταθερούς όρους και το* p_0 *είναι είτε το μηδενικό πολυώνυμο αν* $N < M$ *είτε ένα πολυώνυμο βαθμού* $N - M$ *αν* $N \geq M$*.*

Απόδειξη. Κάθε ρίζα z_k αποτελεί πόλο τάξης m_k της r. Πράγματι, ισχύει $q(z) = (z - z_k)^{m_k} q_k(z)$, όπου το q_k είναι πολυώνυμο με $q_k(z_k) \neq 0$. Λόγω συνέχειας, το q_k δεν μηδενίζεται κοντά στο z_k, οπότε η $g_k = \frac{p}{q_k}$ είναι αναλυτική στο z_k και ισχύει $r(z) = \frac{g_k(z)}{(z - z_k)^{m_k}}$ κοντά στο z_k καθώς και $g_k(z_k) \neq 0$.
Άρα η σειρά Laurent της r κοντά στο z_k έχει τη μορφή

$$\frac{a_{-m_k}}{(z - z_k)^{m_k}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_k} + a_0 + a_1(z - z_k) + \cdots = p_k\Big(\frac{1}{z - z_k}\Big) + h_k(z),$$

όπου $p_k(w)$ είναι το πολυώνυμο $a_{-m_k} w^{m_k} + \cdots + a_{-1} w$ και η συνάρτηση h_k είναι αναλυτική στο z_k. Επειδή $a_{-m_k} \neq 0$, το πολυώνυμο p_k είναι βαθμού m_k και, επίσης, το p_k δεν έχει σταθερό όρο.
Το ιδιάζον μέρος της f στο z_k είναι η συνάρτηση $s_k(z) = p_k(\frac{1}{z - z_k})$.
Τώρα, ακριβώς όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 9.1, βλέπουμε ότι η συνάρτηση

$$p_0 = r - (s_1 + \cdots + s_n)$$

είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$.
Όμως, όλες οι συναρτήσεις $r, s_1, \dots, s_n$ είναι ρητές και άρα η p_0 είναι κι αυτή ρητή συνάρτηση. Μάλιστα, επειδή η p_0 είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$, είναι πολυώνυμο. Τώρα διακρίνουμε περιπτώσεις.
Αν $N < M$, τότε $\lim_{z\to\infty} r(z) = 0$ και, επειδή $\lim_{z\to\infty} s_k(z) = 0$ για κάθε k, συνεπάγεται ότι $\lim_{z\to\infty} p_0(z) = 0$. Άρα το p_0 είναι το μηδενικό πολυώνυμο.
Αν $N \geq M$, τότε το $c = \lim_{z\to\infty} \frac{r(z)}{z^{N-M}}$ είναι μιγαδικός $\neq 0$. Επειδή $\lim_{z\to\infty} \frac{s_k(z)}{z^{N-M}} = 0$ για κάθε k, συνεπάγεται ότι το $\lim_{z\to\infty} \frac{p_0(z)}{z^{N-M}}$ είναι ίσο με c, δηλαδή μιγαδικός $\neq 0$. Άρα το πολυώνυμο p_0 έχει βαθμό $N - M$. □

Το Θεώρημα των Ολοκληρωτικών Υπολοίπων είναι ένα ισχυρότατο εργαλείο υπολογισμού ολοκληρωμάτων, διότι ανάγει αυτόν τον υπολογισμό στην εύρεση των μεμονωμένων ανωμαλιών της ολοκληρωτέας συνάρτησης, στον υπολογισμό των αντίστοιχων ολοκληρωτικών υπολοίπων και στον εντοπισμό του αριθμού περιστροφών της καμπύλης γύρω από κάθε μεμονωμένη ανωμαλία. Σε αρκετές περιπτώσεις όλα αυτά είναι αρκετά εύκολα. Ας δούμε μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 9.1.4. *Υπολογισμός του γενικευμένου ολοκληρώματος* $\int_{-\infty}^{+\infty} r(x)\,dx$ *ρητής συνάρτησης* $r = \frac{p}{q}$ *όταν ο βαθμός του* q *υπερβαίνει τον βαθμό του* p *κατά τουλάχιστον δύο μονάδες και το* q *δεν έχει πραγματικές ρίζες.*
Έστω, λοιπόν, $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ με $a_n \neq 0$ και $q(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0$ με $b_m \neq 0$ και έστω $m \geq n + 2$.
Η r είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και το γενικευμένο ολοκλήρωμά της στο $\mathbb{R}$ συγκλίνει. Για να το δούμε αυτό παρατηρούμε ότι

$$\lim_{z\to\infty} \frac{p(z)}{a_n z^n} = 1,$$

οπότε υπάρχει $R_0' > 0$ ώστε να ισχύει $\frac{1}{2} \leq |\frac{p(z)}{a_n z^n}| \leq 2$ ή, ισοδύναμα,

$$\frac{1}{2}|a_n||z|^n \leq |p(z)| \leq 2|a_n||z|^n \qquad \text{για } |z| \geq R_0'.$$

Ομοίως, υπάρχει $R_0'' > 0$ ώστε να ισχύει

$$\frac{1}{2}|b_m||z|^m \leq |q(z)| \leq 2|b_m||z|^m \qquad \text{για } |z| \geq R_0''.$$

Παίρνοντας $R_0 = \max\{R_0', R_0''\}$ έχουμε ότι ισχύει

$$\frac{1}{2}|a_n||z|^n \leq |p(z)| \leq 2|a_n||z|^n \quad \text{και} \quad \frac{1}{2}|b_m||z|^m \leq |q(z)| \leq 2|b_m||z|^m \qquad \text{για } |z| \geq R_0.$$

και άρα ισχύει

$$|r(z)| \leq 4\frac{|a_n|}{|b_m|}\,\frac{1}{|z|^{m-n}} = \frac{C}{|z|^{m-n}} \qquad \text{για } |z| \geq R_0, \tag{9.3}$$

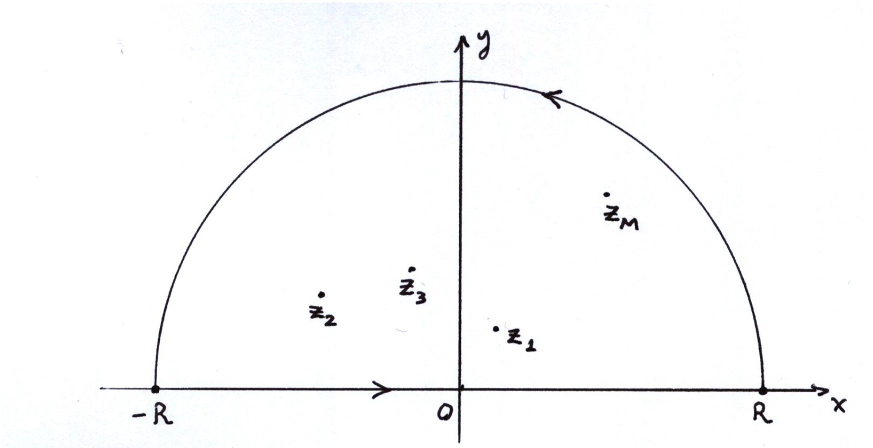
όπου $C = 4\frac{|a_n|}{|b_m|}$ είναι μια σταθερά.
Επομένως, για πραγματικό $z = x$ και επειδή $m - n \geq 2$, έχουμε

$$\int_{-\infty}^{-R_0} |r(x)|\,dx \leq C\int_{-\infty}^{-R_0} \frac{1}{|x|^{m-n}}\,dx < +\infty,$$

$$\int_{R_0}^{+\infty} |r(x)|\,dx \leq C\int_{R_0}^{+\infty} \frac{1}{x^{m-n}}\,dx < +\infty.$$

Άρα τα $\int_{-\infty}^{-R_0} r(x)\,dx$, $\int_{R_0}^{+\infty} r(x)\,dx$ συγκλίνουν απολύτως και, επομένως, συγκλίνουν. Επίσης η r είναι συνεχής στο $[-R_0, R_0]$ και άρα το $\int_{-\infty}^{+\infty} r(x)\,dx$ συγκλίνει.
Οι ρίζες του πολυωνύμου q περιέχονται είτε στο άνω είτε στο κάτω ημιεπίπεδο (που ορίζονται από τον x-άξονα). Στα επόμενα λαμβάνουμε υπ' όψη μόνο τις ρίζες που βρίσκονται στο άνω ημιεπίπεδο και έστω ότι αυτές είναι οι $z_1, \ldots, z_M$ (με $M \leq m$). Κατόπιν, θεωρούμε τυχόν R έτσι ώστε να είναι $R > R_0$ και ώστε όλες οι ρίζες $z_1, \ldots, z_M$ να βρίσκονται στον δίσκο $D(0; R)$. Θεωρούμε, λοιπόν,

$$R > \max\{R_0, |z_1|, \ldots, |z_M|\}.$$



Σχ 36.

Τώρα εφαρμόζουμε το Θεώρημα Ολοκληρωτικών Υπολοίπων στην $r = \frac{p}{q}$ η οποία είναι αναλυτική στο ανοικτό και αστρόμορφο σύνολο $\mathbb{C}$ εκτός από τις ρίζες (όλες) του q και στην κλειστή καμπύλη γ_R του σχήματος 36 η οποία αποτελείται από το ευθύγραμμο τμήμα $[-R, R]$ με παραμετρική εξίσωση $z = x$ για $x \in [-R, R]$ και από το τόξο $\mathrm{arc}(R, -R)$ με παραμετρική εξίσωση $z = Re^{it}$ για $t \in [0, \pi]$.
Στην τροχιά της γ_R δεν περιέχεται καμία από τις μεμονωμένες ανωμαλίες της r. Όταν υπολογίσουμε το άθροισμα των $n(\gamma_R; z)\,\mathrm{Res}(r; z)$ για όλες τις μεμονωμένες ανωμαλίες z της r, θα λάβουμε υπ' όψη μόνο τις μεμονωμένες ανωμαλίες με $n(\gamma_R; z) \neq 0$. Αυτές, όμως, είναι ακριβώς οι

ρίζες $z_1, \ldots, z_M$ του q που βρίσκονται στο άνω ημιεπίπεδο. Μάλιστα η γ_R περιστρέφεται ακριβώς μία φορά γύρω από καθεμιά από αυτές τις ρίζες:

$$n(\gamma_R; z_1) = \ldots = n(\gamma_R; z_M) = 1.$$

Άρα το Θεώρημα των Ολοκληρωτικών Υπολοίπων λέει ότι

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_R} r(z)\, dz = \mathrm{Res}(r; z_1) + \cdots + \mathrm{Res}(r; z_M).$$

