**Πρώτο φυλλάδιο ασκήσεων.**

Λύστε όλες τις ασκήσεις της ενότητας 1.1 των σημειώσεών μου. Να οι απαντήσεις (όχι λύσεις) σε κάποιες από αυτές.

**1.1.3.** Της $|z| = z$ είναι οι $z = x$ με $x \geq 0$. Της $|z| = iz$ είναι οι $z = iy$ με $y \leq 0$.
**1.1.9.** Η μέγιστη τιμή και στις δύο περιπτώσεις είναι 35.
Η ελάχιστη τιμή με $|z| = 2$ είναι 3 και με $|z| \leq 2$ είναι 0.
**1.1.13.** Για την $z + \overline{z} = w$ ο $w$ πρέπει να είναι πραγματικός και οι λύσεις είναι $z = \frac{w}{2} + iy$ με $y \in \mathbb{R}$.
Για την $z - \overline{z} = w$ ο $w$ πρέπει να είναι φανταστικός και οι λύσεις είναι $z = x + \frac{w}{2}$ με $x \in \mathbb{R}$.
**1.1.14.** Για τον $\sqrt{3}+i$ το πρωτεύον όρισμα είναι το $\frac{\pi}{6}$ και τα ορίσματα είναι τα $\frac{\pi}{6}+k2\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$.
Για τον $-1 - \sqrt{3}i$ το πρωτεύον όρισμα είναι το $-\frac{2\pi}{3}$ και τα ορίσματα είναι τα $-\frac{2\pi}{3} + k2\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$.
**1.1.16.** Οι $z$ που βρίσκονται πάνω στις δύο ευθείες με εξισώσεις $y = x$ και $y = -x$ (εκτός από τον $z = 0$).
**1.1.17.** Για το $\arg(z^2)$ είναι οι $z$ που βρίσκονται στον $y$-άξονα (εκτός του $z = 0$).
Για το $\arg(z^3)$ είναι οι $z$ που βρίσκονται στον αρνητικό $x$-άξονα, στην ημιευθεία με κορυφή το 0 (χωρίς το 0) και σε γωνία $\frac{\pi}{3}$ με τον θετικό $x$-άξονα και στην ημιευθεία με κορυφή το 0 (χωρίς το 0) και σε γωνία $-\frac{\pi}{3}$ με τον θετικό $x$-άξονα.
Για το $\arg(z^4)$ είναι οι $z$ που βρίσκονται στις δύο ευθείες με εξισώσεις $y = x$ και $y = -x$ (εκτός από τον $z = 0$).
**1.1.18.** Για το $\operatorname{Re} z > 0$ είναι το διάστημα $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ καθώς και κάθε διάστημα $(-\frac{\pi}{2}+k2\pi, \frac{\pi}{2}+k2\pi)$ με $k \in \mathbb{Z}$.
Για το $\operatorname{Re} z < 0$ είναι το διάστημα $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ καθώς και κάθε διάστημα $(\frac{\pi}{2} + k2\pi, \frac{3\pi}{2} + k2\pi)$ με $k \in \mathbb{Z}$.
Για το $\operatorname{Im} z < 0$ είναι το διάστημα $(-\pi, 0)$ καθώς και κάθε διάστημα $(-\pi + k2\pi, k2\pi)$ με $k \in \mathbb{Z}$.
**1.1.22.**

$$1 + r\cos\theta + r^2\cos 2\theta + \cdots + r^n\cos n\theta = \frac{r^{n+2}\cos n\theta - r^{n+1}\cos(n+1)\theta - r\cos\theta + 1}{r^2 - 2r\cos\theta + 1},$$

$$r\sin\theta + r^2\sin 2\theta + \cdots + r^n\sin n\theta = \frac{r^{n+2}\sin n\theta - r^{n+1}\sin(n+1)\theta + r\sin\theta}{r^2 - 2r\cos\theta + 1}.$$

