Τρίτο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Έστω $f : A \to \mathbb{C}$ και z_0 εσωτερικό σημείο του A. Έστω u, v το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της f και έστω ότι οι $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ υπάρχουν σε μια περιοχή του z_0 και είναι συνεχείς στο z_0.
(i) Αν το $\lim_{z\to z_0} \operatorname{Re} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο z_0.
(ii) Αν το $\lim_{z\to z_0} \left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right|$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, αποδείξτε ότι είτε η f είναι παραγωγίσιμη στο z_0 είτε η $\overline{f}$ είναι παραγωγίσιμη στο z_0.

2. Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη στο χωρίο (δηλαδή ανοικτό και συνεκτικό) Ω και έστω u, v το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της f.
(i) Αν είτε η u είτε η v είναι σταθερή στο Ω, αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή στο Ω.
(ii) Πιο γενικά, αν υπάρχει ευθεία l έτσι ώστε να ισχύει $f(z) \in l$ για κάθε $z \in \Omega$, αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή στο Ω.

3. Βρείτε τις αντίστροφες εικόνες μέσω της εκθετικής συνάρτησης $w = e^z$ των εξής συνόλων:
(i) $\{re^{i\theta} \,|\, 1 < r < 3, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\}$,
(ii) $\{re^{i\theta} \,|\, 1 < r, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\}$,
(iii) $\{re^{i\theta} \,|\, r < 1, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\}$,
(iv) $\{re^{i\theta} \,|\, 1 < r < 3, -\pi < \theta < \pi\}$,
(v) $\{re^{i\theta} \,|\, 1 < r < 3, 0 < \theta < 2\pi\}$,
(vi) $\{re^{i\theta} \,|\, 1 < r < 3, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}\}$.
Σε ποιά από αυτά τα σύνολα ορίζεται ο πρωτεύων κλάδος του λογαρίθμου και ποιοί άλλοι κλάδοι ορίζονται σε αυτά; Ποιοί κλάδοι του λογαρίθμου ορίζονται στα άλλα σύνολα; Σε κάθε περίπτωση γράψτε τύπους των κλάδων του λογαρίθμου καθώς και την εικόνα καθενός συνόλου μέσω των αντίστοιχων κλάδων του λογαρίθμου.

4. Ορίζουμε τις συναρτήσεις
$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}, \quad \tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$
(i) Αποδείξτε ότι αυτές οι συναρτήσεις όταν περιοριστούν στο $\mathbb{R}$ ταυτίζονται με τις γνωστές μας τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Βρείτε τα πεδία ορισμού τους και τις περιόδους τους. Αποδείξτε ότι
• $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$,
• $\sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$ και $\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$,
• $|\cos(x + iy)|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$ και $|\sin(x + iy)|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$, όπου $\sinh y = (e^y - e^{-y})/2$.
(ii) Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις είναι ολόμορφες στα πεδία ορισμού τους και βρείτε τις παραγώγους τους.
(iii) Μελετήστε την $w = \sin z$ στην κατακόρυφη ζώνη $\{x + iy \,|\, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\}$ και την $w = \cos z$ στην κατακόρυφη ζώνη $\{x + iy \,|\, 0 < x < \pi\}$. Δείτε πού απεικονίζονται οι διάφορες κατακόρυφες ευθείες και τα διάφορα οριζόντια ευθύγραμμα τμήματα (μήκους π) που βρίσκονται σε αυτές τις δύο ζώνες από τις αντίστοιχες δύο συναρτήσεις.

5. Έστω $P = \{re^{i\theta} \,|\, 1 < r < 2, -\frac{3\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4}\}$, $Q = \{w = re^{i\theta} \,|\, 1 < r < 2, \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{7\pi}{4}\}$. Είναι δυνατόν να υπάρχουν συνεχής κλάδος f του $\log w$ στο P και συνεχής κλάδος g του $\log w$ στο Q οι οποίοι ταυτίζονται στο $P \cap Q$;

6. Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ και $a < b$. Ποιό είναι το γεωμετρικό περιεχόμενο του αριθμού $\operatorname{Im}(\operatorname{Log} \frac{z-b}{z-a})$ για κάθε z στο άνω ημιεπίπεδο $\mathbb{H}_+ = \{z \,|\, \operatorname{Im} z > 0\}$; Πώς μεταβάλλεται αυτός ο αριθμός όταν το z μεταβάλλεται στο $\mathbb{H}_+$;