Κατόπιν, γράφουμε

$$\oint_{\gamma_R} r(z)\, dz = \int_{[-R,R]} r(z)\, dz + \int_{\mathrm{arc}(R,-R)} r(z)\, dz$$

και άρα

$$\int_{-R}^{R} r(x)\, dx = \int_{[-R,R]} r(z)\, dz = 2\pi i(\mathrm{Res}(r; z_1)+\cdots+\mathrm{Res}(r; z_M)) - \int_{\mathrm{arc}(R,-R)} r(z)\, dz. \quad (9.4)$$

Και τώρα, επειδή $R > R_0$, εκτιμάμε το τελευταίο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα, χρησιμοποιώντας την (9.3), ως εξής:

$$\Big| \int_{\mathrm{arc}(R,-R)} r(z)\, dz \Big| \leq \frac{C}{R^{m-n}}\, \pi R = \frac{C\pi}{R^{m-n-1}}.$$

Επειδή $m - n - 1 \geq 1$, έχουμε ότι

$$\int_{\mathrm{arc}(R,-R)} r(z)\, dz \to 0 \qquad \text{όταν } R \to +\infty.$$

Παίρνοντας όριο καθώς $R \to +\infty$ στην (9.4) και επειδή το $2\pi i(\mathrm{Res}(r; z_1) + \cdots + \mathrm{Res}(r; z_M))$ είναι ανεξάρτητο του $R > \max\{R_0, |z_1|, \ldots, |z_M|\}$, βρίσκουμε ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} r(x)\, dx = 2\pi i(\mathrm{Res}(r; z_1) + \cdots + \mathrm{Res}(r; z_M)).$$

Άρα το μόνο που απομένει είναι να βρούμε τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα της r στις ρίζες $z_1, \ldots, z_M$ του q.

Παρεμπιπτόντως, η $r = \frac{p}{q}$ είναι ρητή συνάρτηση και, όπως είδαμε στο παράδειγμα 9.1.3, όλες οι μεμονωμένες ανωμαλίες της (δηλαδή οι ρίζες του q) είναι πόλοι.

Ας δούμε μερικά πολύ συγκεκριμένα παραδείγματα.

(i) Έστω $r(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Οι ρίζες του $q(z) = z^2 + 1$ είναι οι $\pm i$, οπότε πρέπει να υπολογίσουμε το $\mathrm{Res}(r; i)$.

Είναι $r(z) = \frac{1}{(z-i)(z+i)}$, οπότε το i είναι πόλος τάξης 1 της r. Γράφουμε $r(z) = \frac{1/(z+i)}{z-i} = \frac{g(z)}{z-i}$ και τώρα μπορούμε να εφαρμόσουμε κατ' ευθείαν το αποτέλεσμα του παραδείγματος 9.1.2 με την $g(z) = \frac{1}{z+i}$ και να βρούμε ότι $\mathrm{Res}(r; i) = g(i) = \frac{1}{2i}$. Προτιμώ να μην θυμάμαι αυτόν τον τύπο και να καταφεύγω στο ανάπτυγμα της g ως δυναμοσειρά. Η σειρά Taylor της $g(z) = \frac{1}{z+i}$ με κέντρο το i είναι η $g(i) + g'(i)(z-i) + \frac{1}{2}g''(i)(z-i)^2 + \cdots$. Επομένως, η σειρά Laurent της r με κέντρο το i γράφεται $\frac{g(i)}{z-i} + g'(i) + \frac{1}{2}g''(i)(z-i) + \cdots$. Άρα $\mathrm{Res}(r; i) = g(i) = \frac{1}{2i}$ και, επομένως,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\, dx = 2\pi i\, \mathrm{Res}(r; i) = \pi.$$

(ii) Έστω $r(x) = \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}$. Οι ρίζες του $q(z) = (z^2+1)(z^2+4)$ είναι οι $\pm i$ και οι $\pm 2i$, οπότε πρέπει να βρούμε τα $\mathrm{Res}(r; i)$ και $\mathrm{Res}(r; 2i)$.

Είναι $r(z) = \frac{1}{(z-i)(z+i)(z-2i)(z+2i)}$, οπότε τα $i, 2i$ είναι πόλοι τάξης 1 της r. Γράφουμε $r(z) = \frac{g(z)}{z-i}$ και, αν θέλουμε να εφαρμόσουμε το αποτέλεσμα του παραδείγματος 9.1.2 με την $g(z) = \frac{1}{(z+i)(z-2i)(z+2i)}$, βρίσκουμε αμέσως ότι $\mathrm{Res}(r; i) = g(i) = \frac{1}{6i}$. Ομοίως, γράφουμε $r(z) = \frac{g(z)}{z-2i}$ με την $g(z) = \frac{1}{(z+i)(z-i)(z+2i)}$ και βρίσκουμε ότι $\mathrm{Res}(r; 2i) = g(2i) = -\frac{1}{12i}$.
Δουλεύοντας, εναλλακτικά, με τις σειρές Taylor των δύο συναρτήσεων g κάνουμε τα εξής.
Γράφουμε $r(z) = \frac{g(z)}{z-i}$ με $g(z) = \frac{1}{(z+i)(z^2+4)}$ και η σειρά Taylor της g με κέντρο το i είναι η $g(i) + g'(i)(z-i) + \frac{1}{2}g''(i)(z-i)^2 + \cdots$. Επομένως, η σειρά Laurent της r με κέντρο το i γράφεται $\frac{g(i)}{z-i} + g'(i) + \frac{1}{2}g''(i)(z-i) + \cdots$. Άρα $\mathrm{Res}(r; i) = g(i) = \frac{1}{6i}$.
Ομοίως, γράφουμε $r(z) = \frac{g(z)}{z-2i}$ με $g(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z+2i)}$ και η σειρά Taylor της g με κέντρο το $2i$ είναι η $g(2i) + g'(2i)(z-2i) + \frac{1}{2}g''(2i)(z-2i)^2 + \cdots$. Επομένως, η σειρά Laurent της r με κέντρο το $2i$ γράφεται $\frac{g(2i)}{z-2i} + g'(2i) + \frac{1}{2}g''(2i)(z-2i) + \cdots$. Άρα $\mathrm{Res}(r; 2i) = g(2i) = -\frac{1}{12i}$.
Τελικά έχουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx = 2\pi i(\mathrm{Res}(r; i) + \mathrm{Res}(r; 2i)) = 2\pi i\Big(\frac{1}{6i} - \frac{1}{12i}\Big) = \frac{\pi}{6}.$$

(iii) Έστω $r(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2}$. Οι ρίζες του $q(z) = (z^2+1)^2$ είναι οι $\pm i$, οπότε πρέπει να υπολογίσουμε το $\mathrm{Res}(r; i)$.
Είναι $r(z) = \frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}$, οπότε το i είναι πόλος τάξης 2 της r. Γράφουμε $r(z) = \frac{g(z)}{(z-i)^2}$ με $g(z) = \frac{1}{(z+i)^2}$ και από το παράδειγμα 9.1.2 βρίσκουμε ότι $\mathrm{Res}(r; i) = g'(i) = \frac{1}{4i}$.
Εναλλακτικά, η σειρά Taylor της $g(z) = \frac{1}{(z+i)^2}$ με κέντρο το i είναι η $g(i) + g'(i)(z-i) + \frac{1}{2}g''(i)(z-i)^2 + \cdots$, οπότε η σειρά Laurent της r με κέντρο το i είναι η $r(z) = \frac{g(i)}{(z-i)^2} + \frac{g'(i)}{z-i} + \frac{1}{2}g''(i) + \cdots$. Άρα $\mathrm{Res}(r; i) = g'(i) = \frac{1}{4i}$ και, επομένως,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx = 2\pi i\,\mathrm{Res}(r; i) = \frac{\pi}{2}.$$

Παράδειγμα 9.1.5. *Υπολογισμός της πρωτεύουσας τιμής* pv $\int_{-\infty}^{+\infty} r(x)\,dx$ *του γενικευμένου ολοκληρώματος ρητής συνάρτησης* $r = \frac{p}{q}$ *όταν ο βαθμός του* q *υπερβαίνει τον βαθμό του* p *κατά μία μονάδα και το* q *δεν έχει πραγματικές ρίζες.*
Έστω, λοιπόν, $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ με $a_n \neq 0$ και $q(x) = b_{n+1}x^{n+1} + \cdots + b_1 x + b_0$ με $b_{n+1} \neq 0$.
Είναι εύκολο να δει κανείς ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} r(x)\,dx$ δεν συγκλίνει. Πράγματι, αν επαναλάβουμε τους αρχικούς υπολογισμούς του προηγούμενου παραδείγματος με $m = n+1$, βλέπουμε ότι ισχύει $\frac{1}{2}|a_n||z|^n \le |p(z)| \le 2|a_n||z|^n$ και $\frac{1}{2}|b_{n+1}||z|^{n+1} \le |q(z)| \le 2|b_{n+1}||z|^{n+1}$ για $|z| \ge R_0$ και άρα ισχύει $|r(z)| \ge \frac{1}{4}\frac{|a_n|}{|b_{n+1}|}\frac{1}{|z|} = \frac{c}{|z|}$ για $|z| \ge R_0$, όπου $c = \frac{1}{4}\frac{|a_n|}{|b_{n+1}|} > 0$. Τότε για πραγματικό $z = x$ έχουμε ότι ισχύει $|r(x)| \ge \frac{c}{x}$ για $x \ge R_0$. Η r είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται στο $[R_0, +\infty)$, οπότε έχει σταθερό πρόσημο σ' αυτό το διάστημα. Αν η r είναι θετική στο $[R_0, +\infty)$, τότε $\int_{R_0}^{+\infty} r(x)\,dx \ge c\int_{R_0}^{+\infty}\frac{1}{x}\,dx = +\infty$ ενώ, αν η r είναι αρνητική στο $[R_0, +\infty)$, τότε $\int_{R_0}^{+\infty} r(x)\,dx \le -c\int_{R_0}^{+\infty}\frac{1}{x}\,dx = -\infty$. Ομοίως, το $\int_{-\infty}^{-R_0} r(x)\,dx$ είναι ίσο με $+\infty$ ή $-\infty$.
Αφού το γενικευμένο ολοκλήρωμά στο $\mathbb{R}$ δεν συγκλίνει, μελετάμε την πρωτεύουσα τιμή του γενικευμένου ολοκληρώματος, δηλαδή το όριο

$$\mathrm{pv}\int_{-\infty}^{+\infty} r(x)\,dx = \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} r(x)\,dx.$$