Ο παρονομαστής $r^2 - 2r\cos\theta + 1$ είναι 0 αν και μόνο αν $r = 1, \theta = k2\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$. Σ' αυτήν την περίπτωση το πρώτο άθροισμα είναι $n + 1$ και το δεύτερο άθροισμα είναι 0.
**1.1.23.** Για τα $z, \overline{z}$ είναι ο $x$-άξονας.
Για τα $z, -\overline{z}$ είναι ο $y$-άξονας.
Για τα $z, i\overline{z}$ είναι η ευθεία με εξίσωση $y = x$.
Για τα $z, -i\overline{z}$ είναι η ευθεία με εξίσωση $y = -x$.
**1.1.25.** Η ευθεία με εξίσωση $x = \frac{1}{2}$.
Το κλειστό ημιεπίπεδο που αποτελείται από τα σημεία $(x, y)$ με $y \geq -1$.
Ο κλειστός δίσκος με κέντρο $(0, -2)$ και ακτίνα $\sqrt{3}$.
Η ευθεία με εξίσωση $2x + y = -1$.
Ένας λημνίσκος (ένα οριζόντιο σχήμα $\infty$) με άξονες συμμετρίας τον $x$-άξονα και τον $y$-άξονα, ακραίο δεξιά σημείο το $\sqrt{2}$ και ακραίο αριστερά σημείο το $-\sqrt{2}$. Οι εφαπτόμενες του λημνίσκου στο σημείο 0 είναι οι ευθείες με εξισώσεις $y = x$ και $y = -x$.
Τα σημεία $(x, y)$ που βρίσκονται επί της παραβολής με εξίσωση $x = \frac{1}{2} - \frac{y^2}{2}$ και κάτω από αυτήν.
**1.1.27.** [α] Ο $w$ στο δεύτερο και ο $-w$ στο πρώτο ημιεπίπεδο.
[β] Αν συμβολίσουμε $l_c$ την ευθεία με εξίσωση $\operatorname{Re}(\overline{w}z) = c$ και $l$ την ευθεία του διανύσματος $\overrightarrow{0w}$, τότε η $l_c$ είναι κάθετη στην $l$. Οπότε για τις διάφορες τιμές του $c$ οι ευθείες $l_c$ είναι παράλληλες

μεταξύ τους. Αν συμβολίσουμε $P_c$ το σημείο τομής της $l_c$ με την $l$, τότε $P_0 = 0$. Αν $c > 0$, το $P_c$ βρίσκεται στην ημιευθεία του $\overrightarrow{0w}$ ενώ, αν $c < 0$, το $P_c$ βρίσκεται στην αντίθετη ημιευθεία. Καθώς ο $c$ αυξάνεται στο $(-\infty, +\infty)$ το σημείο μετακινείται πάνω στη (σταθερή) ευθεία $l$ στην κατεύθυνση που δείχνει το διάνυσμα $\overrightarrow{0w}$.
[γ] Η κλειστή ζώνη ανάμεσα στις δύο παράλληλες ευθείες $l_{c_1}$ και $l_{c_2}$. (Περιλαμβάνονται και τα σημεία των δύο ευθειών.)
[στ] Να υπάρχει $t \in \mathbb{R}$ ώστε $w' = tw$ και να ισχύει $c' \leq ct$.
**1.1.31.** Για την ευθεία $\mathrm{Re}(\overline{w}z) = 3$ ένα τέτοιο διάστημα $J$ είναι το $(-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$. Όλα τα διαστήματα $J$ είναι τα $(-\frac{\pi}{6} + k2\pi, \frac{5\pi}{6} + k2\pi)$ με $k \in \mathbb{Z}$.
Για την ευθεία $\mathrm{Re}(\overline{w}z) = -3$ ένα διάστημα $J$ είναι το $(\frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6})$. Όλα τα διαστήματα $J$ είναι τα $(\frac{5\pi}{6} + k2\pi, \frac{11\pi}{6} + k2\pi)$ με $k \in \mathbb{Z}$.
**1.1.32.** Για τον κύκλο $|z - 1| = \frac{1}{2}$ ένα διάστημα $J$ είναι το $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$. Όλα τα διαστήματα $J$ είναι τα $(-\frac{\pi}{6} + k2\pi, \frac{\pi}{6} + k2\pi)$ με $k \in \mathbb{Z}$.