Παρατηρούμε ότι

$$r(z) - \frac{a_n}{b_{n+1}}\frac{1}{z} = \frac{(a_{n-1}b_{n+1} - a_n b_n)z^n + \cdots + (a_0 b_{n+1} - a_n b_1)z - a_n b_0}{b_{n+1}z^{n+2} + \cdots + b_1 z^2 + b_0 z}.$$

Αυτή είναι ρητή συνάρτηση στην οποία ο βαθμός του παρονομαστή υπερβαίνει κατά δύο μονάδες τον βαθμό του αριθμητή και, σύμφωνα με όσα είπαμε στο προηγούμενο παράδειγμα, υπάρχει κάποιο $R_0 > 0$ ώστε να ισχύει

$$\Big|r(z) - \frac{a_n}{b_{n+1}}\,\frac{1}{z}\Big| \leq 4\frac{|a_{n-1}b_{n+1} - a_n b_n|}{|b_{n+1}|}\,\frac{1}{|z|^2} = \frac{C}{|z|} \qquad \text{για } |z| \geq R_0, \tag{9.5}$$

με $C = 4\frac{|a_{n-1}b_{n+1}-a_n b_n|}{|b_{n+1}|}$.
Τώρα, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, θεωρούμε τις ρίζες $z_1, \ldots, z_M$ του q οι οποίες βρίσκονται στο άνω ημιεπίπεδο και παίρνουμε πάλι

$$R > \max\{R_0, |z_1|, \ldots, |z_M|\}.$$

Εφαρμόζουμε πάλι, ακριβώς όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, το Θεώρημα Ολοκληρωτικών Υπολοίπων στην $r = \frac{p}{q}$ και στην ίδια κλειστή καμπύλη γ_R του σχήματος 36 και βρίσκουμε ότι

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_R} r(z)\,dz = \mathrm{Res}(r; z_1) + \cdots + \mathrm{Res}(r; z_M).$$

Κατόπιν, γράφουμε

$$\oint_{\gamma_R} r(z)\,dz = \int_{[-R,R]} r(z)\,dz + \int_{\mathrm{arc}(R,-R)} r(z)\,dz$$

και άρα

$$\begin{aligned}\int_{-R}^{R} r(x)\,dx &= 2\pi i(\mathrm{Res}(r; z_1) + \cdots + \mathrm{Res}(r; z_M)) - \int_{\mathrm{arc}(R,-R)} r(z)\,dz \\ &= 2\pi i(\mathrm{Res}(r; z_1) + \cdots + \mathrm{Res}(r; z_M)) - \int_{\mathrm{arc}(R,-R)} \Big(r(z) - \frac{a_n}{b_{n+1}}\,\frac{1}{z}\Big)\,dz \\ &\quad - \frac{a_n}{b_{n+1}}\int_{\mathrm{arc}(R,-R)} \frac{1}{z}\,dz.\end{aligned} \tag{9.6}$$

Ο τελευταίος όρος αυτής της σχέσης είναι

$$\frac{a_n}{b_{n+1}}\int_{\mathrm{arc}(R,-R)} \frac{1}{z}\,dz = iR\,\frac{a_n}{b_{n+1}}\int_0^{\pi} \frac{1}{Re^{it}}\,e^{it}\,dt = i\pi\,\frac{a_n}{b_{n+1}}.$$

Και τώρα, επειδή $R > R_0$, εκτιμάμε τον προτελευταίο όρο, χρησιμοποιώντας την (9.5), ως εξής:

$$\Big|\int_{\mathrm{arc}(R,-R)} \Big(r(z) - \frac{a_n}{b_{n+1}}\,\frac{1}{z}\Big)\,dz\Big| \leq \frac{C}{R^2}\,\pi R = \frac{C\pi}{R}.$$

Επομένως,

$$\int_{\mathrm{arc}(R,-R)} \Big(r(z) - \frac{a_n}{b_{n+1}}\,\frac{1}{z}\Big)\,dz \to 0 \qquad \text{όταν } R \to +\infty.$$

Άρα, παίρνοντας όριο καθώς $R \to +\infty$ στην (9.6), βρίσκουμε ότι

$$\mathrm{pv}\int_{-\infty}^{+\infty} r(x)\,dx = 2\pi i(\mathrm{Res}(r; z_1) + \cdots + \mathrm{Res}(r; z_M)) - i\pi\,\frac{a_n}{b_{n+1}}.$$

Ας δούμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα.
Έστω $r(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$. Οι ρίζες του $q(z) = z^2 + 1$ είναι οι $\pm i$ και θα υπολογίσουμε το $\mathrm{Res}(r; i)$.
Είναι $r(z) = \frac{z+1}{(z-i)(z+i)}$, οπότε το i είναι πόλος τάξης 1 της r. Γράφουμε $r(z) = \frac{(z+1)/(z+i)}{z-i} = \frac{g(z)}{z-i}$ με $g(z) = \frac{z+1}{z+i}$ και έχουμε ότι $\mathrm{Res}(r; i) = g(i) = \frac{i+1}{2i}$. Άρα

$$\mathrm{pv}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+1}{x^2+1}\,dx = 2\pi i\,\mathrm{Res}(r; i) - i\pi = \pi.$$

Παράδειγμα 9.1.6. *Υπολογισμός της πρωτεύουσας τιμής* pv $\int_{-\infty}^{+\infty} r(x)\,dx$ *του γενικευμένου ολοκληρώματος ρητής συνάρτησης* $r = \frac{p}{q}$ *όταν ο βαθμός του* q *υπερβαίνει τον βαθμό του* p *κατά τουλάχιστον μία μονάδα και το* q *έχει πραγματικές ρίζες, όλες με πολλαπλότητα* 1.

Έστω, λοιπόν, $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ με $a_n \neq 0$ και $q(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0$ με $b_m \neq 0$ και έστω $m \geq n+1$.

Υποθέτουμε ότι οι πραγματικές ρίζες του q είναι οι $x_1, \ldots, x_n$ με $x_1 < \ldots < x_n$ και υποθέτουμε, επίσης, ότι αυτές δεν είναι ρίζες και του p. Αν κάποια από αυτές, έστω η x_k, είναι ρίζα του p, τότε απλοποιούμε το $\frac{p}{q}$ απαλείφοντας τον κοινό παράγοντα $x - x_k$ και άρα μπορούμε να αγνοήσουμε την x_k ως ρίζα του q.

Επιλέγουμε $\epsilon_0 > 0$ έτσι ώστε τα συμμετρικά διαστήματα $[x_1 - \epsilon_0, x_1 + \epsilon_0], \ldots, [x_n - \epsilon_0, x_n + \epsilon_0]$ γύρω από τις πραγματικές ρίζες του q να είναι ξένα. Είναι αρκετό να πάρουμε

$$\epsilon_0 < \frac{1}{2}\min\{x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1}\}.$$

Για να συγκλίνει το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} r(x)\,dx$ θα πρέπει για κάθε ρίζα x_k να συγκλίνουν τα αντίστοιχα γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_{x_k-\epsilon_0}^{x_k} r(x)\,dx$ και $\int_{x_k}^{x_k+\epsilon_0} r(x)\,dx$. Αυτό, όμως, δεν είναι σωστό. Πράγματι, γράφουμε $r(z) = \frac{p(z)}{(z-x_k)q_k(z)} = \frac{g_k(z)}{z-x_k}$, όπου q_k είναι πολυώνυμο με $q_k(x_k) \neq 0$ και όπου η $g_k = \frac{p}{q_k}$ είναι ρητή συνάρτηση αναλυτική στο x_k. Επειδή $\lim_{z\to x_k} g_k(z) = g_k(x_k) \neq 0$, υπάρχει ϵ_k με $0 < \epsilon_k \leq \epsilon_0$ ώστε να ισχύει $|g_k(z)| \geq \frac{1}{2}|g_k(x_k)|$ για κάθε z με $|z - x_k| \leq \epsilon_k$. Δηλαδή ισχύει $|r(z)| \geq \frac{1}{2}\frac{|g_k(x_k)|}{|z-x_k|}$ για κάθε z με $0 < |z - x_k| \leq \epsilon_k$. Στο διάστημα $(x_k, x_k + \epsilon_k]$ η r είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται, όποτε έχει σταθερό πρόσημο. Αν η r είναι θετική στο $(x_k, x_k+\epsilon_k]$, τότε $\int_{x_k}^{x_k+\epsilon_k} r(x)\,dx \geq \frac{|g_k(x_k)|}{2}\int_{x_k}^{x_k+\epsilon_k}\frac{1}{x-x_k}\,dx = +\infty$ και, ομοίως, αν η r είναι αρνητική στο $(x_k, x_k+\epsilon_k]$, τότε $\int_{x_k}^{x_k+\epsilon_k} r(x)\,dx \leq -\frac{|g_k(x_k)|}{2}\int_{x_k}^{x_k+\epsilon_k}\frac{1}{x-x_k}\,dx = -\infty$. Επομένως, το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{x_k}^{x_k+\epsilon_k} r(x)\,dx$ δεν συγκλίνει. Ομοίως, και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{x_k-\epsilon_k}^{x_k} r(x)\,dx$ δεν συγκλίνει.

Γι αυτό μελετάμε την πρωτεύουσα τιμή του γενικευμένου ολοκληρώματος $\int_{-\infty}^{+\infty} r(x)\,dx$, δηλαδή το όριο

$$\begin{aligned}\text{pv}\int_{-\infty}^{+\infty} r(x)\,dx &= \lim_{R\to+\infty,\epsilon\to 0+}\Big(\int_{-R}^{x_1-\epsilon} r(x)\,dx + \int_{x_1+\epsilon}^{x_2-\epsilon} r(x)\,dx + \cdots \\ &\qquad \cdots + \int_{x_{n-1}+\epsilon}^{x_n-\epsilon} r(x)\,dx + \int_{x_n+\epsilon}^{R} r(x)\,dx\Big) \\ &= \lim_{R\to+\infty,\epsilon\to 0+} I(R,\epsilon),\end{aligned} \tag{9.7}$$

όπου με $I(R,\epsilon)$ συμβολίζουμε απλώς το άθροισμα των ολοκληρωμάτων στην παρένθεση.

Προσέξτε: ολοκληρώνουμε την r στο συμμετρικό διάστημα $[-R, R]$ αφαιρώντας από αυτό τα συμμετρικά διαστήματα $[x_1 - \epsilon, x_1 + \epsilon], \ldots, [x_n - \epsilon, x_n + \epsilon]$ (με $\epsilon \leq \epsilon_0$) και μετά παίρνουμε το όριο καθώς $R \to +\infty$ και $\epsilon \to 0+$.

Για να υπολογίσουμε το $I(R,\epsilon)$ χρησιμοποιούμε μια παραλλαγή της καμπύλης γ_R των παραδειγμάτων 9.1.4, 9.1.5. Θεωρούμε

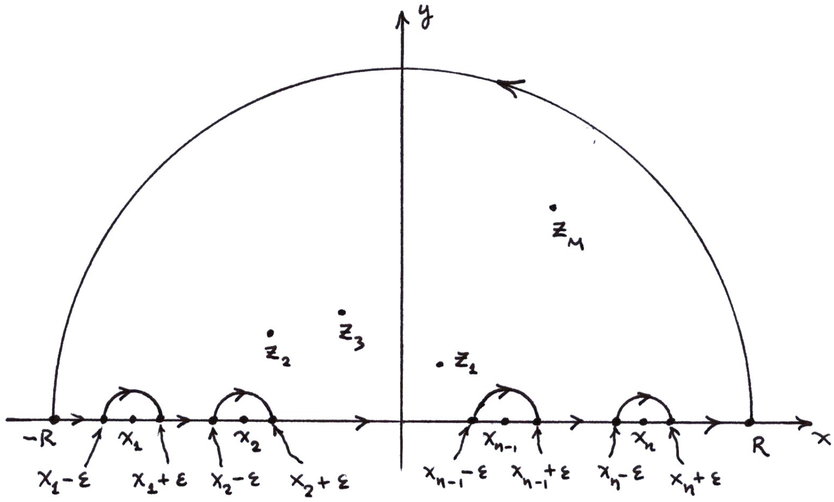
$$R > \max\{R_0, |z_1|, \ldots, |z_M|, x_n + 1, -x_1 + 1\}, \quad \epsilon < \min\{1, \epsilon_0, \operatorname{Im} z_1, \ldots, \operatorname{Im} z_M\}$$

και την κλειστή καμπύλη $\gamma_{R,\epsilon}$ η οποία αποτελείται από τα ευθύγραμμα τμήματα $[-R, x_1-\epsilon], [x_1+\epsilon, x_2 - \epsilon], \ldots, [x_{n-1} + \epsilon, x_n - \epsilon], [x_n + \epsilon, R]$, από το τόξο $\text{arc}(R, -R)$ του κύκλου $C(0; R)$ και από τα τόξα $-\text{arc}(x_1+\epsilon, x_1-\epsilon), \ldots, -\text{arc}(x_n+\epsilon, x_n-\epsilon)$ (με τις αρνητικές φορές περιστροφής) των αντίστοιχων κύκλων $C(x_1;\epsilon), \ldots, C(x_n;\epsilon)$. Η καμπύλη $\gamma_{R,\epsilon}$ περιστρέφεται μία φορά γύρω από καθεμιά από τις ρίζες $z_1, \ldots, z_M$ του q και δεν περιστρέφεται καμία φορά γύρω από καθεμιά από τις υπόλοιπες ρίζες του q. Από το Θεώρημα των Ολοκληρωτικών Υπολοίπων συνεπάγεται ότι

$$\oint_{\gamma_{R,\epsilon}} r(z)\,dz = 2\pi i(\text{Res}(r; z_1) + \cdots + \text{Res}(r; z_M)),$$

οπότε

$$\begin{aligned} I(R,\epsilon) = 2\pi i(\operatorname{Res}(r;z_1)+\cdots+\operatorname{Res}(r;z_M)) - \int_{\operatorname{arc}(R,-R)} r(z)\,dz \\ + \int_{\operatorname{arc}(x_1+\epsilon,x_1-\epsilon)} r(z)\,dz + \cdots + \int_{\operatorname{arc}(x_n+\epsilon,x_n-\epsilon)} r(z)\,dz. \end{aligned} \tag{9.8}$$



Σχ 37.

Το x_k είναι πόλος τάξης 1 της r και η σειρά Laurent της r κοντά στο x_k είναι η $\frac{g_k(x_k)}{z-x_k} + g_k'(x_k) + \frac{1}{2}g_k''(x_k)(z-x_k)+\cdots$. Στο παράδειγμα 9.1.3 είχαμε δει ότι $\operatorname{Res}(r;x_k) = g_k(x_k) = \frac{p(x_k)}{q'(x_k)}$. Επομένως, η r γράφεται $r(z) = \frac{c_k}{z-x_k} + f_k(z)$ για $z \neq x_k$ σε έναν δίσκο κέντρου x_k, όπου η f_k είναι αναλυτική στο x_k και $c_k = \operatorname{Res}(r;x_k)$. Άρα η f_k είναι φραγμένη σε έναν δίσκο κέντρου x_k, οπότε υπάρχει $M_k \geq 0$ και $\epsilon_k' > 0$ ώστε να ισχύει $|f_k(z)| \leq M_k$ για $|z-x_k| \leq \epsilon_k'$. Άρα όταν $0 < \epsilon \leq \epsilon_k'$ έχουμε

$$\Big|\int_{\operatorname{arc}(x_n+\epsilon,x_n-\epsilon)} f_k(z)\,dz\Big| \leq M_k\pi\epsilon$$

και, επομένως,

$$\lim_{\epsilon\to 0+}\int_{\operatorname{arc}(x_n+\epsilon,x_n-\epsilon)} f_k(z)\,dz = 0.$$

Άρα

$$\begin{aligned} \int_{\operatorname{arc}(x_n+\epsilon,x_n-\epsilon)} r(z)\,dz &= c_k\int_{\operatorname{arc}(x_n+\epsilon,x_n-\epsilon)} \frac{1}{z-x_k}\,dz + \int_{\operatorname{arc}(x_n+\epsilon,x_n-\epsilon)} f_k(z)\,dz \\ &= c_k\int_0^\pi \frac{1}{\epsilon e^{it}}\epsilon i e^{it}\,dt + \int_{\operatorname{arc}(x_n+\epsilon,x_n-\epsilon)} f_k(z)\,dz \\ &= \pi i c_k + \int_{\operatorname{arc}(x_n+\epsilon,x_n-\epsilon)} f_k(z)\,dz \to \pi i c_k \qquad \text{όταν } \epsilon\to 0+. \end{aligned} \tag{9.9}$$

Το όριο του $\int_{\operatorname{arc}(R,-R)} r(z)\,dz$ όταν $R\to+\infty$ υπάρχει έτοιμο στα παραδείγματα 9.1.4 και 9.1.5:

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\operatorname{arc}(R,-R)} r(z)\,dz = \begin{cases} 0, & \text{αν } m \geq n+2 \\ i\pi\,\frac{a_n}{b_{n+1}}, & \text{αν } m = n+1 \end{cases} \tag{9.10}$$

Από τις (9.7), (9.8), (9.9) και (9.10) συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned}\text{pv}\int_{-\infty}^{+\infty} r(x)\,dx &= 2\pi i(\text{Res}(r;z_1)+\cdots+\text{Res}(r;z_M))\\ &\quad+\pi i(\text{Res}(r;x_1)+\cdots+\text{Res}(r;x_n))\\ &\quad-\begin{cases}0, & \text{αν } m\geq n+2\\ i\pi\,\frac{a_n}{b_{n+1}}, & \text{αν } m=n+1\end{cases}\end{aligned}$$

Κι ένα συγκεκριμένο παράδειγμα.
Έστω $r(x)=\frac{x^2+3}{(x+1)(x^2+1)}$. Οι ρίζες του $(z+1)(z^2+1)$ είναι το -1 και οι $\pm i$.
Γράφουμε $r(z)=\frac{(z^2+3)/z(z+i)}{z-i}=\frac{g(z)}{z-i}$ με $g(z)=\frac{z^2+3}{(z+1)(z+i)}$, οπότε $\text{Res}(r;i)=g(i)=-\frac{1+i}{2}$.
Κατόπιν, $r(z)=\frac{(z^2+3)/(z^2+1)}{z+1}=\frac{g(z)}{z+1}$ με $g(z)=\frac{z^2+3}{z^2+1}$ και τότε $\text{Res}(r;-1)=g(-1)=2$.
Άρα

$$\text{pv}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+3}{x(x^2+1)}\,dx=2\pi i\,\text{Res}(r;i)+\pi i\,\text{Res}(r;0)-i\pi=-\pi i(1+i)+2\pi i-\pi i=\pi.$$

Παράδειγμα 9.1.7. *Υπολογισμός των γεν. ολοκληρωμάτων $\int_{-\infty}^{+\infty} r(x)\cos x\,dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} r(x)\sin x\,dx$ (ή πρωτευουσών τιμών τέτοιων ολοκληρωμάτων), όπου η $r=\frac{p}{q}$ είναι ρητή συνάρτηση, ο βαθμός του q υπερβαίνει τον βαθμό του p κατά τουλάχιστον 1 μονάδα, οι πραγματικές ρίζες του q (αν υπάρχουν) έχουν όλες πολλαπλότητα 1 και, επίσης, οι συντελεστές των p,q είναι πραγματικοί αριθμοί.*
Επειδή οι συντελεστές των p,q είναι πραγματικοί, ισχύει $r(x)\in\mathbb{R}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ το οποίο δεν είναι ρίζα του q. Επομένως,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} r(x)\cos x\,dx=\text{Re}\int_{-\infty}^{+\infty} r(x)e^{ix}\,dx,\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} r(x)\sin x\,dx=\text{Im}\int_{-\infty}^{+\infty} r(x)e^{ix}\,dx$$

και υπολογίζουμε το $\int_{-\infty}^{+\infty} r(x)e^{ix}\,dx$ (ή την πρωτεύουσα τιμή του).
Η μέθοδος υπολογισμού έχει ήδη περιγραφεί στα παραδείγματα 9.1.4, 9.1.5 και 9.1.6. Χρησιμοποιούμε την καμπύλη του σχήματος 36 ή του σχήματος 37, ανάλογα με το αν το q δεν έχει ή έχει πραγματικές ρίζες, και υπολογίζουμε τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα της συνάρτησης $r(z)e^{iz}$ στις ρίζες του πολυωνύμου q.
Ως συγκεκριμένο παράδειγμα θα υπολογίσουμε το πολύ σημαντικό γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$. (Η ισότητα ισχύει επειδή η $\frac{\sin x}{x}$ είναι άρτια.)
Θα υπολογίσουμε την πρωτεύουσα τιμή pv $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x}\,dx$ αντί του $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$. Όμως, πριν προχωρήσουμε προσέξτε τη διαφορά: η συνάρτηση $\frac{e^{ix}}{x}=\frac{\cos x}{x}+i\frac{\sin x}{x}$ απειρίζεται στο 0 επειδή το πραγματικό μέρος $\frac{\cos x}{x}$ απειρίζεται στο 0 ενώ το φανταστικό μέρος $\frac{\sin x}{x}$ δεν απειρίζεται στο 0. Μάλιστα, αν ορίσουμε την συνάρτηση αυτή και στο 0 έτσι ώστε να έχει τιμή ίση με το $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, τότε γίνεται συνεχής στο 0.
Η συνάρτηση $\frac{e^{iz}}{z}$ είναι αναλυτική στο ανοικτό και αστρόμορφο $\mathbb{C}$ εκτός του σημείου 0 στο οποίο έχει πόλο τάξης 1. Πράγματι, χρησιμοποιώντας τη σειρά Taylor της e^{iz} με κέντρο 0 βρίσκουμε ότι η σειρά Laurent της $\frac{e^{iz}}{z}$ κοντά στο 0 είναι η $\frac{1}{z}+i+\frac{i^2}{2}\,z+\frac{i^3}{6}\,z^2+\cdots$.
Θεωρούμε την κλειστή καμπύλη $\gamma_{R,\epsilon}$ του σχήματος 38 η οποία αποτελείται από τα ευθύγραμμα τμήματα $[-R,-\epsilon]$ και $[\epsilon,R]$, το τόξο $\text{arc}(R,-R)$ του κύκλου $C(0;R)$ και το τόξο $-\,\text{arc}(\epsilon,-\epsilon)$ (με την αρνητική φορά περιστροφής) του κύκλου $C(0;\epsilon)$. Η καμπύλη $\gamma_{R,\epsilon}$ δεν περιστρέφεται καμία φορά γύρω από τον πόλο 0 της $\frac{e^{iz}}{z}$. Από το Θεώρημα των Ολοκληρωτικών Υπολοίπων συνεπάγεται ότι

$$\oint_{\gamma_{R,\epsilon}}\frac{e^{iz}}{z}\,dz=0,$$

οπότε

$$\int_{-R}^{-\epsilon}\frac{e^{ix}}{x}\,dx+\int_{\epsilon}^{R}\frac{e^{ix}}{x}\,dx=-\int_{\text{arc}(R,-R)}\frac{e^{iz}}{z}\,dz+\int_{\text{arc}(\epsilon,-\epsilon)}\frac{e^{iz}}{z}\,dz.\tag{9.11}$$

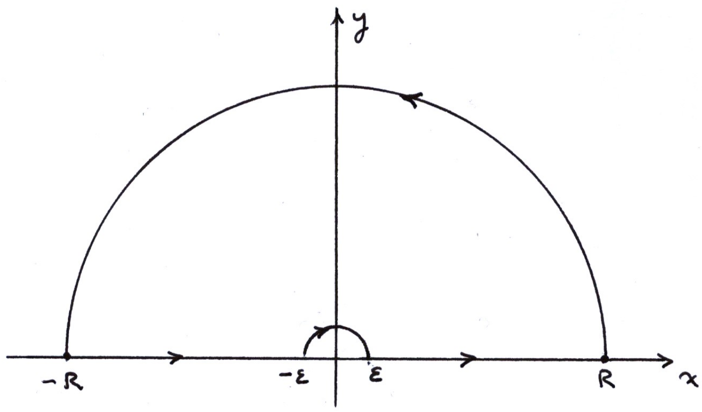
Κατόπιν, υπολογίζουμε

$$\int_{\mathrm{arc}(R,-R)} \frac{e^{iz}}{z}\, dz = \int_0^{\pi} \frac{e^{iRe^{it}}}{Re^{it}}\, iRe^{it}\, dt = i \int_0^{\pi} e^{-R\sin t + iR\cos t}\, dt$$

και, επομένως,

$$\begin{aligned} \Big| \int_{\mathrm{arc}(R,-R)} \frac{e^{iz}}{z}\, dz \Big| &\leq \int_0^{\pi} e^{-R\sin t}\, dt = 2\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin t}\, dt \leq 2\int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2R}{\pi} t}\, dt \\ &= \frac{\pi}{R}(1-e^{-R}) \to 0 \qquad \text{όταν } R \to +\infty. \end{aligned} \tag{9.12}$$

Στην δεύτερη ανισότητα χρησιμοποιήσαμε την γνωστή ανισότητα $\sin t \geq \frac{2t}{\pi}$ για $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.



Σx 38.

Από την σειρά Laurent της $\frac{e^{iz}}{z}$ κοντά στο 0 βλέπουμε ότι ισχύει $\frac{e^{iz}}{z} = \frac{1}{z} + h(z)$ για $z \neq 0$, όπου η h είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$. Τώρα, η h είναι φραγμένη σε μια περιοχή του 0, δηλαδή υπάρχει $M \geq 0$ ώστε να ισχύει $|h(z)| \leq 1$ για $|z| \leq 1$. Άρα για $\epsilon \leq 1$ έχουμε

$$\Big| \int_{\mathrm{arc}(\epsilon,-\epsilon)} h(z)\, dz \Big| \leq M\pi\epsilon \to 0 \qquad \text{όταν } \epsilon \to 0+\, .$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \int_{\mathrm{arc}(\epsilon,-\epsilon)} \frac{e^{iz}}{z}\, dz &= \int_{\mathrm{arc}(\epsilon,-\epsilon)} \frac{1}{z}\, dz + \int_{\mathrm{arc}(\epsilon,-\epsilon)} h(z)\, dz \\ &= \int_0^{\pi} \frac{1}{\epsilon e^{it}}\, i\epsilon e^{it}\, dt + \int_{\mathrm{arc}(\epsilon,-\epsilon)} h(z)\, dz \\ &= \pi i + \int_{\mathrm{arc}(\epsilon,-\epsilon)} h(z)\, dz \to \pi i \qquad \text{όταν } \epsilon \to 0+\, . \end{aligned} \tag{9.13}$$

Από τις (9.11), (9.12) και (9.13) συνεπάγεται

$$\mathrm{pv}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x}\, dx = \lim_{\epsilon\to 0+, R\to+\infty} \Big(\int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x}\, dx + \int_{\epsilon}^{R} \frac{e^{ix}}{x}\, dx \Big) = \pi i.$$

Επειδή η συνάρτηση $\frac{\cos x}{x}$ είναι περιττή, το πραγματικό μέρος της σχέσης αυτής μηδενίζεται και, επειδή η $\frac{\sin x}{x}$ είναι άρτια, έχουμε ότι $\int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x}\, dx + \int_{\epsilon}^{R} \frac{e^{ix}}{x}\, dx = 2i \int_{\epsilon}^{R} \frac{\sin x}{x}\, dx$ και, επομένως,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \lim_{\epsilon\to 0+, R\to+\infty} \int_{\epsilon}^{R} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Παράδειγμα 9.1.8. Θα υπολογίσουμε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+4}\, dx$.
Θεωρούμε τον αναλυτικό κλάδο του λογαρίθμου, που θα τον συμβολίσουμε $\log z$, στο ανοικτό και αστρόμορφο σύνολο A το οποίο προκύπτει αν από το $\mathbb{C}$ αφαιρέσουμε την ημιευθεία του αρνητικού y-άξονα (μαζί με το 0) και ο οποίος έχει την τιμή 0 στο σημείο 1. Αυτός ο κλάδος έχει τύπο

$$\log z = \ln r + i\theta \qquad \text{για } z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \text{ με } r > 0 \text{ και } -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}.$$

Η συνάρτηση $\frac{\log z}{z^2+4}$ είναι αναλυτική στο A εκτός του σημείου $2i$ στο οποίο έχει πόλο τάξης 1. Πράγματι, γράφουμε $\frac{\log z}{z^2+4} = \frac{(\log z)/(z+2i)}{z-2i} = \frac{g(z)}{z-2i}$ και έχουμε ότι η $g(z) = \frac{\log z}{z+2i}$ είναι αναλυτική στο A με $g(2i) = \frac{\pi}{8} - \frac{\ln 2}{4}\, i$. Επίσης, είναι $\mathrm{Res}(\frac{\log z}{z^2+4}; 2i) = g(2i) = \frac{\pi}{8} - \frac{\ln 2}{4}\, i$.
Τώρα θεωρούμε την κλειστή καμπύλη $\gamma_{R,\epsilon}$ στο σχήμα 38 από το προηγούμενο παράδειγμα. Από το Θεώρημα των Ολοκληρωτικών Υπολοίπων συνεπάγεται ότι

$$\oint_{\gamma_{R,\epsilon}} \frac{\log z}{z^2+4}\, dz = 2\pi i\, \mathrm{Res}\Big(\frac{\log z}{z^2+4}; 2i\Big) = \frac{\pi \ln 2}{2} + \frac{\pi^2}{4}\, i,$$

οπότε

$$\int_{-R}^{-\epsilon} \frac{\ln|x| + i\pi}{x^2+4}\, dx + \int_{\epsilon}^{R} \frac{\ln x}{x^2+4}\, dx = \frac{\pi \ln 2}{2} + \frac{\pi^2}{4}\, i - \int_{\mathrm{arc}(R,-R)} \frac{\log z}{z^2+4}\, dz + \int_{\mathrm{arc}(\epsilon,-\epsilon)} \frac{\log z}{z^2+4}\, dz$$

και, επομένως,

$$2\int_{\epsilon}^{R} \frac{\ln x}{x^2+4}\, dx + i\pi \int_{\epsilon}^{R} \frac{1}{x^2+4}\, dx = \frac{\pi \ln 2}{2} + \frac{\pi^2}{4}\, i - \int_{\mathrm{arc}(R,-R)} \frac{\log z}{z^2+4}\, dz + \int_{\mathrm{arc}(\epsilon,-\epsilon)} \frac{\log z}{z^2+4}\, dz.$$

Θεωρούμε μόνο το πραγματικό μέρος των δύο πλευρών της τελευταίας σχέσης και καταλήγουμε στην

$$2\int_{\epsilon}^{R} \frac{\ln x}{x^2+4}\, dx = \frac{\pi \ln 2}{2} - \mathrm{Re} \int_{\mathrm{arc}(R,-R)} \frac{\log z}{z^2+4}\, dz + \mathrm{Re} \int_{\mathrm{arc}(\epsilon,-\epsilon)} \frac{\log z}{z^2+4}\, dz. \tag{9.14}$$

Τώρα εκτιμάμε:

$$\Big| \int_{\mathrm{arc}(R,-R)} \frac{\log z}{z^2+4}\, dz \Big| \leq \frac{\ln R + \pi}{R^2 - 4}\, \pi R \to 0 \qquad \text{όταν } R \to +\infty \tag{9.15}$$

και

$$\Big| \int_{\mathrm{arc}(\epsilon,-\epsilon)} \frac{\log z}{z^2+4}\, dz \Big| \leq \frac{\ln \epsilon + \pi}{4 - \epsilon^2}\, \pi \epsilon \to 0 \qquad \text{όταν } \epsilon \to 0+\,. \tag{9.16}$$

Από τις (9.14), (9.15) και (9.16) συνεπάγεται

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+4}\, dx = \lim_{\epsilon \to 0+, R \to +\infty} \int_{\epsilon}^{R} \frac{\ln x}{x^2+4}\, dx = \frac{\pi \ln 2}{4}.$$

Παράδειγμα 9.1.9. Θα υπολογίσουμε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{x+1}\, dx$ με $0 < a < 1$.
Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $x = t^2$ και (αφού θέσουμε x στην θέση του t) έχουμε ότι

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{x+1}\, dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{x^{2a-1}}{x^2+1}\, dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{x^b}{x^2+1}\, dx \tag{9.17}$$

με $b = 2a - 1$ και $-1 < b < 1$.
Θεωρούμε τον αναλυτικό κλάδο του λογαρίθμου του προηγούμενου παραδείγματος, που θα τον

συμβολίσουμε και πάλι $\log z$, στο ίδιο ανοικτό και αστρόμορφο σύνολο A.
Η συνάρτηση

$$h(z) = e^{b \log z}$$

είναι αναλυτική στο A και για πραγματικό $z = x$ γράφεται $h(x) = e^{b \ln x} = x^b$.
Η συνάρτηση $\frac{h(z)}{z^2+1}$ είναι αναλυτική στο A εκτός του σημείου i στο οποίο έχει πόλο τάξης 1. Πράγματι, γράφουμε $\frac{h(z)}{z^2+1} = \frac{h(z)/(z+i)}{z-i} = \frac{g(z)}{z-i}$ και έχουμε ότι η $g(z) = \frac{h(z)}{z+i}$ είναι αναλυτική στο A με $g(i) = \frac{h(i)}{2i} = \frac{e^{\frac{b\pi}{2} i}}{2i}$. Επίσης, είναι $\mathrm{Res}(\frac{h(z)}{z^2+1}; i) = g(i) = \frac{e^{\frac{b\pi}{2} i}}{2i}$.
Τώρα θεωρούμε πάλι την κλειστή καμπύλη $\gamma_{R,\epsilon}$ του σχήματος 38. Από το Θεώρημα των Ολοκληρωτικών Υπολοίπων συνεπάγεται ότι

$$\oint_{\gamma_{R,\epsilon}} \frac{h(z)}{z^2+1}\, dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}\Big(\frac{h(z)}{z^2+1}; i\Big) = \pi e^{\frac{b\pi}{2} i},$$

οπότε

$$\int_{-R}^{-\epsilon} \frac{h(x)}{x^2+1}\, dx + \int_{\epsilon}^{R} \frac{h(x)}{x^2+1}\, dx = \pi e^{\frac{b\pi}{2} i} - \int_{\mathrm{arc}(R,-R)} \frac{h(z)}{z^2+1}\, dz + \int_{\mathrm{arc}(\epsilon,-\epsilon)} \frac{h(z)}{z^2+1}\, dz$$

και, επομένως,

$$\int_{\epsilon}^{R} \frac{h(-x)}{x^2+1}\, dx + \int_{\epsilon}^{R} \frac{h(x)}{x^2+1}\, dx = \pi e^{\frac{b\pi}{2} i} - \int_{\mathrm{arc}(R,-R)} \frac{h(z)}{z^2+1}\, dz + \int_{\mathrm{arc}(\epsilon,-\epsilon)} \frac{h(z)}{z^2+1}\, dz$$

και άρα

$$(e^{b\pi i} + 1) \int_{\epsilon}^{R} \frac{x^b}{x^2+1}\, dx = \pi e^{\frac{b\pi}{2} i} - \int_{\mathrm{arc}(R,-R)} \frac{h(z)}{z^2+1}\, dz + \int_{\mathrm{arc}(\epsilon,-\epsilon)} \frac{h(z)}{z^2+1}\, dz. \tag{9.18}$$

Τώρα εκτιμάμε:

$$\Big| \int_{\mathrm{arc}(R,-R)} \frac{h(z)}{z^2+1}\, dz \Big| \le \frac{R^b}{R^2-1}\, \pi R \to 0 \qquad \text{όταν } R \to +\infty \tag{9.19}$$

και

$$\Big| \int_{\mathrm{arc}(\epsilon,-\epsilon)} \frac{h(z)}{z^2+1}\, dz \Big| \le \frac{\epsilon^b}{1-\epsilon^2}\, \pi \epsilon \to 0 \qquad \text{όταν } \epsilon \to 0+\,. \tag{9.20}$$

Από τις (9.18), (9.19) και (9.20) συνεπάγεται

$$(e^{b\pi i} + 1) \lim_{\epsilon \to 0+, R \to +\infty} \int_{\epsilon}^{R} \frac{x^b}{x^2+1}\, dx = \pi e^{\frac{b\pi}{2} i}$$

και άρα

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^b}{x^2+1}\, dx = \frac{\pi e^{\frac{b\pi}{2} i}}{e^{b\pi i} + 1} = \frac{\pi}{2\cos(\frac{b\pi}{2})}.$$

Τέλος, λόγω της (9.17) είναι

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{x+1}\, dx = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

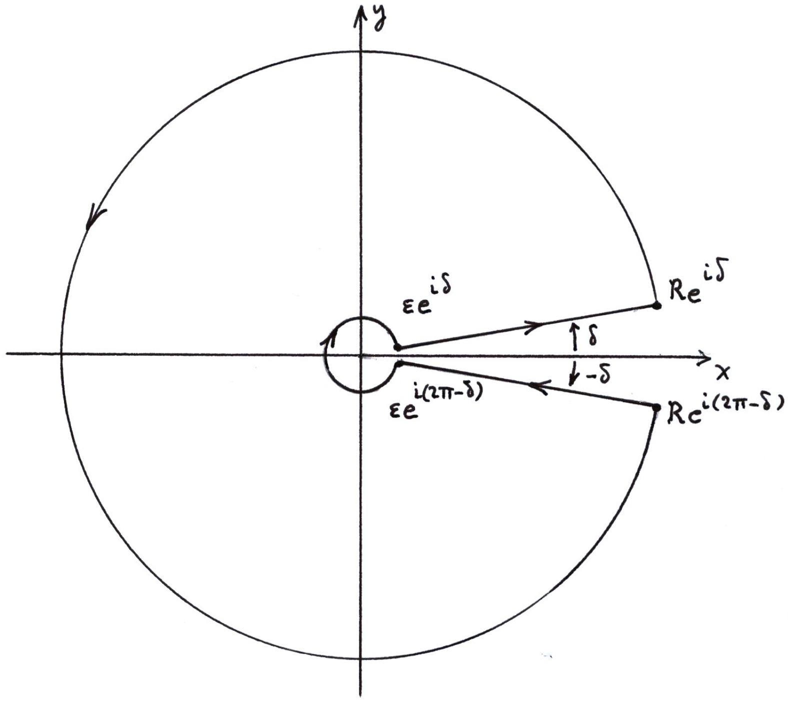
Τώρα θα υπολογίσουμε το $\int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{x+1}\, dx$ με δεύτερο τρόπο.
Θεωρούμε τον αναλυτικό κλάδο του λογαρίθμου, που θα τον συμβολίσουμε και πάλι $\log z$, στο ανοικτό και αστρόμορφο σύνολο B που προκύπτει αν από το $\mathbb{C}$ αφαιρέσουμε την ημιευθεία του θετικού x-άξονα (μαζί με το 0) και ο οποίος έχει την τιμή $i\pi$ στο σημείο -1. Αυτός ο κλάδος έχει τύπο

$$\log z = \ln r + i\theta \qquad \text{για } z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \text{ με } r > 0 \text{ και } 0 < \theta < 2\pi.$$

Η συνάρτηση

$$h(z) = e^{(a-1)\log z}$$

είναι αναλυτική στο B, οπότε η συνάρτηση $\frac{h(z)}{z+1}$ είναι αναλυτική στο B εκτός του σημείου -1 στο οποίο έχει πόλο τάξης 1. Πράγματι, είναι $\mathrm{Res}(\frac{h(z)}{z+1}; -1) = h(-1) = e^{(a-1)\pi i}$.
Τώρα θεωρούμε την κλειστή καμπύλη $\gamma_{R,\epsilon,\delta}$ στο σχήμα 39.



Σx 39.

Από το Θεώρημα των Ολοκληρωτικών Υπολοίπων συνεπάγεται ότι

$$\oint_{\gamma_{R,\epsilon,\delta}} \frac{h(z)}{z+1}\, dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}\Big(\frac{h(z)}{z+1}; -1\Big) = 2\pi i e^{(a-1)\pi i},$$

οπότε

$$\begin{aligned}\int_{[\epsilon e^{i\delta}, Re^{i\delta}]} \frac{h(z)}{z+1}\, dz - \int_{[\epsilon e^{i(2\pi-\delta)}, Re^{i(2\pi-\delta)}]} \frac{h(z)}{z+1}\, dz \\ = 2\pi i e^{(a-1)\pi i} - \int_{\mathrm{arc}(Re^{i\delta}, Re^{i(2\pi-\delta)})} \frac{h(z)}{z+1}\, dz \\ + \int_{\mathrm{arc}(\epsilon e^{i\delta}, \epsilon e^{i(2\pi-\delta)})} \frac{h(z)}{z+1}\, dz.\end{aligned} \tag{9.21}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\int_{[\epsilon e^{i\delta}, Re^{i\delta}]} \frac{h(z)}{z+1}\, dz = e^{ia\delta} \int_\epsilon^R \frac{r^{a-1}}{re^{i\delta}+1}\, dr.$$

Με σταθερά ϵ και R, παίρνουμε όριο όταν $\delta \to 0+$. Προφανώς, $e^{ia\delta} \to 1$. Επίσης,

$$\int_\epsilon^R \frac{r^{a-1}}{re^{i\delta}+1}\, dr \to \int_\epsilon^R \frac{r^{a-1}}{r+1}\, dr.$$

Αυτό φαίνεται εύκολα ως εξής:

$$\begin{aligned}\Big|\int_\epsilon^R \frac{r^{a-1}}{re^{i\delta}+1}\,dr - \int_\epsilon^R \frac{r^{a-1}}{r+1}\,dr\Big| &\le \int_\epsilon^R \Big|\frac{r^{a-1}}{re^{i\delta}+1} - \frac{r^{a-1}}{r+1}\Big|\,dr \\ &= |e^{i\delta}-1|\int_\epsilon^R \frac{r^a}{|re^{i\delta}+1|(r+1)}\,dr \\ &\le |e^{i\delta}-1|\int_\epsilon^R r^a\,dr \to 0 \qquad \text{όταν } \delta\to 0+\,.\end{aligned}$$

Άρα

$$\int_{[\epsilon e^{i\delta}, Re^{i\delta}]} \frac{h(z)}{z+1}\,dz \to \int_\epsilon^R \frac{r^{a-1}}{r+1}\,dr \qquad \text{όταν } \delta\to 0+\,. \tag{9.22}$$

Κατόπιν βλέπουμε ότι

$$\int_{[\epsilon e^{i(2\pi-\delta)}, Re^{i(2\pi-\delta)}]} \frac{h(z)}{z+1}\,dz = e^{ia(2\pi-\delta)}\int_\epsilon^R \frac{r^{a-1}}{re^{-i\delta}+1}\,dr.$$

Πάλι με σταθερά ϵ και R, παίρνουμε όριο όταν $\delta\to 0+$. Προφανώς, $e^{ia(2\pi-\delta)}\to e^{i2a\pi}$. Επίσης,

$$\int_\epsilon^R \frac{r^{a-1}}{re^{-i\delta}+1}\,dr \to \int_\epsilon^R \frac{r^{a-1}}{r+1}\,dr.$$

Αυτό αποδεικνύεται ακριβώς όπως και το προηγούμενο ανάλογο όριο.
Άρα

$$\int_{[\epsilon e^{i(2\pi-\delta)}, Re^{i(2\pi-\delta)}]} \frac{h(z)}{z+1}\,dz \to e^{i2a\pi}\int_\epsilon^R \frac{r^{a-1}}{r+1}\,dr \qquad \text{όταν } \delta\to 0+\,. \tag{9.23}$$

Τώρα εκτιμάμε:

$$\Big|\int_{\mathrm{arc}(Re^{i\delta}, Re^{i(2\pi-\delta)})} \frac{h(z)}{z+1}\,dz\Big| \le \frac{R^{a-1}}{R-1}(2\pi-2\delta)R \le \frac{2\pi R^a}{R-1}. \tag{9.24}$$

και

$$\Big|\int_{\mathrm{arc}(\epsilon e^{i\delta}, \epsilon e^{i(2\pi-\delta)})} \frac{h(z)}{z+1}\,dz\Big| \le \frac{\epsilon^{a-1}}{1-\epsilon}(2\pi-2\delta)\epsilon \le \frac{2\pi\epsilon^a}{1-\epsilon}. \tag{9.25}$$

Χρησιμοποιώντας τις (9.24) και (9.25), από την (9.21) βρίσκουμε ότι

$$\Big|\int_{[\epsilon e^{i\delta}, Re^{i\delta}]} \frac{h(z)}{z+1}\,dz - \int_{[\epsilon e^{i(2\pi-\delta)}, Re^{i(2\pi-\delta)}]} \frac{h(z)}{z+1}\,dz - 2\pi i e^{(a-1)\pi i}\Big| \le \frac{2\pi R^a}{R-1} + \frac{2\pi\epsilon^a}{1-\epsilon}.$$

Επομένως, βάσει των (9.22) και (9.23), παίρνοντας όριο καθώς $\delta\to 0+$, έχουμε

$$\Big|(1-e^{i2a\pi})\int_\epsilon^R \frac{r^{a-1}}{r+1}\,dr - 2\pi i e^{(a-1)\pi i}\Big| \le \frac{2\pi R^a}{R-1} + \frac{2\pi\epsilon^a}{1-\epsilon}.$$

Τέλος, παίρνουμε όριο καθώς $\epsilon\to 0+$ και $R\to+\infty$ και καταλήγουμε στο ότι

$$(1-e^{i2a\pi})\lim_{\epsilon\to 0+, R\to+\infty}\int_\epsilon^R \frac{r^{a-1}}{r+1}\,dr = 2\pi i e^{(a-1)\pi i}$$

και άρα

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{x+1}\,dx = \frac{2\pi i e^{(a-1)\pi i}}{1-e^{i2a\pi}} = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Παράδειγμα 9.1.10. *Υπολογισμός ολοκληρωμάτων $\int_0^{2\pi} r(\sin\theta, \cos\theta)\, d\theta$, όπου $r(s,t)$ είναι ρητή συνάρτηση δύο μεταβλητών.*
Αρχίζουμε παραμετρικοποιώντας τον κύκλο $C(0;1)$ με την παραμετρική εξίσωση

$$z = \gamma(\theta) = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \qquad \text{για } 0 \le \theta \le 2\pi$$

και έχουμε ότι

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\Big(z + \frac{1}{z}\Big), \quad \sin\theta = \frac{1}{2i}\Big(z - \frac{1}{z}\Big)$$

και

$$\frac{dz}{d\theta} = \gamma'(\theta) = ie^{i\theta} = iz.$$

Επομένως,

$$\int_0^{2\pi} r(\sin\theta, \cos\theta)\, d\theta = \frac{1}{i}\oint_{C(0;1)} r\Big(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\Big)\,\frac{1}{z}\, dz.$$

Η συνάρτηση $s(z) = r(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz})\frac{1}{z}$ είναι ρητή συνάρτηση του z κι έτσι έχουμε να υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης στην κλειστή καμπύλη $C(0;1)$. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα των Ολοκληρωτικών Υπολοίπων αφού υπολογίσουμε τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα της s στους πόλους της οι οποίοι περικλείονται από τον κύκλο $C(0;1)$.
Ως παράδειγμα θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos\theta}\, d\theta$.
Μετά από τα προκαταρκτικά καταλήγουμε στο ότι

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos\theta}\, d\theta = \frac{1}{i}\oint_{C(0;1)} \frac{1}{2+\frac{z^2+1}{2z}}\,\frac{1}{z}\, dz = -2i\oint_{C(0;1)} \frac{1}{z^2+4z+1}\, dz. \tag{9.26}$$

Η $\frac{1}{z^2+4z+1}$ είναι αναλυτική στο ανοικτό και αστρόμορφο $\mathbb{C}$ εκτός των σημείων $-2\pm\sqrt{3}$. Ο κύκλος $C(0;1)$ (με την θετική φορά διαγραφής του) περιστρέφεται μία φορά γύρω από το $z_1 = -2+\sqrt{3}$ και καμία φορά γύρω από το $z_2 = -2-\sqrt{3}$. Το z_1 είναι πόλος της $\frac{1}{z^2+4z+1}$ τάξης 1, αφού είναι $\frac{1}{z^2+4z+1} = \frac{1/(z-z_2)}{z-z_1}$, και $\mathrm{Res}(\frac{1}{z^2+4z+1}; z_1) = \frac{1}{z_1-z_2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. Άρα από την (9.26) και το Θεώρημα Ολοκληρωτικών Υπολοίπων έχουμε

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos\theta}\, d\theta = 4\pi\,\mathrm{Res}\Big(\frac{1}{z^2+4z+1}; z_1\Big) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

Ασκήσεις.

9.1.1. Βρείτε τα ιδιάζοντα μέρη των σειρών Laurent καθώς και τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα των συναρτήσεων $\frac{1}{z^2+5z+6}$, $\frac{1}{(z^2-1)^2}$, $e^z + e^{1/z}$, $\frac{\cos z - 1}{z^4}$ στις μεμονωμένες (μη-αιρόμενες) ανωμαλίες τους.

9.1.2. Βρείτε τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα των συναρτήσεων $\frac{1}{\sin z}$, $\tan z$, $\frac{1}{\sin^2 z}$, $\frac{1}{e^z-1}$ στις μεμονωμένες ανωμαλίες τους.

9.1.3. Βρείτε τά $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4}{1+x^8}\, dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\, dx$ $(a,b > 0,\ a \ne b)$, pv $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3}{x^4-4x^2+5}\, dx$, pv $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{(x-1)(x^2+1)^2}\, dx$ με τις μεθόδους των παραδειγμάτων 9.1.4, 9.1.5 και 9.1.6.

9.1.4. Βρείτε τά $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+4)}\, dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3\sin x}{x^4+1}\, dx$, $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\, dx$ $(a,b > 0,\ a \ne b)$, pv $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x-1)(x^2+1)}\, dx$ με την μέθοδο του παραδείγματος 9.1.7.

9.1.5. Βρείτε τά $\int_0^{2\pi} \frac{1}{(1-a\cos\theta)^2}\, d\theta$ $(0 < a < 1)$, $\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}\, d\theta$ $(0 < a < 1)$ με την μέθοδο του παραδείγματος 9.1.10.

9.1.6. Βρείτε τό $\int_0^{+\infty} \frac{x^a}{x^2+3x+2}\, dx$ $(-1 < a < 1)$ με τις μεθόδους του παραδείγματος 9.1.9.

9.1.7. Βρείτε τά $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(x^2+1)(x^2+4)}\, dx$, $\int_0^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{x^2+1}\, dx$ με την μέθοδο του παραδείγματος 9.1.8.

9.1.8. Βρείτε τό $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{e^x+e^{-x}}\, dx$.

9.1.9. Βρείτε τά $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3+8}\, dx$, $\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^4+16}\, dx$ μέσω του τύπου $\int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{x+1}\, dx = \frac{\pi}{\sin a\pi}$.

9.1.10. Αν $z_1, \ldots, z_N \in D(0; R)$ και η f είναι αναλυτική σε ένα ανοικτό σύνολο το οποίο περιέχει τον cl $D(0; R)$, υπολογίστε το $\int_{C(0;R)} \frac{f(z)}{(z-z_1)\cdots(z-z_n)}\, dz$.

9.1.11. Έστω ρητή συνάρτηση $r = \frac{p}{q}$ και έστω ότι ο βαθμός του πολυωνύμου q υπερβαίνει τον βαθμό του πολυωνύμου p κατά τουλάχιστον δύο μονάδες. Αν $z_1, \ldots, z_n$ είναι οι (ανά δύο διαφορετικές) ρίζες του q αποδείξτε ότι $\sum_{k=1}^n \mathrm{Res}(r; z_k) = 0$.
Με τί ισούται το $\sum_{k=1}^n \mathrm{Res}(r; z_k)$ αν ο βαθμός του q υπερβαίνει τον βαθμό του p κατά μία μονάδα;

9.1.12. Αν $f(z) = e^{z+(1/z)}$, αποδείξτε ότι $\mathrm{Res}(f; 0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!(n+1)!}$.
Υπόδειξη: Γράψτε $\mathrm{Res}(f; 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0;1)} f(z)\, dz$ και σκεφτείτε ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n! z^n}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $e^{1/z}$ στον $C(0; 1)$.

9.1.13. [α] Αν $n \in \mathbb{N}$, αποδείξτε ότι υπάρχει $M \geq 0$ *ανεξάρτητο του* n ώστε να ισχύει $|\cot z| \leq M$ για κάθε $z \in \mathrm{bd}\, R_n$, όπου R_n είναι το τετράγωνο με κορυφές τα σημεία $\pm(n+\frac{1}{2})\pi \pm i(n+\frac{1}{2})\pi$.
[β] Αν γ_n είναι η κλειστή καμπύλη η οποία διαγράφει μία φορά με την θετική φορά διαγραφής το bd R_n, αποδείξτε ότι $\int_{\gamma_n} \frac{\cot z}{z^2}\, dz \to 0$ όταν $n \to +\infty$.
Αποδείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

[γ] Έστω f αναλυτική στο $\mathbb{C}$ εκτός από πόλους $z_1, \ldots, z_N$ και $\lim_{z\to\infty} z f(z) = 0$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} f(k) = -\sum_{j=1}^{N} \mathrm{Res}(f(z)\cot z; z_j).$$

Βρείτε τα αθροίσματα των σειρών: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+a^2}$ $(a > 0)$, $\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n+a)^2}$ $(a \notin \mathbb{Z})$.

9.2 Η Αρχή Ορίσματος.

ΘΕΩΡΗΜΑ 9.2. [**Αρχή Ορίσματος**] *Έστω ότι η f είναι αναλυτική στο ανοικτό και αστρόμορφο σύνολο Ω εκτός από πόλους $z_1, \ldots, z_N$ στο Ω. Επίσης, έστω ότι $\zeta_1, \ldots, \zeta_M$ είναι οι ρίζες της f στο Ω. Τέλος, έστω κλειστή καμπύλη γ στο Ω στην τροχιά της οποίας δεν βρίσκεται κανένας πόλος και καμία ρίζα της f. Τότε*

$$n(f(\gamma); 0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{j=1}^{M} n(\gamma; \zeta_j)\, n_j - \sum_{k=1}^{N} n(\gamma; z_k)\, m_k, \qquad (9.27)$$

όπου n_j είναι η πολλαπλότητα της ρίζας ζ_j και m_k είναι η τάξη του πόλου z_k.

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα των Ολοκληρωτικών Υπολοίπων στην συνάρτηση $\frac{f'(z)}{f(z)}$. Οι μεμονωμένες ανωμαλίες αυτής της συνάρτησης είναι οι πόλοι και οι ρίζες της f.
Αν n_j είναι η πολλαπλότητα της ρίζας ζ_j, τότε υπάρχει αναλυτική συνάρτηση g στο Ω ώστε να ισχύει

$$f(z) = (z-\zeta_j)^{n_j} g(z), \qquad g(\zeta_j) \neq 0.$$

Συνεπάγεται $f'(z) = n_j(z-\zeta_j)^{n_j-1}g(z) + (z-\zeta_j)^{n_j}g'(z)$. Επίσης, επειδή $g(\zeta_j) \neq 0$, υπάρχει $r > 0$ ώστε να ισχύει $g(z) \neq 0$ για $z \in D(\zeta_j; r)$. Άρα

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n_j}{z-\zeta_j} + \frac{g'(z)}{g(z)} \qquad \text{για } z \in D(\zeta_j; r) \setminus \{\zeta_j\}.$$

Επειδή η $\frac{g'(z)}{g(z)}$ είναι αναλυτική στον δίσκο $D(\zeta_j; r)$, το ζ_j είναι πόλος τάξης 1 της $\frac{f'(z)}{f(z)}$ με αντίστοιχο ολοκληρωτικό υπόλοιπο ίσο με n_j.
Αν m_k είναι η τάξη του πόλου z_k, τότε υπάρχει αναλυτική συνάρτηση g στο Ω ώστε να ισχύει

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_k)^{m_k}}, \qquad g(z_k) \neq 0.$$

Συνεπάγεται $f'(z) = -m_k \frac{g(z)}{(z-z_k)^{m_k+1}} + \frac{g'(z)}{(z-z_k)^{m_k}}$. Επίσης, επειδή $g(z_k) \neq 0$, υπάρχει $r > 0$ ώστε να ισχύει $g(z) \neq 0$ για $z \in D(z_k; r)$. Άρα

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-m_k}{z-z_k} + \frac{g'(z)}{g(z)} \qquad \text{για } z \in D(z_k; r) \setminus \{z_k\}.$$

Επειδή η $\frac{g'(z)}{g(z)}$ είναι αναλυτική στον δίσκο $D(z_k; r)$, το z_k είναι πόλος τάξης 1 της $\frac{f'(z)}{f(z)}$ με αντίστοιχο ολοκληρωτικό υπόλοιπο ίσο με m_k.
Τώρα, από το Θεώρημα Ολοκληρωτικών Υπολοίπων συνεπάγεται η δεξιά ισότητα στην (9.27).
Η αριστερή ισότητα προκύπτει με μια απλή αλλαγή μεταβλητής. Αν θεωρήσουμε την εξίσωση $z = \gamma(t)$ με $t \in [a, b]$ της καμπύλης γ, τότε η εξίσωση της καμπύλης $f(\gamma)$ είναι $w = f(\gamma(t))$ με $t \in [a, b]$ και άρα:

$$n(f(\gamma); 0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{f(\gamma)} \frac{1}{w}\, dw = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{f'(\gamma(t))\gamma'(t)}{f(\gamma(t))}\, dt = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz.$$

□

Το γεωμετρικό περιεχόμενο της Αρχής Ορίσματος είναι το εξής:
Ο αριθμός των περιστροφών της καμπύλης $f(\gamma)$ γύρω από το 0 ισούται με τον συνολικό αριθμό περιστροφών της γ γύρω από τις ρίζες της f μείον τον συνολικό αριθμό περιστροφών της γ γύρω από τους πόλους της f.

Εδώ πρέπει να ξεκαθαρίσουμε το εξής. Όταν μετράμε τις ρίζες και τους πόλους της f παίρνουμε υπ' όψη μας τις πολλαπλότητές τους. Θεωρούμε ότι στη θέση μιας ρίζας ζ_j με πολλαπλότητα n_j βρίσκονται n_j ίδιες ρίζες. Το ίδιο ισχύει και για τους πόλους: θεωρούμε ότι στη θέση ενός πόλου z_k με πολλαπλότητα m_k βρίσκονται m_k ίδιοι πόλοι.

Αν η f δεν έχει πόλους στο ανοικτό και αστρόμορφο Ω, δηλαδή αν είναι αναλυτική στο Ω, τότε η αρχή ορίσματος λέει ότι *ο αριθμός των περιστροφών της καμπύλης $f(\gamma)$ γύρω από το 0 ισούται με τον συνολικό αριθμό περιστροφών της γ γύρω από τις ρίζες της f*. Αν μάλιστα η καμπύλη γ είναι τέτοια ώστε για κάθε z που δεν ανήκει στην τροχιά της να ισχύει είτε $n(\gamma; z) = 1$ είτε $n(\gamma; z) = 0$, τότε η αρχή ορίσματος λέει ότι *ο αριθμός των περιστροφών της καμπύλης $f(\gamma)$ γύρω από το 0 ισούται με το πλήθος των ριζών της f οι οποίες περικλείονται από την γ.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 9.3. **[Το Θεώρημα του Rouché]** *Έστω ότι οι f, g είναι αναλυτικές στο ανοικτό και αστρόμορφο σύνολο Ω και έστω κλειστή καμπύλη γ στο Ω. Αν ισχύει $|f(z) - g(z)| < |g(z)|$ για κάθε $z \in \gamma^*$, τότε ο συνολικός αριθμός περιστροφών της γ γύρω από τις ρίζες της f είναι ίσος με τον συνολικό αριθμό περιστροφών της γ γύρω από τις ρίζες της g.*

Απόδειξη. Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι, λόγω της σχέσης $|f(z) - g(z)| < |g(z)|$ για κάθε $z \in \gamma^*$, καμία από τις ρίζες των f, g δεν βρίσκεται πάνω στην τροχιά της γ.

Αν $\zeta_1, \ldots, \zeta_M$ είναι οι ρίζες της f με πολλαπλότητες $n_1, \ldots, n_M$ και $\eta_1, \ldots, \eta_N$ είναι οι ρίζες της g με πολλαπλότητες $m_1, \ldots, m_N$, τότε από την (9.27) συνεπάγεται

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{j=1}^{M} n(\gamma; \zeta_j)\, n_j, \qquad \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}\, dz = \sum_{l=1}^{N} n(\gamma; \eta_l)\, m_l.$$

Επομένως,

$$\sum_{j=1}^{M} n(\gamma; \zeta_j)\, n_j - \sum_{l=1}^{N} n(\gamma; \eta_l)\, m_l = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \Big(\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)} \Big)\, dz \tag{9.28}$$

Τώρα θεωρούμε την συνάρτηση $h = \frac{f}{g}$ η οποία είναι αναλυτική στο Ω εκτός των ριζών της g οι οποίες είναι είτε πόλοι είτε αιρόμενες ανωμαλίες της h. Άρα η (9.27) συνεπάγεται

$$n(h(\gamma); 0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{h'(z)}{h(z)}\, dz. \tag{9.29}$$

Επειδή $\frac{h'}{h} = \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}$, από τις (9.28) και (9.29) έχουμε ότι

$$\sum_{j=1}^{M} n(\gamma; \zeta_j)\, n_j - \sum_{l=1}^{N} n(\gamma; \eta_l)\, m_l = n(h(\gamma); 0). \tag{9.30}$$

Όμως, από την υπόθεση έχουμε ότι ισχύει $|h(z) - 1| < 1$ για κάθε $z \in \gamma^*$. Δηλαδή η τροχιά της καμπύλης $h(\gamma)$ βρίσκεται μέσα στον δίσκο $D(1; 1)$ και επομένως δεν περιστρέφεται καμία φορά γύρω από το 0. Άρα η (9.30) λέει ότι $\sum_{j=1}^{M} n(\gamma; \zeta_j)\, n_j = \sum_{l=1}^{N} n(\gamma; \eta_l)\, m_l$. $\square$